This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

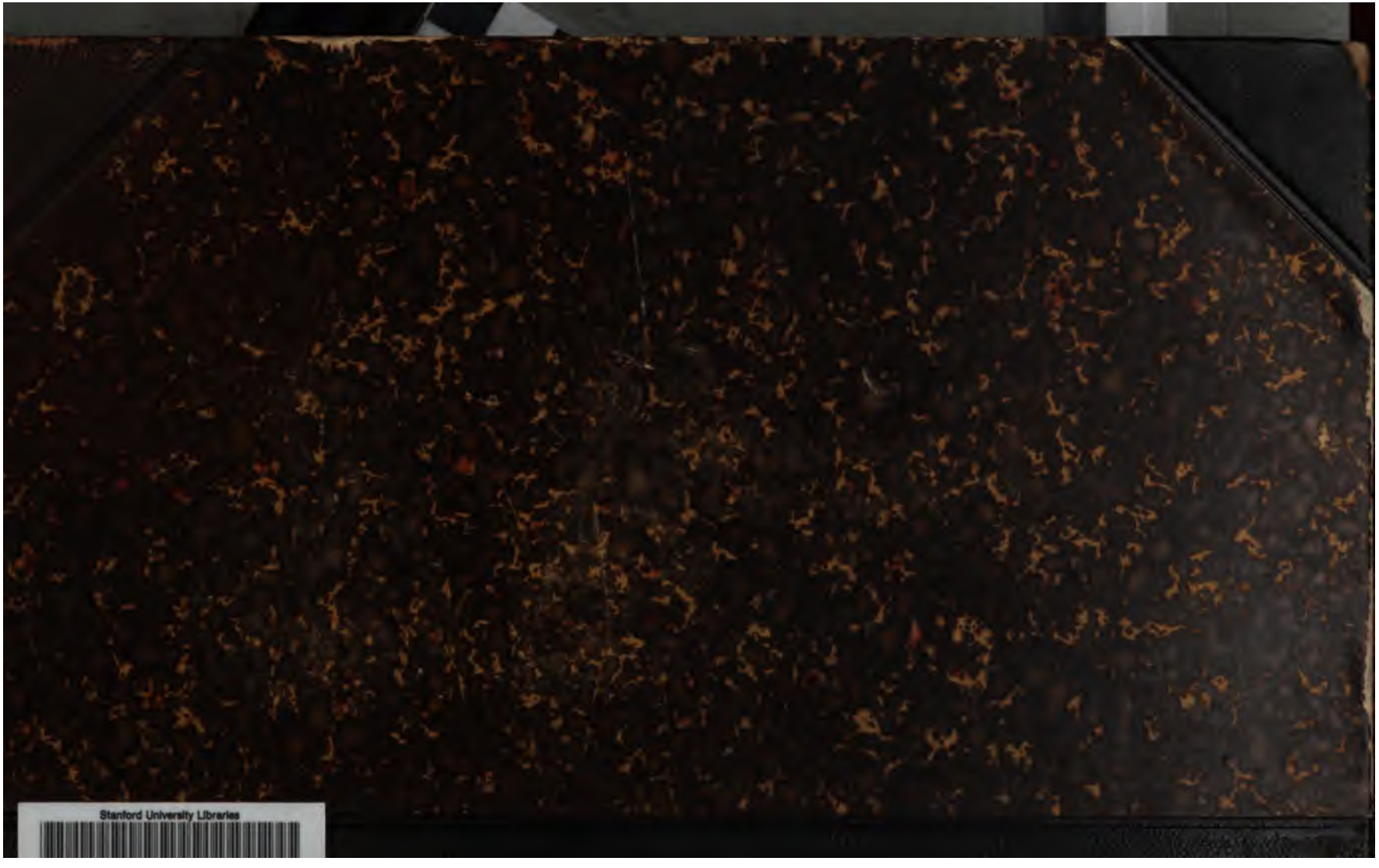
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

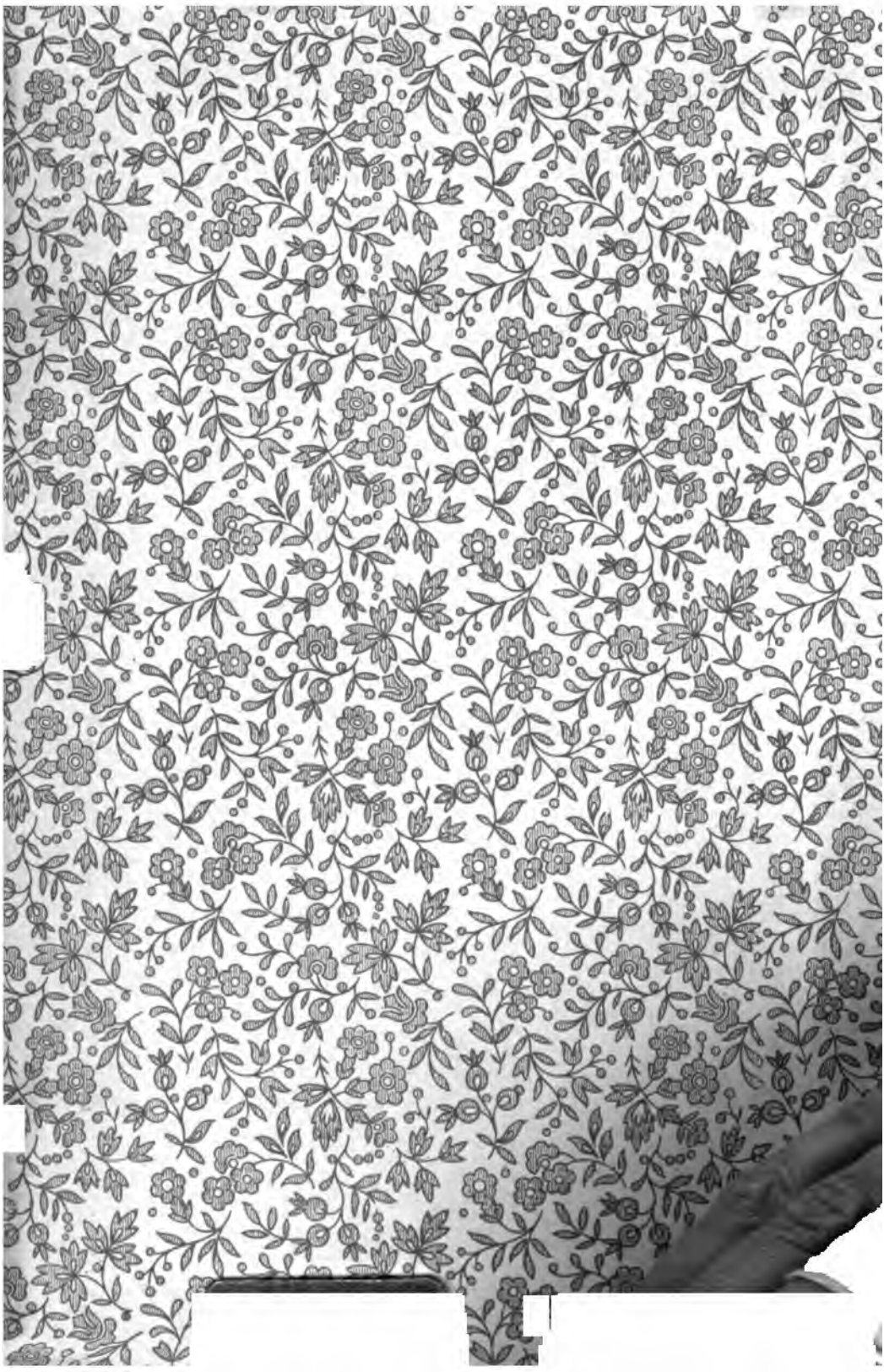
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`


Stanford University Libraries



MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. F. KLEIN zu München,
Prof. A. MAYER zu Leipzig, Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig,

gegenwärtig herausgegeben

von

Carl Neumann,
Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig.

IX. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1876.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY
Q 28304

Inhalt des neunten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Bäcklund, in Lund. Ueber Flächentransformationen 297

Ball, in Dublin. The Theory of Screws, a study in the Dynamics of a rigid body. (Auszug aus einem grösseren Werke) 541

Harnack, in Leipzig. Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades 1

——— Zur Theorie der ternären cubischen Formen 218

——— Ueber eine Behandlungsweise der algebraischen Differentiale in homogenen Coordinaten 371

Klein, in München. Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst 183

——— Ueber den Zusammenhang der Flächen 476

König, in Budapest. Ein allgemeiner Ausdruck für die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades 530

Königsberger, in Dresden. Ueber die Entwicklung der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in Reihen. 487

Krause, in Heidelberg. Ueber die Discriminante der Modulargleichungen der elliptischen Functionen. (Fortsetzung des Aufsatzes in Bd. 8 p. 539) 554

Lie, in Christiania. Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung 245

Lommel, in Erlangen. Ueber eine mit den Bessel'schen Functionen verwandte Function 425

Lüroth, in Carlsruhe. Beweis eines Satzes über rationale Curven 163

Mayer, in Leipzig. Ueber die Weiler'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung 347

Nöther, in Erlangen. Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve . . . 166

Pringsheim, in Berlin. Zur Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung 445

Schncke, in Carlsruhe. Zur Theorie des optischen Drehvermögens von Krystallen 504

Sturm, in Darmstadt. Ueber die v. Staudt'schen Würfe. (Mit einer Tafel) 333

——— Zur Theorie der algebraischen Flächen 573

Voss, in Darmstadt. Ueber Complexe und Congruenzen. 55

——— Ueber die Zahl der Kreispunkte einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung 241

——— Die Curve vierpunktiger Berührung auf einer algebraischen Fläche 483

Wedekind, in Erlangen. Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen 209

Zeuthen, in Kopenhagen. Sur une classe de points singuliers de surfaces . 321

Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades.

Von Axel Harnack aus Dorpat.

Nachstehende Untersuchungen sollen dem Zwecke dienen, den fundamentalen Zusammenhang zwischen der Theorie der elliptischen Functionen und der Geometrie der Curven dritten Grades zur Bildung und Lösung neuer geometrischer Probleme zu verwerthen. Um dieses zu erreichen, erschien es nothwendig, zunächst die von Aronhold*) und Clebsch**) gegebene Darstellung der Curvenelemente durch die Werthe eines Parameters ins Einzelne auszuführen und die Einfachheit dieser Werthevertheilung zu deutlicher Anschauung zu bringen. Letzteres gelingt indess in vollständiger Weise erst dann, wenn eine Uebersicht über das gesammte Gebiet der Curve durch reelle Repräsentation der *complexen* Elemente hergestellt wird, worauf Klein in seiner Abhandlung: „Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen"***) hingewiesen hat. An diese Auffassung knüpft der *zweite* Abschnitt des vorliegenden Aufsatzes an, worüber das Nähere in der zugehörigen Einleitung gesagt ist. Im *ersten* Theile sind die wesentlichsten allgemeinen Sätze über die Perioden des mit der Curve verbundenen Integrales und über die Parameterwerthe insonderheit der *reellen* Curvenelemente aufgestellt worden. Eine getrennte Behandlung der *zweitheiligen* (§ 1.) und der *eintheiligen* (§ 4.) Curven ging aus der Verschiedenheit der Periodenwerthe für die elliptischen Functionen hervor; die Vermittelung beider Betrachtungen ergab sich jedoch vermöge eines Uebertragungsprincipes, das durch die zwischen einer Hesse'schen und einer Cayley'schen Curve bestehenden Relationen, oder, was das Nämliche besagt, durch eine Art der quadratischen Transformation des elliptischen Integrales gewonnen wurde.

*) Monatsberichte der Berliner Academie, 25. April 1861.

**) „Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung", Borchardt's Journal Bd. 63. „Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen", ebendas. Bd. 64.

***) Math. Annalen Bd. VII, p. 558 ff.

Die Begründung dieser Beziehungen durch die drei Arten correspondirender Elementenpaare ist in den §§ 2. und 3. eingehend auseinandergesetzt.

Ueberhaupt hielt ich es in der zusammenfassenden Darstellung aus mancherlei Gründen für geboten, dieselbe Aufeinanderfolge im Gedankengange zu bewahren, die sich während des Entstehens dieser Arbeit entwickelte, und betrachte als *abschliessenden* Gesichtspunkt für dieselbe: *die geometrische Interpretation der allgemeinsten zulässigen linearen Beziehung zwischen den Parameterwerthen.* Diese Relation umfasst die Theorie der ein- und mehrdeutigen algebraischen Transformationen der Curve in sich selbst und erläutert damit auch die functionentheoretischen Betrachtungen über die Transformation eines elliptischen Integrales; zugleich löst sie ein Integrationsproblem, welches mit der Theorie der ternären cubischen Form aufs Engste verbunden ist. — Auf die allgemeine algebraische Formulirung der gewonnenen Resultate bin ich dabei noch nicht eingegangen, doch gedenke ich das Wesentlichste hierüber demnächst zu veröffentlichen*).

Herrn Klein, mit dem ich während der Ausführung dieser Untersuchungen in stätem Verkehre stand, bin ich für Anregung und Förderung in hohem Masse zu Dank verpflichtet.

Abschnitt I.

§ 1.

Die Darstellung der zweitheiligen Curven dritten Grades durch die Werthe eines Parameters.

Das Büschel von Curven $n-2^{ter}$ Ordnung, welches von Clebsch**) zur Einführung der elliptischen Functionen bei Curven n^{ter} Ordnung mit $\frac{n \cdot n-3}{2}$ Doppel- oder Rückkehrpunkten verwandt ist, wird bei den allgemeinen Curven 3^{ter} Ordnung durch die aus einem beliebigen Punkte derselben gezogenen Strahlen gebildet. Am zweckmässigsten wird dieses Strahlbüschel so gewählt, dass sein Mittelpunkt in einen der reellen Wendepunkte fällt, indem überhaupt das Coordinatensystem, zusammengesetzt aus der Tangente in diesem Wendepunkte ($x_1 = 0$), der zugehörigen harmonischen Polare ($x_3 = 0$) und einer vom Wendepunkte ausgehenden Tangente ($x_2 = 0$) zu Grunde gelegt wird. Die Gleichung der Curve erlangt zunächst dadurch die Form:

*) Vgl. hiezu eine vorläufige Mittheilung in den Sitzungsberichten der physik. med. Societät zu Erlangen vom 8. Febr. 1875; über die geometrischen Resultate eine kurze Notiz ebendaselbst vom 13. Juli 1874.

**) Clebsch, a. a. O. Bd. 64.

$$(1) \qquad x_1 x_3^2 - x_2(a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2) = 0\,,$$

worin der quadratische Ausdruck das Product der beiden noch übrigen Tangenten vom Wendepunkte ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) aus vorstellt. Zerlegt man ihn in seine linearen Factoren, so ist, wie als bekannt vorausgesetzt werden darf, die gegebene Curve *zweitheilig*, wenn diese Factoren reell, *eintheilig*, wenn sie conjugirt imaginär sind. Wir fassen zunächst den ersten Fall ins Auge. Bezeichnet dann k^2 das Doppelverhältniss der 4 Tangenten, die Wendetangente in das Quadrupel mit eingerechnet, so lässt sich bei geeigneter Wahl der Einheitslinie der obigen Gleichung die kanonische Form geben*):

$$(2) \qquad x_1 x_3^2 - x_2(x_2 - x_1)(x_2 - k^2 x_1) = 0,$$

für welche immer $0 < k^2 < 1$ angenommen werden kann. Führt man nun einen Parameter μ so ein, dass:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \varrho x_1 &= \mu^3\,, \\ \varrho x_2 &= \mu\,, \\ \varrho x_3 &= \sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)} \end{aligned}$$

wird, so sind, wenn $u = \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)}}$ gesetzt wird, die Coordinaten jedes Punktes der Curve durch elliptische Functionen des Argumentes u dargestellt, derart, dass:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \varrho x_1 &= S(u)^3\,, \\ \varrho x_2 &= S(u)\,, \\ \varrho x_3 &= C(u) \cdot D(u)\ **)\,. \end{aligned}$$

Wird die reelle Periode des Integrales mit 2ω, die imaginäre mit $2\omega' i$ bezeichnet***), so erhält man, indem u das gesammte complexe Werthgebiet durchläuft, sämmtliche Curvenpunkte, so zwar, dass bereits $u + \omega$ und $u + \omega' i$ denselben Punkt wie u liefern. Die Curve 3ten Grades besitzt also nach dieser Bezeichnungsweise die Perioden ω und $\omega' i$. Wollte man die Perioden der Curve mit den Perioden des Integrales auch dem absoluten Werthe nach in Uebereinstimmung

*) Clebsch und Gordan: Theorie der Abel'schen Functionen, 1866, p. 72. Salmon: Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven, deutsch bearbeitet von Fiedler, 1873, p. 200.

**) Ich bediene mich durchgehends der minder gebräuchlichen, aber kürzeren Schreibweise: sin am $(u) = S(u)$, cos am $(u) = C(u)$, Δ am $(u) = D(u)$.

***) Unter der Bezeichnung „Perioden des Normalintegrales" ist hier das sogenannte „elliptische Elementarperioden-Paar" verstanden. Vgl. Briot und Bouquet: Theorie der doppelt periodischen Functionen, bearbeitet von Fischer, 1862, p. 125.

bringen, so ist für u in den Gleichungen (4) $\frac{u}{2}$ zu setzen; doch ist damit im Wesen der Sache nichts geändert, da eine bestimmte Bezeichnungsweise jeder Periode immer nur in Hinsicht auf das Verhältniss beider von Belang ist.

Reelle Punkte der Curve werden dargestellt, indem erstlich u die reellen Werthe von 0 bis ω durchläuft, dann aber auch, da nach bekannten Formeln der elliptischen Functionen die Relationen bestehen:

$$(5)\quad S\left(u+\frac{\omega' i}{2}\right)=\frac{1}{kS(u)},\quad C\left(u+\frac{\omega' i}{2}\right)\cdot D\left(u+\frac{\omega' i}{2}\right)=-\frac{C(u)\cdot D(u)}{k\cdot S(u)^2},$$

durch die complexen Werthe von der Form $u+\frac{\omega' i}{2}$, wobei u wiederum alle Werthe von 0 bis ω erhält. Die durch diese Grössen gelieferten reellen Punkte der Curve sind, da $S(u)$ und $C(u)\cdot D(u)$ einen bestimmten Werth innerhalb des von ω und $\omega' i$ gebildeten Periodenparallelogrammes nur einmal annehmen, von den durch reelle u gelieferten verschieden, während andererseits keine weiteren Parameterwerthe existiren, für welche die Verhältnisse der drei Coordinaten reell werden. Auf diesem Verhalten der elementaren elliptischen Functionen beruht die Eigenschaft, dass die Curven 3^{ten} Grades der gemeinten Art *zwei reelle Curvenzüge* besitzen.

Diesem Theoreme lässt sich indess einem Liouville'schen Satze gemäss eine erweiterte Fassung geben. Eine elliptische Curve n^{ten} Grades mit *reellem* Modul wird, falls sie überhaupt ein einfach unendliches reelles Gebiet enthält, so dargestellt werden können, dass die Coordinaten ihrer Punkte durch Polynome in $S(u)$ mit reellen Coefficienten definirt sind, in denen der Factor $\frac{dS(u)}{du}$ linear auftritt und deren Grad von dem der Curve abhängig ist. Diese Curve ist alsdann durch den Parameterwerth u eindeutig auf eine Curve 3^{ten} Grades mit gleichem Modul bezogen, wenn die Punkte der letzteren gleichfalls durch die elliptische Function gegeben sind; dann kann aber die Curve n^{ten} Grades, ohne dass die beiderseitige Beziehung aufhören würde eindeutig zu sein, keine weitere Kette reeller Werthe mehr als diese letztere enthalten; es geht also daraus der Satz hervor:

Eine elliptische Curve mit reellen Coefficienten und reellem Modul besitzt zwei und nur zwei reelle Züge. Werden die Perioden der Curve ω und $\omega' i$ genannt, so haben die Punkte des einen Zuges die Parameterwerthe von 0 bis ω, die des anderen die nämlichen Werthe vermehrt um $\frac{\omega' i}{2}$.

Durch diesen Satz ist jedoch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass die elliptische Curve ausser den beiden Zügen auch noch eine

bestimmte Zahl isolirter reeller Punkte enthält*). Solchen Punkten entsprechen alsdann zwei conjugirt imaginäre Punkte der Curve 3ten Grades, die im Uebrigen eindeutig auf die gegebene Curve bezogen ist.

Aus den Untersuchungen von Möbius**) ergiebt sich dann weiter in Folge dieses Satzes: Die zweitheiligen elliptischen Curven von ungerader Ordnungszahl bestehen aus einem paaren und einem unpaaren, die Curven von gerader Ordnungszahl aus zwei paaren oder zwei unpaaren Zügen. —

Die Vertheilung des Parameters auf den beiden Zügen der Curve 3ter Ordn. ist durch das Abel'sche Theorem im Zusammenhange mit dem zu Grunde gelegten Coordinatensysteme bestimmt. Sind die Parameterwerthe von 3 auf einer beliebigen Geraden liegenden Curvenpunkten durch u_1, u_2, u_3 gegeben, so herrscht bekanntlich die Relation:

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv C \mid \text{mod } \omega \text{ und } \omega' i \mid . \tag{6}$$

Bei Zugrundelegung der obigen kanonischen Form (Gleichung (2)) wird die Constante $C \equiv 0$, weil der dem Coordinatensysteme angehörige Wendepunkt den Werth $u = 0$ besitzt. Die Punkte des unpaaren Zuges erhalten also in diesem Falle reelle, die des paaren complexe Argumentenwerthe. Insbesondere ist auch noch zu erwähnen, dass, da $0 < k^2 < 1$ gewählt ist, $x_2 - x_1 = 0$ diejenige Tangente bezeichnet, welche vom Wendepunkte aus an den unpaaren Zug gezogen werden kann, während dem Berührungspunkte der Tangente $x_2 = 0$ das Argument $u = \frac{\omega' i}{2}$, dem Berührungspunkte von $x_2 - k^2 x_1 = 0$ der Werth $u = \frac{\omega + \omega' i}{2}$ zugetheilt werden muss.

Um ein geometrisches Bild von der Vertheilung der Perioden zu gewinnen, gehe man, nachdem man einem der beiden noch übrigen reellen Wendepunkte den Werth $\frac{\omega}{3}$, dem anderen $\frac{2\omega}{3}$ gegeben hat, vermittelst fortgesetzten Tangentenziehens auf der Curve weiter. Von dem Wendepunkt 0 beginnend erreicht man so die Punkte:

$$\frac{\omega}{2}, \quad \frac{\omega' i}{2}, \quad \frac{\omega + \omega' i}{2}.$$

Dabei ist es zufolge der eben gemachten Bemerkung nicht mehr willkührlich, welchem Punkte der Werth $\frac{\omega' i}{2}$ und welchem $\frac{\omega + \omega' i}{2}$ ertheilt wird. Indem nämlich die Beziehung besteht, dass die von einem

*) So liefert z. B. die quadratische Transformation, angewandt auf eine zweitheilige Curve 3. Ordnung, eine zweitheilige Curve 4. Ordnung mit 2 isolirten reellen Punkten, wenn das Fundamentaldreieck der Transformation so gelegt ist, dass 2 seiner Ecken auf der gegebenen C_3 liegen, und 2 Seiten dieselbe in conjugirt imaginären Punktepaaren schneiden.

**) Abhandlungen der k. sächsischen Gesellsch. der Wissensch., Bd. I.

Punkte der Curve an den paaren Zug ausgehenden Tangenten beide innerhalb des nämlichen von den Tangenten an den unpaaren Zug gebildeten Winkelraumes liegen, bekommt der Berührungspunkt derjenigen Tangente den Werth $\frac{\omega}{2} + \frac{\omega' i}{2}$ zuertheilt, welche bei der Drehung von $x_1 = 0$ zu $x_2 - x_1 = 0$ als zweite Linie erreicht wird. Von dem Punkte $\frac{\omega}{2}$ gelangt man alsdann zu den Punkten

$$\frac{\omega}{4}, \quad \frac{3\omega}{4}, \quad \frac{\omega}{4} + \frac{\omega' i}{2}, \quad \frac{3\omega}{4} + \frac{\omega' i}{2} \text{ u. s. f.}$$

Auf diese Weise wird das reelle Gebiet der Curve mit Parameterwerthen überdeckt, und es ist ersichtlich, dass die Aufeinanderfolge

Fig. 1a.

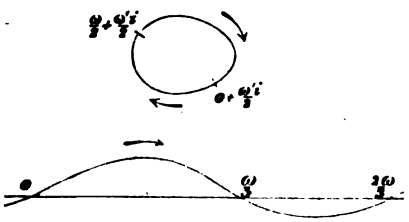
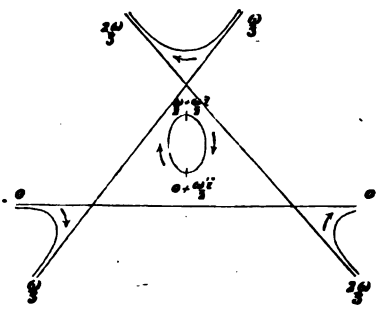


Fig. 1b



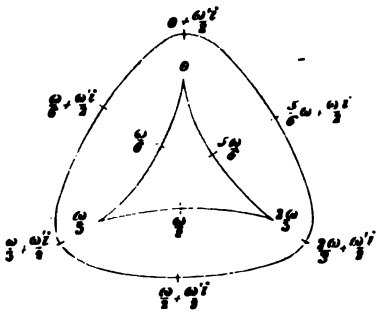
der Punkte von 0 bis ω auf dem unpaaren, und von $0 + \frac{\omega' i}{2}$ bis $\omega + \frac{\omega' i}{2}$ auf dem paaren Zuge in entgegengesetzter Richtung stattfindet, wie es beistehende schematische Zeichnungen veranschaulichen sollen.

Imaginäre Punkte der Curve erhalten complexe Parameterwerthe von der Form $\frac{\omega}{a} + \frac{\omega' i}{a'}$ und *conjugirt imaginäre* Punkte sind nach den für $S(u + iv)$, $C(u + iv) \cdot D(u + iv)$ bestehenden Summenformeln durch die Werthe $\frac{\omega}{a} \pm \frac{\omega' i}{a'}$ dargestellt.

In analoger Weise gestaltet sich die Parametervertheilung bei den zweitheiligen Curven dritter *Classe*. Von den beiden Zügen dieser Curve ist der eine in dualistischem Sinne ungerade, da von jedem Punkte der Ebene eine oder drei reelle Tangenten an ihn ausgehen. Die Elemente dieses Zuges sind daher, mit Beibehaltung des dem früheren entsprechenden Coordinatensystemes, die Träger der reellen Periode, während den Elementen des anderen zugleich die halbe imaginäre Periode angehört. Im Folgenden sollen diese beiden Theile mit dem Namen „dreispitzig“ und „oval“ unterschieden werden. Beistehende Zeichnung lässt die Vertheilung der Parameter übersehen; dabei ist der Argumentenwerth einer reellen Tangente ihrem Berührungspunkte

zugeschrieben und es ist ersichtlich, dass die Aufeinanderfolge der Tangenten auf dem einen Zuge in entgegengesetztem Drehsinne wie auf dem anderen erfolgt.

Fig. 2.



§ 2.

Die involutorischen Systeme der drei Correspondenzarten und der Zusammenhang zwischen den Cayley'schen und den Hesse'schen Curven.

Die Einführung der Parameterdarstellung gestattet eine einfache Uebersicht über die correspondirenden Punkte auf der Curve. Für die im Nachstehenden durchgeführten Untersuchungen kommen diese Punktepaare vor allem desshalb in Betracht, weil dieselben zu den im geometrischen Sinne einfachsten Zuordnungen unter den wechselseitig eindeutigen Verbindungen der Curvenelemente gehören. Des weiteren aber knüpfen sich an diese Correspondenz einige naheliegende, für die Erzeugung und für die Transformation der Curve wesentliche Sätze, welche, soweit mir bekannt ist, explicite noch nicht ausgesprochen sind. In den folgenden Paragraphen habe ich daher diese Betrachtung den späteren, verallgemeinerten gesondert vorangestellt, und die gewonnenen Resultate zugleich dazu verwerthet, die Perioden und die Parameterdarstellung der eintheiligen elliptischen Curven zu discutiren.

Zu einem Punkte u gehören drei correspondirende Punkte, das heisst drei Punkte, die den nämlichen Tangentialpunkt wie u besitzen. Das Argument des Tangentialpunktes von u werde mit v bezeichnet, alsdann ist:

$$2u + v \equiv 0 \mid \text{mod. } \omega \text{ und } \omega' i \mid ,$$

also

$$v \equiv -2u$$

und die correspondirenden Punkte von u erhalten somit die Parameterwerthe

$$(1) \qquad u + \frac{\omega}{2}, \quad u + \frac{\omega' i}{2}, \quad u + \frac{\omega + \omega' i}{2}.$$

Unterscheidet man, derselben Reihenfolge entsprechend, *Correspondenz*

erster, *zweiter* und *dritter Art*, so ist nach den oben gemachten Bemerkungen auch aus diesen Werthen ersichtlich, dass durch die Correspondenz 1ter Art reelle Punkte desselben Zuges, durch die Correspondenz 2ter und 3ter Art Punkte, die auf verschiedenen Curvenzügen liegen, combinirt werden. Diesen Correspondenzarten gemäss kann eine Curve 3ter Ordn. nach Schröter*) auf dreierlei Weisen durch zwei involutorische Strahlsysteme erzeugt werden, die in halb perspectivischer Lage projectivisch auf einander bezogen und deren Mittelpunkte in in einem Paare correspondirender Punkte der Curve gelegen sind. In einem solchen Strahlsysteme gehören eben diejenigen beiden Linien zusammen, von denen die eine die Curve in 2 Punkten schneidet, die den beiden Schnittpunkten der anderen in der nämlichen Art bezüglich correspondiren. Die Doppelstrahlen dieser drei Involutionen liefern die drei Cayley'schen Curven 3ter Classe, welche der C_3, aufgefasst als Hesse'sche**), zugeordnet sind. Jeder dieser Doppelstrahlen schneidet die Curve in zwei einander correspondirenden Punkten und es soll zunächst die Realität dieser Schnittpunkte und damit die Art der Involutionen ermittelt werden.

Zieht man von einem Punkte mit dem Parameter u_1 die Strahlen, deren jeder die Curve in 2 correspondirenden Punkten *erster Art* schneidet, so ist, wenn u_2 das Argument des auf einem solchen Strahle gelegenen Schnittpunktes sein soll, erforderlich, dass

$$u_1 + u_2 + u_2 + \frac{\omega}{2} \equiv 0 ,$$

also

$$u_2 = -\frac{u_1}{2} - \frac{\omega}{4} + \frac{m\omega + n\omega' i}{2}$$

(m und n beliebige ganze Zahlen).

Aus dieser Gleichung ergeben sich 4 Punkte, die paarweise auf den beiden von u ausgehenden Doppelstrahlen gelegen sind, und deren Parameterwerthe die Form haben:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\ -\frac{u_1}{2} + \frac{\omega}{4}, && -\frac{u_1}{2} + \frac{3\omega}{4};\\ &\text{b)}\ -\frac{u_1}{2} + \frac{\omega}{4} + \frac{\omega' i}{2}, && -\frac{u_1}{2} + \frac{3\omega}{4} + \frac{\omega' i}{2}. \end{aligned}$$

Ist u_1 ein Punkt des *unpaaren* Zuges, so sind diese 4 Punkte *reell*;

*) Math. Annalen Bd. V, p. 50. Siehe auch Durège, ebendas. p. 83.

**) Mit dieser Bezeichnung ist die Eigenschaft gemeint, dass die correspondirenden Punktepaare jeder unter den drei Arten als zusammengehörige Polaren in Bezug auf je eine Fundamentalcurve aufgefasst werden können. In einem solchen Paare ist der eine Punkt der Doppelpunkt desjenigen zerfallenen Polarkegelschnittes, welcher dem anderen in Bezug auf die zugehörige Fundamentalcurve angehört. Salmon a. a. O. p. 186.

für einen Punkt des *paaren* Zuges sind sie *imaginär*; es lässt sich mithin der Satz formuliren:

Bei der Correspondenz erster Art ist die Involution in den Punkten des unpaaren Zuges hyperbolisch, in allen Punkten des paaren Zuges elliptisch.

Für die Correspondenz *zweiter Art* sind die Durchschnittspunkte der beiden Doppelelemente der Gleichung

$$u_1 + u_2 + u_2 + \frac{\omega' i}{2} \equiv 0$$

zu entnehmen, woraus sich die Argumente der gesuchten, zu je zwei auf einer der Geraden liegenden Punkte darstellen:

$$(3)\quad \begin{array}{ll} \text{a)} & -\frac{u_1}{2} + \frac{\omega' i}{4}, \qquad -\frac{u_1}{2} + \frac{3\omega' i}{4}; \\ \text{b)} & -\frac{u_1}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega' i}{4}, \quad -\frac{u_1}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{3\omega' i}{4}. \end{array}$$

Damit ist der Satz geliefert:

Bei der Correspondenz zweiter Art ist die Involution in Punkten des unpaaren wie des paaren Zuges hyperbolisch; die Doppelelemente des unpaaren Zuges schneiden jedoch die Curve in conjugirt imaginären Punkten.

Für die Correspondenz *dritter Art* erhält man als Argumente der 4 gesuchten Punkte:

$$(4)\quad \begin{array}{ll} \text{a)} & -\frac{u_1}{2} + \frac{\omega}{4} + \frac{\omega' i}{4}, \quad -\frac{u_1}{2} + \frac{3\omega}{4} + \frac{3\omega' i}{4}; \\ \text{b)} & -\frac{u_1}{2} + \frac{\omega}{4} + \frac{3\omega' i}{4}, \quad -\frac{u_1}{2} + \frac{3\omega}{4} + \frac{\omega' i}{4}. \end{array}$$

Für Correspondenz dritter Art ist also die Involution in Punkten des unpaaren Zuges elliptisch, in Punkten des paaren Zuges hyperbolisch.

Betreffs der *eintheiligen* Curven, auf deren Darstellung durch Parameterwerthe im Nachfolgenden noch besonders eingegangen werden soll, lässt sich hinsichtlich der involutorischen Systeme jetzt schon Folgendes aussagen. Es findet auf denselben nur die Correspondenz 1ter Art derart statt, dass reelle Punkte mit reellen combinirt werden, da zwei der vier von einem Punkte ausgehenden Tangenten imaginär sind. Von den Doppelelementen dieser Involutionen schneidet der eine Strahl die Curve in zwei reellen Punkten, mithin ist der andere Strahl ebenfalls reell, doch führt derselbe zu imaginären, und also conjugirt imaginären Punkten.

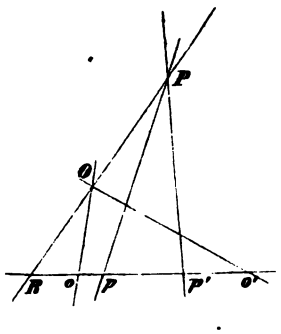
Aus dieser Unterscheidung der Arten von Involutionen geht ein Criterium für die Beurtheilung darüber hervor, ob eine durch 3 Paare correspondirender Punkte gegebene Curve ein Oval besitzt oder nicht, und welchem der beiden Züge jeder dieser Punkte, sowie jeder andere

aus ihnen construirte angehört. Sind die projectivisch auf einander bezogenen involutorischen Strahlsysteme, die durch die Verbindungslinien eines Punktepaares mit den beiden anderen festgelegt werden, beide elliptisch, so liegen ihre Mittelpunkte auf dem paaren Zuge der Curve, die also zweitheilig ist. Ist ferner die eine Involution elliptisch, die andere hyperbolisch, so wird die Curve gleichfalls zweitheilig und zwar ist der Mittelpunkt des elliptischen Systemes auf dem unpaaren, der andere auf dem paaren Zuge gelegen. Nur in dem Falle, dass beide Involutionen hyperbolisch sind, kann Correspondenz erster Art für eine ein- oder zweitheilige Curve, oder auch Correspondenz zweiter Art vorliegen.

Die Entscheidung über diese drei Möglichkeiten hängt davon ab, ob entweder auf den Doppelelementen der einen Involution conjugirt imaginäre Punkte liegen (Corresp. 2ter Art), oder aber ob je eines der Doppelelemente beider Involutionen ein conjugirt imaginäres Paar enthält. (Corresp. 1ter Art einer eintheiligen C); im Falle, dass sämmtliche auf den 4 Doppelstrahlen gelegenen Punkte reell sind, liegt die Correspondenz 1ter Art für eine zweitheilige Curve vor.

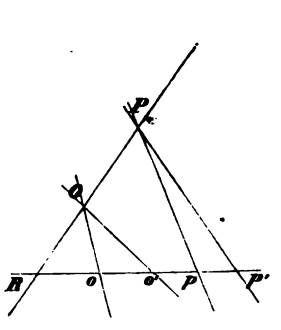
Bezeichnet man die Gerade, welche nach der Schröter'schen Bestimmungsweise*) die eindeutige Beziehung der beiden Strahlsysteme aus den Mittelpunkten O und P vermittelt, mit Λ, den Schnittpunkt

Fig. 3a.



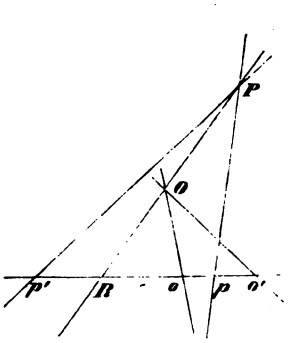
Corresp. zweiter Art.

Fig. 3b.



Corresp. erster Art (mit Oval).

Fig. 3c.



Corresp. erster Art (ohne Oval).

der Doppelelemente aus O mit dieser Geraden durch o und o', die entsprechenden Punkte von P aus mit p und p', ferner den Durchschnittspunkt der Geraden OP mit Λ durch R, so findet die Correspondenz 2ter Art statt, wenn man von R beginnend die Punkte in der Reihenfolge $opp'o'$ durchläuft; der Punkt P liegt alsdann auf dem unpaaren Zuge. Der Reihenfolge $oo'pp'$ gehört die Correspondenz 1ter Art einer

*) A. a. O. p. 64.

Curve mit Oval, der Reihe $opo'p'$ die nämliche Correspondenz einer Curve ohne Oval an.

Die reciproke Beziehung, die zwischen einer Hesse'schen Curve und den Cayley'schen besteht, ist, wie bekannt, dadurch vermittelt, dass die Doppelelemente der in den Punkten der Hesse'schen Curve construirten involutorischen Strahlsysteme correspondirende Tangenten der Cayley'schen Curve, und umgekehrt die Doppelelemente der auf einer Cayley'schen Tangente gelegenen involutorischen Punktreihen correspondirende Punkte der Hesse'schen Curve sind.

Betrachtet man also auf den Tangenten der Cayley'schen Curve zunächst die Correspondenz 1ter Art, so erhält man auf einer Tangente des dreispitzigen Zuges zwei reelle, auf einer Tangente des ovalen Zuges zwei imaginäre Punkte der Hesse'schen Curve. Von den beiden reellen Punkten liegt der eine, da zufolge der obigen Parameterbestimmung zwei reelle Tangenten an den dreispitzigen Zug von ihm ausgehen, innerhalb dieses Zuges, der andere aus dem analogen Grunde ausserhalb des Ovales. Auf jeder der Tangenten, welche von diesem letzteren Punkte ausgehen, sind jedoch, da sie Tangenten an das Oval sind, zwei weitere imaginäre Punkte der Hesse'schen Curve gelegen; mithin sind die erhaltenen Punktepaare correspondirende Punkte der 2ten Art auf der C_3. In gleicher Weise sind die Untersuchungen für die Correspondenz 2ter und 3ter Art bei einer zweitheiligen Classencurve durchzuführen; dieselben bieten keine Schwierigkeit und leiten zu folgenden Resultaten:

1. *Correspondenz erster Art* auf einer Curve 3ter Classe führt zu einer *zweitheiligen Hesse'schen Curve*, deren paarer Zug innerhalb des dreispitzigen Zuges gelegen ist; der Rückgang erfolgt vermittelst *Correspondenz zweiter Art.* Die Doppelelemente des paaren Zuges umhüllen den dreispitzigen, die des unpaaren den ovalen Theil. Die drei reellen Berührungspunkte beider Curven gehören dem dreispitzigen und dem paaren Zuge an. Ist also der dreispitzige Zug der Cayley'schen Curve im Endlichen geschlossen, so gilt das Gleiche für den paaren Zug dieser einen zugehörigen Hesse'schen Curve.
2. *Correspondenz zweiter Art* führt zu einer *zweitheiligen Hesse'schen Curve*, deren paarer Zug zwischen dem dreispitzigen und dem ovalen Theile gelegen ist; der Rückgang erfolgt vermittelst *Correspondenz erster Art.* Diejenigen Doppelelemente, welche, von Punkten des unpaaren Zuges ausgehend, nach correspondirenden Punkten auf dem paaren Zuge gezogen werden, umhüllen den dreispitzigen, die anderen den ovalen Theil. Die drei reellen Berührungspunkte der beiden Curven gehören dem ovalen und dem unpaaren Zuge an; ist also das Oval der Cayley'schen

Curve im Endlichen geschlossen, so besitzt der unpaare Zug dieser Hesse'schen Curve drei reelle Asymptoten.

3. *Correspondenz dritter Art* führt zu einer *eintheiligen Hesse'schen Curve;* der Rückgang von dieser erfolgt durch *Correspondenz erster Art.* Diejenigen Doppelelemente, welche conjugirt imaginäre Punkte enthalten, umhüllen den dreispitzigen, die anderen den ovalen Theil. Betreffs der Berührungspunkte und der Realität der Asymptoten gilt dasselbe wie im Satz 2.

Für eine Cayley'sche Curve *ohne Oval* erhält man schliesslich durch reciproke Uebertragung des letzten Satzes:

4. Bei einer Cayley'schen Curve *ohne Oval* führt die *Correspondenz erster Art* zu einer *zweitheiligen* Hesse'schen Curve; der Rückgang von dieser erfolgt durch *Correspondenz dritter Art.* Betreffs der Berührungspunkte gilt dasselbe wie sub 1*).

Auf diese Weise ist eine bemerkenswerthe Umkehrbarkeit der Beziehungen zwischen den Correspondenzen 1ter und 2ter Art und ebenso 1ter und 3ter Art ausgesprochen, während für die 2te und 3te Art ein analoges Verhalten nicht stattfindet. Zugleich schliesst sich an diese Betrachtungen eine einfache Uebersicht über die Lage der Polygone, welche einer Hesse'schen Curve eingeschrieben und einer der drei Cayley'schen umgeschrieben sind**). Zu einer gegebenen zweitheiligen C_3 giebt es 3 reelle Arten solcher Polygone. Bei der einen Art liegen die Ecken auf dem unpaaren Zuge und umhüllen das Oval der einen Cayley'schen Curve. Die Polygone der 2ten und 3ten Art sind dem paaren Zuge der C_3 eingeschrieben, während die Seiten jedesmal den dreispitzigen Zug der zweiten oder dritten Cayley'schen Curve tangiren.

---

*) Die hinsichtlich der Realität der Asymptoten beider Curven überhaupt möglichen Fälle werden vermittelst der Schnitte einer beliebigen Geraden aus den hier mitgetheilten vier Lagenbeziehungen vollständig übersehen.

**) Man erhält, wenn ν die Eckenzahl des Polygones bedeutet, als Anzahl der Lösungen immer eine endliche Zahl, und zwar ist die Anzahl der *reellen* Polygone jeder Art: $\frac{2^\nu - (-1)^\nu - 3}{\nu}$ wobei bereits die drei reellen Wendepunkte, die als uneigentliche Lösung überall auftreten, in Abzug gebracht sind. Ist ν keine Primzahl, so ist von dieser Zahl noch die Anzahl aller der reellen Polygone, deren Eckenzahl ν' ein Theiler von ν ist, dividirt durch μ zu subtrahiren, wenn $\mu\nu' = \nu$. Für die rationalen C_3 ist dieses Problem in allgemeiner algebraischer Behandlung durchgeführt von Rosenow: „Die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt". 1873.

§ 3.

Die geometrisch einfachste quadratische Transformation des elliptischen Integrales und die Modulargleichungen der Hesse'schen und Cayley'schen Curve.

Die abgeleiteten Sätze über die Arten des Ueberganges von der Cayley'schen zur Hesse'schen Curve und umgekehrt ergeben sich in gleicher Weise, wenn beide Curven durch Parameter dargestellt und diese in Beziehung zu einander gesetzt werden.

Auf einem Doppelstrahle der Hesse'schen Curve, welcher durch die Correspondenz erster Art geliefert wird, liegen, wie oben gezeigt wurde, zwei Punkte mit den Argumenten:

$$-\frac{u_1}{2}+\frac{\omega}{4} \text{ und } -\frac{u_1}{2}+\frac{3\omega}{4}.$$

Giebt man dieser Linie, als der Tangente einer Curve 3. Classe den Parameterwerth $-\frac{u_1}{2}+\frac{\omega}{4}$, betrachtet also $\frac{\omega}{2}$ bereits als eine Periode dieser Classencurve, so nehmen diese Doppelstrahlen, indem u alle Werthe von 0 bis ω, oder was dasselbe ist von $-\frac{\omega}{2}$ bis $+\frac{\omega}{2}$ durchläuft, in der That nur die Werthe von 0 bis $\frac{\omega}{2}$ an. Die correspondirende Tangente aus dem nämlichen Punkte u erhält den Werth:

$$-\frac{u_1}{2}+\frac{\omega}{4}+\frac{\omega' i}{2} \text{ oder } -\frac{u_1}{2}+\frac{3\omega}{4}+\frac{\omega' i}{2}$$

unterscheidet sich demnach von der vorigen um $\frac{\omega' i}{2}$ und es wird daraus ersichtlich, dass die *Werthe* $\frac{\omega}{2}$ *und* $\omega' i$ *als Perioden der Cayley'schen Curve* gewählt werden dürfen. Auf gleiche Weise erkennt man, *dass die Perioden der zweiten Cayley'schen Curve durch* ω *und* $\frac{\omega' i}{2}$, *die der dritten durch* ω *und* $\frac{\omega+\omega' i}{2}$ dargestellt werden können. Dabei ist in diesem letzten Falle ω als diejenige Periode zu betrachten, welche auf dem allein reell vorhandenen dreispitzigen Zuge zur Vertheilung gelangt. Aus diesen Relationen ist aber evident, dass durch den Uebergang von der Hesse'schen zur Cayley'schen Curve die 3 Classen der „*quadratischen Transformation*" des längs der Hesse'schen Curve hin erstreckten elliptischen Integrales gewonnen sind; denn nach der von Königsberger*) gebrauchten Bezeichnung sind die Repräsentanten

*) Königsberger: Die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen, 1868, p. 59. Für die durch Correspondenz

der drei nicht äquivalenten Classen einer solchen Transformation durch die Schemata:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

charakterisirt.

Allgemein algebraisch lässt sich dieses Resultat, indem man die bekannten Darstellungen der Cayley'schen Curve benutzt*), so formuliren:

Ist $f(x_1 x_2 x_3) = a_x^3 = 0$ *die Gleichung einer Curve dritter Ordnung, so sind die 3 Arten der quadratischen Transformation des längs der Curve erstreckten Integrales dadurch gegeben, dass man von* $f = 0$ *zu den Curven:*

$$\varphi \equiv \mathsf{P} S_1 - \Pi S_2 = 0$$

übergeht, wenn in den Formen S_1 *und* S_2 $\frac{\varkappa}{\lambda}$ *eine Wurzel der cubischen Gleichung* $G_1 = \varkappa^3 - \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 - \frac{T}{3}\lambda^3 = 0$ *bedeutet.*

Der dualistisch entgegenstehende Uebergang von einer Classencurve zu drei Ordnungscurven ist durch die Gleichungen $\Pi(u_1 u_2 u_3) = 0$ *und* $\varphi = \Delta G_1 - f G_2$ *unter der Bedingung* $S_1 = S\varkappa^3 + 3T\varkappa^2\lambda + \frac{1}{2}S^2\varkappa\lambda^2 + \frac{1}{6}ST\lambda^3 = 0$ *dargestellt.*

Die Transformation selber von der Hesse'schen zur Cayley'schen Curve ist durch die Hauptcoincidenz des Connexes $\Theta = (abu)^2 a_x b_x$ vermittelt, wobei a und b Symbole der Grundcurve bedeuten. Denn durch die Hauptcoincidenz entspricht jedem Punkte von Δ die Verbindungslinie mit seinem correspondirenden doppelt gezählt, jeder Tangente von Σ die beiden auf ihr liegenden correspondirenden Punkte von Δ. Die Zuordnung zwischen den Elementen beider Curven ist also eine ein-zweideutige. Umgekehrt lässt sich Σ auf die Curve 3. Ordnung zwei-eindeutig beziehen, wenn jedem Punkt x die beiden Linien des ihm durch die Gleichung $a_x u_y^2 = 0$ zugeordneten zerfallenen Polarkegelschnittes, jeder Geraden u der Mittelpunkt des im Connexe Θ ihr angehörigen Linienpaares entsprechend gesetzt wird**).

---

dritter Art gelieferte Periodenbeziehung ergiebt sich zunächst das Schema $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, welches jedoch durch Multiplication mit $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ auf die obige Form gebracht wird.

*) Die Bezeichnungen sind die von Clebsch und Gordan im VI. Bd. der Mathem. Annalen gewählten.

**) Die hinsichtlich der Transformationsgleichungen einfachsten drei Typen hat Gundelfinger aufgestellt: „Quadratische Transformation des elliptischen Differentiales", Math. Annalen, Bd. VII. p. 449. Die zusammengehörigen Elemente (Punkt und Linie) der einzweideutig zugeordneten Curven treten daselbst als Polaren in Bezug auf eine Curve dritter Classe auf, deren Bestimmung innerhalb

Die Modulargleichungen, welche zwischen der C_3 und den K_3 bestehen, lauten zu Folge dessen in kanonischer Form: Ist c^2 der Modul der ursprünglichen, k_1^2, k_2^2, k_3^2 die Moduln der drei durch die Transformation erhaltenen Curven, so ist

$$(1) \quad k_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad k_2 = \frac{1-\sqrt{1-c^2}}{1+\sqrt{1-c^2}}, \quad k_3 = \frac{2\sqrt{cc'i}}{c+c'i} \qquad (c^2+c'^2=1).$$

Diese Formeln, welche direct aus der quadratischen Transformation des elliptischen Differentiales sich ergeben, können geometrisch aus der Schröter'schen Construction in einfacher Weise abgeleitet werden. Kurz gefasst stellt sich dieselbe folgendermassen dar. Bezeichnen wie oben O und P die Mittelpunkte der beiden projectivisch auf einander bezogenen involutorischen Strahlsysteme, o, o' und p, p' die Durchschnittspunkte der beiden Doppelelementenpaare mit der Geraden Λ, r den Durchschnitt dieser Geraden mit der Linie OP, so werden die Punkte der Curve so construirt, dass ein Punkt x auf der Geraden Λ laufend gedacht und jedesmal in O das Strahlenpaar bestimmt wird, welches zu den Strahlen $O(o, o')$ und $O(r, x)$ harmonisch liegt. Dieses wird alsdann mit dem Strahlenpaare, harmonisch zu $P(p, p')$ und $P(r, x)$ zum Durchschnitte gebracht. Dabei ist ersichtlich, dass die Linie Λ eben eine Tangente der Cayley'schen Curve ist, und dass die Punkte o, o', p, p' die 4 Punkte bedeuten, in denen diese Tangente die K_3 ausser in ihrem Berührungspunkte noch schneidet. Um also die Modulargleichung zwischen den beiden Curven zu entwickeln, ist das Doppelverhältniss der vier von O ausgehenden Tangenten — es werde mit $(t_1 t_2 t_3 t_4) = \frac{t_1 t_2 \cdot t_3 t_4}{t_1 t_4 \cdot t_3 t_2}$ bezeichnet — zu dem Doppelverhältniss $(o\,o'\,p\,p')$ in Beziehung zu setzen.

---

des Büschels $\varkappa\Pi + \lambda P$ ebenfalls von der cubischen Gleichung $G_4 = 0$ abhängt. — Eine entwickelte Darstellung der oben im Texte gegebenen Transformation erhält man in geeigneter Form, wenn die Coordinaten des Linienpaares $a_x a_y^2 = u_y v_y$, gebildet für einen Punkt x der Hesse'schen Curve in Bezug auf die Fundamentalcurve $f = a_x^3 = 0$ bestimmt werden. Es ergiebt sich daraus das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\varrho u_1 &= \Sigma \gamma_i f_{1i} + \gamma_2\sqrt{f_{12}^2 - f_{11}f_{22}} - \gamma_3\sqrt{f_{13}^2 - f_{11}f_{33}} \\
\varrho u_2 &= \Sigma \gamma_i f_{2i} + \gamma_3\sqrt{f_{23}^2 - f_{22}f_{33}} - \gamma_1\sqrt{f_{21}^2 - f_{22}f_{11}} \qquad (i = 1, 2, 3) \\
\varrho u_3 &= \Sigma \gamma_i f_{3i} + \gamma_1\sqrt{f_{31}^2 - f_{33}f_{11}} - \gamma_2\sqrt{f_{32}^2 - f_{33}f_{22}}
\end{aligned}$$

in denen die Grössen γ willkührliche Constanten bedeuten, während für sämmtliche Quadratwurzeln gleichzeitig entweder das positive oder das negative Vorzeichen gewählt werden kann. Auf diese Weise sind zu jedem Punkte x die zugehörigen Werthe u und v bestimmt, und die Substitution dieser Gleichungen in die Cayley'sche Curve liefert das Quadrat der Hesse'schen. Die reciproke Umkehr, durch welche letztere zwei-eindeutig auf die erstere bezogen ist, gewinnt man dadurch, dass in diesen Gleichungen u mit x vertauscht und für f die conjugirte Form Π eingeführt wird.

Die Tangenten von O werden dadurch erhalten, dass der Punkt x in die Punkte p und p' hineinrückt. Es bestehen also die Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} (r\,t_1\,p\,t_2) &= -1\,, \qquad (r\,t_3\,p'\,t_4) = -1\,,\\ (o\,t_1\,o'\,t_2) &= -1\,, \qquad (o\,t_3\,o'\,t_4) = -1\,. \end{aligned}$$

Wählt man die Punkte o und o' zu Anfangspunkten, r zum Einheitspunkt eines Coordinatensystems auf der Linie Λ, ertheilt ihnen also die Gleichungen:

$$(3)\qquad o = (x_1 = 0)\,, \qquad o' = (x_2 = 0)\,, \qquad r = (x_1 - x_2 = 0)\,,$$

so mögen die Punkte p und p' die Gleichungen erhalten:

$$(4)\qquad x_1 - p x_2 = 0\,, \qquad x_1 - p' x_2 = 0\,,$$

wobei jetzt p und p' nur bestimmte Zahlen vorstellen. Ebenso seien die Durchschnittspunkte der 4 Tangenten auf Λ gegeben durch

$$(5)\qquad x_1 - t_1 x_2 = 0,\ x_1 - t_2 x_2 = 0,\ x_1 - t_3 x_2 = 0,\ x_1 - t_4 x_2 = 0,$$

alsdann gelten nach den Gleichungen (2) die Bedingungen:

$$(6)\qquad \begin{gathered} t_1 = -t_2 \qquad t_3 = -t_4\\ t_1 = \sqrt{p},\ t_2 = -\sqrt{p},\ t_3 = \sqrt{p'},\ t_4 = -\sqrt{p'}\,. \end{gathered}$$

Bildet man nun das Doppelverhältniss:

$$(t_1 t_2 t_3 t_4) = \left|\frac{\sqrt{p}-\sqrt{p'}}{\sqrt{p}+\sqrt{p'}}\right|^2 \text{ und setzt } (opo'p') = \frac{p}{p'} = k^2,$$

so ist:

$$(7)\qquad (t_1 t_2 t_3 t_4) = c^2 = \left|\frac{1-k}{1+k}\right|^2 \text{ oder } k = \frac{1-c}{1+c}\,*).$$

Die Doppelverhältnisse der beiden anderen Cayley'schen Curven ergeben sich, wenn für c die conjugirten Werthe $\sqrt{1-c^2}$ und $\frac{\sqrt{c^2-1}}{c}$ eingesetzt werden; übereinstimmend mit der oben Gleich. 1 getroffenen Anordnung sind also entsprechend der Correspondenz 1. 2. und 3. für die Werthe gewonnen:

$$(8)\qquad k_1 = \frac{1-\sqrt{1-c^2}}{1+\sqrt{1-c^2}}, \quad k_2 = \frac{c-\sqrt{c^2-1}}{c+\sqrt{c^2-1}}, \quad k_3 = \frac{c-\sqrt{c^2-1}}{c+\sqrt{c^2-1}}, \qquad k_1 k_2 = 1\,.$$

Die Werthe für k_1, k_2, k_3 sind so geschrieben, dass, wenn man c durchläuft, durch das zugehörige k ersetzt, diese Aenderung der k ei-

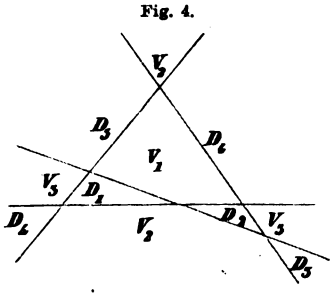
*) Die Formeln für die Constante des Doppelverhältnisses der von einem Punkte der Curve ausgehenden Tangenten folgt man dieser Construction aus dem Nachweise, dass dieselbe in den beiden correspondirenden Punkten p und p' gleich ist, und dass sie ferner dieselbe ist in dem Punkte x, welcher mit r correspondirt. Durch diesen Vorgang auf der Curve von einem Punkte mit dem Parameterwerth c zu dem Punkte mit dem Parameterwerth $\frac{1}{c}$ gelangt man zu allen Punkten derselben.

schritt von der Cayley'schen zur Hesse'schen Curve durch Correspondenz derselben Art bedeutet. Die Eigenschaft der sogenannten „Landen'schen Transformation" findet demnach ihren geometrischen Ausdruck für das syzygetische Büschel in dem Satze:

Geht man von einer Curve dritter Ordnung mit Oval durch Correspondenz erster oder zweiter Art zu einer Curve dritter Classe über, von dieser durch die nämliche Correspondenz weiter, so convergirt dieser Process nach einem der Wendepunktsdreiseite.

Dieser Process lässt sich nach den im § 2 gefundenen Sätzen noch näher in seinem Verlaufe verfolgen. Das einem syzygetischen Büschel zu Grunde liegende reelle Wendepunktsdreiseit ($x_1 x_2 x_3 = 0$) theilt in Verbindung mit derjenigen Linie, auf welcher die drei reellen Wendepunkte gelegen sind ($x_1 + x_2 + x_3 = 0$), die gesammte Ebene in drei Vierecke und vier Dreiecke ein. Der Durchschnittspunkt der drei reellen harmonischen Polaren, welcher als Einheitspunkt, zugeordnet der Linie $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ construirt wird, liegt alsdann in demjenigen Dreiecke (es werde mit D_4 bezeichnet), für welches die Einheitslinie keine Seite bildet und das Oval aller zweitheiligen Curven des Büschels muss also innerhalb dieses Dreieckes, den Einheitspunkt umschliessend, gelegen sein. Indem man nun die Curven des Büschels $a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6bx_1x_2x_3 = 0$ als continuirlich aus dem Durchschnitt der beiden genannten Tripel entstanden denkt, folgt für die Gestalt und Lage derselben der Satz: *Alle zweitheiligen Curven verlaufen in den vier Dreiecken, alle eintheiligen in den drei Vierecken.* Denn es ist zunächst evident, dass ein Curvenzug niemals aus einem der Dreiecke in eines der Vierecke oder umgekehrt gelangen kann, und es ist ferner ersichtlich, dass jeder unpaare Zug einer zweitheiligen Curve, bei Verzerrung des Ovales in die Seiten des Dreieckes D_4, gleichzeitig in die noch fehlenden Strecken auf den Linien $x_1x_2x_3$ übergehen muss, mithin wie behauptet wurde nur in den drei Dreiecken gelegen sein kann.

Fig. 4.



Denkt man sich nun auf eine zweitheilige Curve, deren paarer Zug als ganz im Endlichen gelegen vorausgesetzt werden möge, den durch Correspondenz 1ter Art vermittelten Process angewandt, so liegt der dreispitzige Zug der auf diese Weise gewonnenen K_3 innerhalb des paaren Zuges, und es convergiren, indem man durch die nämliche Correspondenz weiter fortschreitet, sämmtliche paare und sämmtliche dreispitzige Züge immer mehr gegen den Einheitspunkt. Umgekehrt

liefert die Correspondenz 2^{ter} Art Curvenzüge, die immer weiter um den Einheitspunkt sich lagern und schliesslich mit den Seiten des Dreiecken D_4 zusammenfallen. Den oben gefundenen Satz können wir demgemäss noch präciser dahin formuliren:

Geht man von einer zweitheiligen Curve durch Correspondenz 1^{ter} Art oder durch Correspondenz 2^{ter} Art zu einer Curve 3^{ter} Classe über, von dieser immer durch die nämliche Correspondenz weiter, so convergirt in der Gleichung des syzygetischen Büschels

$$a(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+6\,bx_1x_2x_3=0$$

im ersten Falle der Coefficient b, im zweiten Falle der Coefficient a gegen 0.

§ 4.

Die Darstellung der eintheiligen Curven dritten Grades durch die Werthe eines Parameters.

Das im vorigen Paragraphen über den Zusammenhang der Hesse'schen und Cayley'schen Curven erhaltene Resultat ist von weiterem Interesse für die Periodenvertheilung auf Curven, deren Modul *complex mit dem absoluten Betrage gleich 1* ist. Denn die durch Correspondenz 3^{ter} Art aus einer zweitheiligen Curve abgeleitete ist *eintheilig*, und da die Perioden derselben von der Form ω und $\frac{\omega+\omega' i}{2}$ sind, wobei ω die auf den reellen Punkten vertheilten Argumente liefert, so lässt sich aus der eindeutigen Beziehung aller elliptischen Curven mit gleichem Modul der Satz folgern:

Die elliptischen Curven mit complexem Modulo, deren absoluter Betrag gleich 1 ist, besitzen, falls sie überhaupt reell sind, nur einen reellen Zug. Auf demselben können die Werthe einer reellen Periode ω vertheilt werden, während alsdann die zweite Periode bei ihnen complex von der Form $\frac{\omega+\omega' i}{2}$ ist.

Auch hierbei ist jedoch selbstverständlich die Möglichkeit einzelner isolirter Punkte nicht nur nicht ausgeschlossen, sondern auch leicht nachweisbar.

Betrachtet man auf der K_3 eine reelle Tangente, die den Parameterwerth u hat, so ist auf demselben Curvenzuge eine zweite Tangente mit dem Werthe $u+\frac{\omega}{2}$ gelegen, wofür zu Folge der zweiten Periode auch $u+\frac{\omega' i}{2}$ gesetzt werden kann. Wird diese Tangente, der sowohl der Werth $u+\frac{\omega}{2}$ als $u+\frac{\omega' i}{2}$ zukommt, den beiden Punkten auf der Hesse'schen Curve mit denselben Parameterwerthen zugeordnet, so ist dadurch die ein-zweideutige Beziehung zwischen den Punkten der

C_3 und den Tangenten der K_3 festgelegt. Dreien auf einer Geraden liegenden reellen Punkten sind im Allgemeinen drei durch einen Punkt gehende reelle Tangenten angehörig und es entsprechen also auf diese Weise den reellen Geraden der Ebene reelle Punkte. Es müssen also auch denjenigen reellen Geraden, welche conjugirt imaginäre Punkte der C_3 enthalten, reelle Punkte, von denen conjugirt imaginäre Tangenten an die K_3 ausgehen, zugeordnet sein. Durch diese Beziehung der doppelt periodischen Function mit complexem Modul auf eine eben solche mit reellem Modul ist dann die Frage nach den Parameterwerthen conjugirt imaginärer Elemente gelöst. Liefert der Werth von 0 bis ω die reellen Elemente der Curve, so erhalten die imaginären im Allgemeinen complexe Werthe, zusammengesetzt aus $\frac{\omega}{a} + \frac{\omega' i}{a}$, *conjugirt imaginäre* Punkte besitzen auch conjugirt imaginäre Argumente, sofern dieses nicht durch Hinzufügung der complexen Periode verdeckt ist. — Eine Bestätigung des hiermit gefundenen Resultates ist durch die Betrachtung der correspondirenden Punkte gegeben, die auf *einem* der Doppelstrahlen der für eine eintheilige Curve bestehenden *Correspondenz 1ter Art* liegen, und von denen früher (§ 2.) nachgewiesen wurde, dass sie conjugirt imaginär sein müssen. Die Parameterwerthe derselben sind nach der dort gegebenen Gleichung zu bilden aus:

$$u_1 + u_2 + u_2 + \frac{\omega}{2} = 0 \left(\text{mod. } \omega \text{ und } \frac{\omega + \omega' i}{2}\right)$$

und werden demnach:

$$-\frac{u_1}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega' i}{4} \text{ und } -\frac{u}{2} + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega' i}{4},$$

was mit dem allgemeinen Resultate übereinstimmt. Der obigen kanonischen Form entsprechend (Gleich. 1, § 1.) setzen wir hier die Curvengleichung:

$$(1) \qquad x_1 x_3^2 - x_2\left(x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2 + (\alpha^2 + \beta^2) x_1^2\right) = 0.$$

$x_1 = 0$ ist die Wendetangente, $x_2 = 0$ die reelle vom Wendepunkte ausgehende Tangente, $x_3 = 0$ die harmonischen Polare. Zerlegt man den quadratischen Ausdruck in seine beiden linearen Factoren, so folgt:

$$(2) \qquad x_1 x_3^2 - x_2\left(x_2 - (\alpha + \beta i) x_1\right)\left(x_2 - (\alpha - \beta i) x_1\right) = 0,$$

oder indem für x_1 der Werth $\frac{x_1}{\alpha + \beta i}$ substituirt wird:

$$(3) \qquad \frac{x_1 x_3^2}{\alpha + \beta i} - x_2\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 - \frac{\alpha - \beta i}{\alpha + \beta i} x_1\right) = 0.$$

Daraus ergeben sich gemäss der früheren Parameterdarstellung, wenn $\frac{\alpha - \beta i}{\alpha + \beta i} = k^2$ gesetzt wird, die Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \varrho x_1 &= S(\overline{u,k})^3 \\ \varrho x_2 &= S(u,k) \\ \varrho x_3 &= (\alpha+\beta i)^{\frac{1}{2}}\, C(u,k)\, D(u,k), \end{aligned}$$

wobei über das Vorzeichen der Quadratwurzel eine beliebige Festsetzung zu treffen ist. Nennt man die beiden Perioden des Integrales mit dem Modul k^2 2ω und $\omega + \omega' i$, so bestehen also, wenn ω die längs des reellen Zuges vertheilte Periode darstellt, die Identitäten:

$$S\left(\overline{u+\tfrac{\omega}{2}}\right)^2 = S\left(\overline{u+\tfrac{\omega' i}{2}}\right)^2,$$

$$\frac{C\left(u+\frac{\omega}{2}\right)D\left(u+\frac{\omega}{2}\right)}{S\left(u+\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{C\left(u+\frac{\omega' i}{2}\right)D\left(u+\frac{\omega' i}{2}\right)}{S\left(u+\frac{\omega' i}{2}\right)}\ ^{*}).$$

Abschnitt II.

Einleitung.

Wie die Gesammtheit der *reellen* Curvenelemente durch diejenigen Parameter geliefert wird, deren imaginärer Theil gleich 0, oder im Falle der zweitheiligen Curven auch gleich dem halben Werthe der imaginären Periode ist, müssen sich gleichfalls die *imaginären* Elemente in Gruppen zusammenfassen lassen, so dass jedesmal der reelle oder der imaginäre Theil der den Punkten einer solchen Gruppe angehörigen Argumente einen bestimmten constanten Werth erhält. Wenn nun zunächst diese imaginären Gebiete eine unmittelbare geometrische Anschauung ihrer Gestalt und Lage nicht zulassen, so wird dieses dennoch vermittelst der Repräsentation derselben durch ihre reellen Träger geleistet. Durch die zweifach unendliche Anzahl dieser Träger entsteht eine Fläche, welche, wie Klein im oben genannten Aufsatze**) gezeigt hat, *als das vollständige Bild der durch die Curve definirten algebraischen Function zu betrachten ist*, und durch deren Einführung der Zusammenhang klar gelegt wird, welcher zwischen der einen Abbildung dieser Function auf einer mehrblättrigen *Riemann'schen*

*) Die Vermittelung zwischen den eintheiligen und zweitheiligen Curven wird gewissermassen durch die Curven mit *harmonischem Doppelverhältniss* geliefert, wie denn auch die Curven mit dem Modul $k^2 = +1$ als Specialfälle eintheiliger oder zweitheiliger Curven auftreten können. Diese Eigenschaft harmonischer Curven überträgt sich in gleicher Weise auf alle elliptischen. In den vorstehenden Formeln ist $\alpha = 0$ zu setzen, wenn die harmonische Curve *eintheilig*, in den früheren $k^2 = \frac{1}{2}$, falls sie *zweitheilig* ist.

**) Math. Annalen, Bd. VII. p. 558.

Fläche und der anderen durch die algebraischen Curven gebildeten Darstellung bestehen muss.

Die im Nachstehenden geführten Untersuchungen haben ihren Ausgangspunkt von der Betrachtung einer solchen Fläche genommen, wie sie durch eine *Curve dritter Classe* gebildet wird. Der Schwerpunkt aller hierher gehörigen Discussionen ruht dabei auf der Bestimmung der eingangs erwähnten Gruppenbildung imaginärer Elemente. Dieselbe liefert die sogenannten *Meridian- und Breitencurven*, die zugleich die einfachsten Formen der auf der Riemann'schen Fläche zu ziehenden Querschnitte begründen*). Und zwar habe ich die Discussion der anschaulicheren Uebersicht halber zuerst auf der durch eine *zweitheilige* Curve gebildeten Ringfläche geführt (§ 1. und § 2.) und nach Gewinnung aller wesentlichen Sätze diese auch für die *eintheiligen* Curven ausgesprochen (§ 4.). Durch die Darstellung der Breitencurven wird man indess (§ 3.) über die Ringfläche hinaus zu einem Systeme von Curven 6ter Ordnung geleitet, welches in bemerkenswerthen covarianten Relationen zu der gegebenen Classencurve steht. Aus der näheren Bestimmung der Eigenschaften dieses Systemes erwuchs die Darlegung der wechselseitig eindeutigen (§ 5.) und der mehrdeutigen (§ 6.) Verbindungen der Curvenelemente, unter denen die im vorigen Abschnitte untersuchten Correspondenzarten wesentliche specielle Fälle bilden. Schliesslich ergab sich die Integration der Hauptcoincidenzcurven für die Connexschaar $\varkappa Q^2 + \lambda \Theta^3 = 0$ als einfache Folgerung aus der allgemeinen linearen Beziehung zwischen den Parametern der Curvenelemente.

§ 1.

Die Gleichungen der Meridian- und Breitencurven.

Bei der zweitheiligen Curve dritter Classe, für welche, was ohne Einschränkung der Allgemeinheit gestattet ist, beide Züge als durchaus im Endlichen gelegen vorausgesetzt werden mögen, erfüllen die reellen Punkte der imaginären Tangenten den ringförmigen Raum zwischen

*) Für die zur Darstellung der doppelt periodischen Function gewöhnlich übliche Riemann'sche Fläche sind die entsprechenden Curvensysteme behandelt worden von Siebeck: „Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen", Borchardt Journal, Bd. 57 u. 59. Durch eine Abhandlung von Schwarz: „Ueber ebene algebraische Isothermen" (Ebendas. Bd. 77), ist der Nachweis erbracht, dass diese Problemstellung nur noch bei den doppelt periodischen Functionen mit reellem Modul oder mit einem complexen, dessen absoluter Betrag gleich *eins* ist, auf algebraische Systeme führt. Auf der durch eine allgemeine imaginäre Curve dritten Grades gebildeten Fläche, so wie auf denjenigen, welche Curven mit höherem Geschlechte angehören, gestalten sich demnach die analogen Gebilde transscendent.

den beiden Curvenzügen doppelt; denn von allen anderen Theilen der Ebene lassen sich drei reelle Tangenten an die Curve ziehen. Ertheilt man jedem reellen Punkte einer imaginären Tangente als bestimmendes Argument den Parameterwerth der beiden von ihm ausgehenden conjugirt complexen Tangenten, so erhält er gemäss der in Abschnitt I, § 1. gewonnenen Uebersicht zwei Argumente von der Form: $\frac{\omega}{a} \pm \frac{\omega' i}{a'}$.

Einer reellen Tangente wird übereinstimmend mit dieser Festsetzung der ihr angehörige reelle Berührungspunkt zugeordnet; mithin gewinnen die Argumente reeller Curvenpunkte, je nachdem sie Punkte des dreispitzigen oder des ovalen Zuges repräsentiren, die Form

$$u = \frac{\omega}{a}, \quad \text{oder } u = \frac{\omega}{a} + \frac{\omega' i}{2}.$$

Fixirt man nun einen auf der Ringfläche gelegenen Punkt: Ist u der Parameterwerth der *einen reellen* von ihm ausgehenden Tangente, $x+yi$ und $x-yi$ die Werthe der beiden conjugirt imaginären Tangentenlinien, so besteht unter diesen Grössen die Relation (Abschnitt I. § 1. Gleich. 6):

$$(1) \qquad u + (x+yi) + (x-yi) \equiv 0.$$

Das heisst x muss den Werthen $-\frac{u}{2}$ oder $-\frac{u}{2} + \frac{\omega}{2}$ gleichgesetzt werden. Die reellen Tangenten des dreispitzigen Zuges sind also innerhalb des ringförmigen Raumes diejenigen Curven, auf denen Punkte liegen, deren *reeller* Argumententheil constant ist. Für diese Curven werde die Bezeichnung: „Meridiancurven" festgehalten. Jede Tangente, deren Parameterwerth u ist, repräsentirt dann zwei Meridiancurven, entsprechend den beiden getrennten Theilen, die auf der Ringfläche gelegen sind.

Den Meridiancurven stehen diejenigen Curven gegenüber, deren Punkte sich durch den reellen Theil ihrer Argumente unterscheiden, während der imaginäre constant bleibt. Dieselben sollen mit dem Namen „Breitencurven" bezeichnet werden. Solche Curven sind die beiden reellen Züge der Curve 3ter Classe selber, da den auf ihnen gelegenen Punkten die Argumente u oder $u + \frac{\omega' i}{2}$ zukommen, wenn u alle reellen Werthe von 0 bis ω durchläuft. Des Weiteren ergiebt sich aus den früheren Betrachtungen eine neue Curve gleicher Eigenschaft. Fasst man nämlich die vorliegende Curve als Cayley'sche auf, so ist (Abschnitt I. § 2.) nachgewiesen worden, dass von dem Oval derjenigen Hesse'schen Curve, zu welcher man vermittelst der Correspondenz 2ter Art gelangt, conjugirt imaginäre Tangenten ausgehen, deren

Parameterwerthe von der Form $u + \frac{\omega' i}{4}$ und $u - \frac{\omega' i}{4}$ sind. Demnach lässt sich der Satz formuliren:

Das Oval der Hesse'schen Curve, welche durch Correspondenz 2ter Art aus der Cayley'schen construirt wird, ist für diese eine Breitencurve, auf der sämmtliche Punkte den constanten imaginären Theil $\frac{\omega' i}{4}$ besitzen.

Die Werthe $+\frac{\omega' i}{4}$ und $-\frac{\omega' i}{4}$ oder allgemein $+\frac{\omega' i}{a}$ und $-\frac{\omega' i}{a}$ gehören, wie nochmals hervorgehoben werden soll, der nämlichen Curve an, die nur auf der anderen Seite desselben Blattes oder auch auf einem zweiten Blatte beschrieben gedacht wird.

Um jedoch die Frage nach der Gestalt der Breitencurven vollständig zu beantworten, muss auf die Gleichungen näher eingegangen werden, welche die Coordinaten der Tangenten als doppelt periodische Functionen eines Parameters darstellen. Mit Beibehaltung des dem früheren entsprechenden Liniencoordinatensystemes lauten dieselben:

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= S(u + iv)^3 \\ \varrho u_2 &= S(u + iv) \\ \varrho u_3 &= C(u + iv) \cdot D(u + iv). \end{aligned} \tag{2}$$

Aus diesen Gleichungen hat man den Schnittpunkt zweier Tangenten mit den Argumenten $u + iv$, und $u - iv$ zu bestimmen und diejenigen Punkte zusammenzufassen, denen bei reellem variabelem Werthe von u derselbe zwischen 0 und $\omega' i$ gelegene Werth von vi angehört. Zerlegt man die auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke nach den für dieselben geltenden bekannten Summenformeln in ihre reellen und imaginären Theile, so nehmen die Gleichungen (2) die Form an:

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= U_1 + iV_1 \\ \varrho u_2 &= U_2 + iV_2 \\ \varrho u_3 &= U_3 + iV_3. \end{aligned} \tag{2a}$$

Der reelle Träger dieser imaginären Geraden, zugleich ihr Schnittpunkt mit der conjugirt imaginären Tangente, ist zu Folge dessen durch die Werthe bestimmt:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= U_2 V_3 - U_3 V_2 \\ \varrho x_2 &= U_3 V_1 - U_1 V_3 \\ \varrho x_3 &= U_1 V_2 - U_2 V_1 \end{aligned} \tag{3}$$

und die Entwickelung dieser Ausdrücke nach u und iv löst also das gestellte Problem. Durch Ausrechnung der Grössen $S(u+iv)$, $S(u+iv)^3$,

$C(u+iv)\cdot D(u+iv)$*) ergiebt sich, indem man den gemeinsamen Nenner $1+k^2a^2\lambda^2$ fortlässt, das Gleichungssystem:

$$(4)\qquad \begin{aligned} U_1 &= \frac{bc\lambda(b^2c^2\lambda^2-3a^2\mu^2\nu^2)}{(1+k^2a^2\lambda^2)^2}, & V_1 &= \frac{a\mu\nu(3b^2c^2\lambda^2-a^2\mu^2\nu^2)}{(1+k^2a^2\lambda^2)^2},\\ U_2 &= bc\lambda, & V_2 &= a\mu\nu,\\ U_3 &= \frac{bc\mu\nu(1-k^2a^2\lambda^2)}{1+k^2a^2\lambda^2}, & V_3 &= \frac{-a\lambda(c^2\nu^2+k^2b^2\mu^2)}{1+k^2a^2\lambda^2}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst:

$$(5)\qquad \varrho x_3 = \frac{-2abc\lambda\mu\nu(a^2\mu^2\nu^2+b^2c^2\lambda^2)}{(1+k^2a^2\lambda^2)^2},$$

und zufolge der Identität:

$$(6)\qquad \frac{a^2\mu^2\nu^2+b^2c^2\lambda^2}{(1+k^2a^2\lambda^2)^2} = S(u+iv)\cdot S(u-iv) = \frac{a^2+\lambda^2}{1+k^2a^2\lambda^2},$$

ist also:

$$(5^a)\qquad \varrho x_3 = -2\,\mathfrak{S}(v)\,\mathfrak{C}(v)\,\mathfrak{D}(v)\,S(u)\,C(u)\,D(u)\cdot\frac{S(\overline{u})^2+\mathfrak{S}(\overline{v})^2}{1+k^2\,S(u)^2\,\mathfrak{S}(v)^2}.$$

Sodann ist:

$$(7)\qquad \varrho x_1 = -\frac{abc\lambda^2(c^2\nu^2+k^2b^2\mu^2)}{1+k^2a^2\lambda^2} - \frac{abc\mu^2\nu^2(1-k^2a^2\lambda^2)}{1+k^2a^2\lambda^2}.$$

Nach den für $a\,b\,c$, $\lambda\,\mu\,\nu$ bestehenden Identitäten reducirt sich dieser Ausdruck auf die Form:

$$\varrho x_1 = -abc\left\{\nu^2+k^2\lambda^2\mu^2\right\} = -abc\left\{1-k^2\lambda^4\right\}$$

oder

$$(7^a)\qquad \varrho x_1 = -\mathfrak{S}(v)\,\mathfrak{C}(v)\,\mathfrak{D}(v)\left\{1-k^2S(\overline{u})^4\right\}.$$

Um schliesslich den Werth für x_2 zu finden, lässt sich, da die nothwendigen Reductionen bei Bildung der Form $U_3V_1 - U_1V_3$ nicht ganz leicht erkannt werden, zweckmässiger die Gleichung:

---

*) Der Kürze halber werde ich in den nothwendigen Ausrechnungen die auch sonst übliche Bezeichnung einführen:

$$\begin{aligned} S(u) &= \lambda, & S(iv) &= i\,\mathfrak{S}(v) = i\cdot a,\\ C(u) &= \mu, & C(iv) &= \mathfrak{C}(v) = b,\\ D(u) &= \nu, & D(iv) &= \mathfrak{D}(v) = c, \end{aligned}$$

so dass also die Identitäten bestehen:

$$\begin{aligned} \mu^2+\lambda^2 &= 1, & b^2-a^2 &= 1,\\ \nu^2+k^2\lambda^2 &= 1, & c^2-k^2a^2 &= 1. \end{aligned}$$

Die Grössen $\mathfrak{S}(v)$, $\mathfrak{C}(v)$, $\mathfrak{D}(v)$ sind bekanntlich *reelle* Grössen, die durch die Gleichungen definirt werden können:

$$\mathfrak{S}(v,k) = \frac{S(v,k')}{C(v,k')}, \quad \mathfrak{C}(v,k) = \frac{1}{C(v,k')}, \quad \mathfrak{D}(v,k) = \frac{D(v,k')}{C(v,k')},$$

wenn $k^2+k'^2=1$.

(8) $$x_2 = -\frac{u_1 x_1 + u_3 x_3}{u_2}$$

wählen, in welcher $x_1 x_3$ die eben bestimmten Grössen, $u_1 u_2 u_3$ die durch Gleichung (2) definirten Werthe bedeuten. Man findet auf diese Weise:

$$(8^a)\quad \varrho x_2 = \Theta(v)\mathfrak{C}(v)\mathfrak{D}(v)\{2.S(u)C(u)D(u)S(u-iv)C(u+iv)D(u+iv) + S(\overline{u+iv})^2(1-k^2S(u)^4)\}.$$

Der Ausdruck in der Klammer darf, wenn für $v(-v)$ substituirt wird, seinen Werth und sein Zeichen nicht ändern und muss überhaupt eine reelle Grösse sein. Durch diese Bemerkung bietet sich ein Mittel zur Transformation des Klammerwerthes dar, indem statt desselben geschrieben wird:

$$\tfrac{1}{2}\Big[2S(u)C(u)D(u)\{S(u-iv)C(u+iv)D(u+iv)+S(u+iv)C(u-iv)D(u-iv)\} + (1-k^2S(u)^4)\{S(\overline{u+iv})^2+S(\overline{u-iv})^2\}\Big]$$
$$=\tfrac{1}{2}\Big[\frac{4S(\bar u)^2C(\bar u)^2D(\bar u)^2}{1-k^2S(\bar u)^4}\{1-k^2S(\overline{u+iv})^2S(\overline{u-iv})^2\} + (1-k^2S(\bar u)^4)\{S(\overline{u+iv})^2+S(\overline{u-iv})^2\}\Big].$$

Mit Einführung der Identität Gleichung (6) geht diese Form, wenn schliesslich auch die Ausdrücke $S(u+iv)$ und $S(u-iv)$ aufgelöst werden, in den Werth über:

$$\frac{2\lambda^2\mu^2\nu^2(1-k^2a^4)+(\lambda^2b^2c^2-a^2\mu^2\nu^2)(1-k^2\lambda^4)}{\{1+k^2a^2\lambda^2\}^2}.$$

Beachtet man endlich, dass der Zähler dieses Quotienten den Factor $1+k^2a^2\lambda^2$ enthält, so sind, nach Weglassung aller gleicher Factoren und nach Multiplication aller Ausdrücke mit $1+k^2S(\bar u)^2\Theta(\bar v)^2$, *die Coordinaten des auf der imaginären Tangente* $(u+iv)$ *gelegenen reellen Punktes:*

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned}\varrho x_1 &= (1-k^2S(\bar u)^4)(1+k^2S(\bar u)^2\Theta(v)^2),\\ \varrho x_2 &= 2C(\bar u)^2D(u)^2(S(\bar u)^2-\Theta(v)^2)+(1-k^2S(\bar u)^4)(S(\bar u)^2+\Theta(\bar v)^2),\\ \varrho x_3 &= 2S(u)C(u)D(u)(S(\bar u)^2+\Theta(\bar v)^2).\end{aligned}$$

Das hiermit gewonnene Resultat lässt sich dadurch prüfen, dass in diesen Gleichungen u constant, v veränderlich gesetzt wird. Alsdann erhält man die Punkte einer Meridiancurve, und es müssen, da die Meridiancurve mit dem constanten Werthe u von der Tangente mit dem Parameterwerth $-2u$ gebildet wird, wenn die Gleichungen (I) in der Form geschrieben werden:

$$(II)\qquad \begin{aligned} \varrho x_1 &= \varphi_1(u) + \psi_1(u)\,\wp(\bar{v})^2,\\ \varrho x_2 &= \varphi_2(u) + \psi_2(u)\,\wp(\bar{v})^2,\\ \varrho x_3 &= \varphi_3(u) + \psi_3(u)\,\wp(\bar{v})^2. \end{aligned}$$

die Identitäten bestehen:

$$(9)\qquad \begin{aligned} &-\varphi_1(u)\,S(\overline{2u})^3 - \varphi_2(u)\,S(2u) + \varphi_3(u)\,C(2u)\,D(2u) \equiv 0,\\ &-\psi_1(u)\,S(\overline{2u})^3 - \psi_2(u)\,S(2u) + \psi_3(u)\,C(2u)\,D(2u) \equiv 0, \end{aligned}$$

was durch directe Ausrechnung in der That als gültig erwiesen wird. Die geometrische Bedeutung dieser Identitäten wird im Folgenden noch hervortreten. In Betreff des Grades der Meridiancurven wird also aus der Eigenschaft, dass die Punktcoordinaten linear in $\wp(\bar{v})^2$ dargestellt werden, nochmals bestätigt, dass dieselben Curven ersten Grades sind.

Die Breitencurven werden geliefert, indem u als veränderlicher Parameter, v als constante Grösse betrachtet wird. Dann ergeben die vorstehenden Gleichungen reelle Punkte einer Curve, erstlich so lange u alle Werthe von 0 bis ω annimmt, ferner aber, wenn für u complexe Werthe von der Form $u + \frac{\omega' i}{2}$ eingesetzt werden. Soll dieses letztere System reeller Punkte ebenfalls der Ringfläche angehören, so muss dasselbe auch durch reelle Werthe von u dargestellt werden können, indem den von der Constante vi abhängenden Coefficienten andere Werthe beigelegt werden; denn sämmtliche Punkte der Ringfläche sind durch reelle u und rein imaginäre vi-Werthe erschöpft. Sind die reellen Punkte so geartet, dass sie nicht durch einen reellen Werth u mit geänderter Constante v erhalten werden können, so liegen dieselben überhaupt nicht auf der Ringfläche; ihre geometrische Bedeutung würde dem zunächst gestellten Probleme fern liegen; die Breitencurven wären nur Theile von algebraischen Curven. Aus der Eigenschaft der Coordinatengleichung (I) lässt sich indess der Satz folgern: Eine Aenderung des u in $u + \frac{\omega' i}{2}$ hat das nämliche Resultat, wie eine Aenderung des iv in $iv + \frac{i\omega'}{2}$. Denn setzt man für u den Werth $u + \frac{i\omega'}{2}$ und multiplicirt die drei Gleichungen mit $k' S(u)^6$ so erhält man die Grössen:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \varrho x_1 &= -k^2\big(k^2 S(u)^4 - 1\big)\big(S(\bar{u})^2 + \wp(\bar{v})^2\big),\\ \varrho x_2 &= 2C(\bar{u})^2 D(\bar{u})^2\big(1 - k^2 S(\bar{u})^2 \wp(v)^2\big) + \big(k^2 S(\bar{u})^4 - 1\big)\big(1 + k^2 S(\bar{u})^2 \wp(\bar{v})^2\big),\\ \varrho x_3 &= 2S(u)\,C(u)\,D(u)\big(1 + k^2 S(u)^2 \wp(v)^2\big). \end{aligned}$$

Auf die gleichen Formeln wird man geführt, wenn für vi der Werth $vi + \frac{i\omega'}{2}$ substituirt und jede Gleichung mit $-k^2\wp(\bar{v})^2$ multiplicirt

wird. Damit ist also bewiesen, dass, mit Ausnahme der möglicherweise vorhandenen isolirten reellen Punkte, deren Lage alsdann noch nicht bestimmt wäre, das gesammte reelle Gebiet einer solchen Curve der Ringfläche angehört, und dass diejenigen beiden Breitencurven Theile derselben algebraischen Curve sind, auf welchen die constanten imaginären Periodenwerthe um $\frac{1}{2}\omega' i$ differiren. — Dieses allgemein gültige Resultat erleidet eine Ausnahme für die Curve, längs welcher $v = \frac{\omega'}{4}$ ist; denn in diesem Falle ist $v + \frac{\omega'}{2} = \frac{3\omega'}{4}$, wofür auch $-\frac{\omega'}{4}$ gesetzt werden kann, und dieser Werth muss also dieselben Curvenpunkte liefern. Die Curve $v = \frac{\omega'}{4}$ ist aber, wie gleich anfangs anderweitig bestimmt wurde, das Oval der Hesse'schen Curve, die durch Correspondenz 2^{ter} Art aus der Cayley'schen folgt, und dieses Oval entsteht demnach doppelt zählend aus den beiden Zügen eines Breitencurvenpaares. In dem folgenden allgemeinen Satze ist daher diese Breitencurve vorerst auszuschliessen.

Die imaginären Punkte sämmtlicher Breitencurven, deren geometrische Bedeutung zunächst noch nicht in Betracht kommt, erhält man, indem bei constantem v für u complexe Werthe eingesetzt werden. Aus den Fundamentalgleichungen (I) lassen sich endlich folgende allgemeine Schlüsse ziehen. Dieselben sind erstlich rational in $S(u)$ und in der Grösse $C(u) \cdot D(u) = \frac{dS(u)}{du}$; mithin sind sämmtliche Curven *zweitheilige elliptische Curven mit dem Modul* k^2; jede von ihnen ist auf die Fundamentalcurve eindeutig beziehbar. Ferner ist, wenn irgend eine lineare Combination der Coordinaten gebildet wird: $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$, dieser Ausdruck vom 6^{ten} Grade in $S(u)$; es werden also die bisher gewonnenen Resultate in dem Satze zusammengefasst:

Je zwei Breitencurven, die von dem Ovale der Hesse'schen Curve gleichen Abstand haben (den Abstand gemessen durch die Differenz der imaginären Argumente vi *und* $\frac{\omega' i}{2} - vi$ *von* $\frac{\omega' i}{4}$), *bilden eine algebraische Curve, deren Ordnung* $= 6$, *deren Geschlecht* $= 1$ *und deren Modul* $= k^2$ *ist.*

Der wesentliche Inhalt dieses Satzes wird, für Curven 3^{ter} Ordnung ausgesprochen, auch so formulirt werden können: *Die reellen Träger der imaginären Punkte einer Curve* 3^{ter} *Ordnung umhüllen eindeutig ein System von einfach unendlich vielen zweitheiligen Curven* 6^{ter} *Classe, deren Geschlecht* $p = 1$ *ist.*

Die Perioden der längs dieser Curven erstreckten elliptischen Integrale sind ω und $\omega' i$, und jedes Breitencurvenpaar entspricht eindeutig den Elementen der Fundamentalcurve, wenn einem Punkte

u der erstgenannten Curve das mit demselben Parameterwerth u behaftete Element der Classencurve zugeordnet wird; die geometrische Lagenbeziehung entsprechender Elemente ist dabei evident. Auf gleiche Weise sind auch die Breitencurvenpaare unter einander eindeutig transformirbar.

Das Oval der Hesse'schen Curve macht auch hierin die Ausnahme, dass es zwei-eindeutig auf die Curve dritter Classe bezogen ist, indem das Element u des dreispitzigen Zuges und das Element $u + \frac{\omega' i}{2}$ des ovalen Zuges demselben Punkte der Hesse'schen Curve zugeordnet werden müssen. Ueberhaupt tritt diese Curve in dem behandelten Systeme doppelt gezählt als Curve 6^{ter} Ordnung auf; aus diesem Umstande erklären sich alle dem allgemeinen Resultate scheinbar widersprechenden Eigenschaften; insbesondere wird auch das Auftreten eines reellen Gebietes *ausserhalb der Ringfläche* dadurch ermöglicht.

§ 2.

Geometrische Relationen auf der Ringfläche.

Den geometrischen Eigenschaften der gewonnenen Curven ist ein für die Lagenbeziehung der Breiten- und Meridiancurven wesentlicher Satz voranzustellen, der bei der Abbildung der gewöhnlich üblichen Riemann'schen Fläche auf die hier vorliegende Ringfläche in Betracht kommt. Derselbe bildet zugleich die Verallgemeinerung einer für die Cayley'sche und Hesse'sche Curve bekannten Relation. Aus der Schröter'schen Construction, wie dieselbe in § 2. des vorigen Abschnittes recapitulirt wurde, folgt nämlich: Die beiden von einem Punkte der Hesse'schen Curve an die Cayley'sche ausgehenden correspondirenden Tangenten liegen harmonisch zu der Tangente der Hesse'schen Curve in diesem Punkte und der dritten Tangentenlinie, welche an die Cayley'sche gezogen werden kann. Dieser Satz ist die reciproke Umkehr einer geläufigen Behauptung. Ausgedehnt für alle Breitencurven erhält dieses Theorem die Fassung:

Die von einem Punkte ausgehenden imaginären Tangenten liegen harmonisch zu den Richtungen der Breiten- und Meridiancurven in diesem Punkte.

Der Beweis hierfür scheint insofern Schwierigkeiten zu bieten, als er erfordert, von der Richtung imaginärer Linien auf der Ringfläche zu sprechen, die eben dadurch entstanden ist, dass die imaginären Linien durch reelle Punkte ersetzt wurden. Analog jedoch, wie für die imaginären Punkte der Breitencurven die ursprünglich reell gedachte Grösse u nachher wiederum complexe Werthe erhielt, bietet sich der Erweis der ausgesprochenen Behauptung wie folgt.

Nennt man die Parameterwerthe eines Punktes der Ringfläche u_0 und v_0, so ist die Gleichung der von diesem Punkte ausgehenden Meridiancurve durch: $u - u_0 = 0$, der Breitencurve durch $v - v_0 = 0$ gegeben. Die Coordinaten des Punktes sind durch die Relationen dargestellt:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \varrho x_1 &= U_2 V_3 - U_3 V_2 , \\ \varrho x_2 &= U_3 V_1 - U_1 V_3 , \\ \varrho x_3 &= U_1 V_2 - U_2 V_1 , \end{aligned}$$

wobei unter $U\ V$ die im vorigen Paragraphen definirten Grössen zu verstehen sind, wenn für u und v die bestimmten Werthe u_0 und v_0 substituirt werden. Es handelt sich nun darum, einzusehen, welche Werthe die *imaginären* Punkte der beiden Tangenten erhalten müssen, denen die Parameterwerthe $u_0 + iv_0$ und $u_0 - iv_0$ angehören. Dabei wird sich die Behauptung als richtig zeigen: Die auf den genannten Tangenten gelegenen Punkte besitzen complexe Parameterwerthe u und v, so jedoch, dass die Relationen bestehen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} (u - u_0) + i(v - v_0) &= 0 , \\ (u - u_0) - i(v - v_0) &= 0 . \end{aligned}$$

Denn setzt man den variabeln complexen Werth:

$$u = u' + u''i , \qquad iv = v' + v''i ,$$

so dass:

$$u + iv = u' + v' + i(u'' + v'') = u_0 + iv_0 ,$$

oder:

$$(3)\qquad u' + v' = u_0 , \qquad u'' + v'' = v_0 ,$$

so gehen durch diese Substitutionen die Coordinaten ϱx_i in complexe Ausdrücke über, die zur Unterscheidung der reellen accentuirt werden mögen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \varrho x_1 &= U_2' V_3' - U_3' V_2' , \\ \varrho x_2 &= U_3' V_1' - U_1' V_3' , \\ \varrho x_3 &= U_1' V_2' - U_2' V_1' , \end{aligned}$$

und es ist der Nachweis zu erbringen, dass diese Grössen der Relation $u_x = 0$ genügen, wenn für u_i die Gleichungen bestehen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \varrho u_1 &= S(u_0 + iv_0)^3 = U_1 + iV_1 , \\ \varrho u_2 &= S(u_0 + iv_0) \ = U_2 + iV_2 , \\ \varrho u_3 &= C(u_0 + iv_0) \cdot D(u_0 + iv_0) = U_3 + iV_3 . \end{aligned}$$

Es muss also die Determinante identisch verschwinden:

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} U_1' & U_2' & U_3' \\ V_1' & V_2' & V_3' \\ U_1 + iV_1 & U_2 + iV_2 & U_3 + iV_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1' + iV_1' & U_2' + iV_2' & U_3' + iV_3' \\ V_1' & V_2' & V_3' \\ U_1 + iV_1 & U_2 + iV_2 & U_3 + iV_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Bestehen aber die Bedingungen (3), so ist auch:

$$(7)\qquad \begin{aligned} U_1 + iV_1 &= U_1' + iV_1', \\ U_2 + iV_2 &= U_2' + iV_2', \\ U_3 + iV_3 &= U_3' + iV_3', \end{aligned}$$

woraus sich das Behauptete ergiebt.

Aus der Zusammenstellung der Gleichungen (2) mit denen der Meridian- und Breitencurven:

$$(8)\qquad \begin{aligned} (u - u_0) + i(v - v_0) &= 0, \\ (u - u_0) - i(v - v_0) &= 0, \\ u - u_0 &= 0, \\ v - v_0 &= 0 \end{aligned}$$

ist der Satz vom harmonischen Doppelverhältniss unmittelbar einleuchtend.

Mit Zugrundelegung der beiden von jedem Punkte der Ringfläche ausgehenden conjugirt imaginären Tangenten kann, wenn u und v als Coordinaten betrachtet werden, eine Massbestimmung auf der Ringfläche gegründet werden. Ersetzt man nämlich die zu den unendlich fernen imaginären Kreispunkten der gewöhnlichen Ebene gehenden Linien durch dieses Tangentenpaar und definirt als Entfernung *zweier Punkte* die Function $\sqrt{(u-u')^2 + (v-v')^2}$ ihrer Argumente, so lässt sich mit Bezug auf diese Massbestimmung der obige Satz alsdann so formuliren: *Die Richtungen der Meridian- und Breitencurven stehen in jedem Punkte zu einander senkrecht.*

Wenn die Function

$$w = u + iv = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}\cdot\sqrt{1 - k^2 z^2}}$$

in gewöhnlicher Weise geometrisch gedeutet wird, so dass x und y als die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $z = x + iy$ in der einfachen complexen Ebene, u und v gleichfalls als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes w auf einer zweiblättrigen Fläche mit vier Verzweigungspunkten interpretirt werden, so besteht bekanntlich die Beziehung, dass die Curvensysteme in der Ebene z sich „isogonal" auf den beiden Blättern der Fläche w abbilden. Das Analoge bleibt auch bestehen, wenn die Grösse w auf der Ringfläche aufgetragen wird, so dass u und v die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf das System der Meridian- und Breitencurven bedeuten; nur muss als Winkel zweier Richtungen in dieser Ebene, wie oben geschehen, die bekannte Function des Doppelverhältnisses dieser beiden Linien mit den beiden imaginären Tangenten an die Curve 3ter Classe definirt werden. Durchläuft der Punkt z innerhalb des von ω und $\omega' i$

gebildeten Elementarparallelogrammes eine gerade Linie parallel der y-Axe, so durchläuft auch der Punkt w eine gerade Linie, nämlich eine Meridiancurve; dagegen wenn z auf der x-Axe oder einer ihr parallelen Linie geführt wird, bewegt sich w auf einer Breitencurve, also auf einer Curve 6^{ter} Ordnung; beliebigen geradlinigen Richtungen von z entsprechen Curven auf der Ringfläche, die transscendent auf derselben verlaufen*).

§ 3.

Untersuchung des vollständigen Systemes der Curven sechster Ordnung, zugleich als Hauptcoincidenzcurven des Connexes Q.

In den bisherigen Untersuchungen ist, bedingt durch das zunächst gestellte Problem, ein wesentlicher Unterschied zwischen den reellen und den imaginären Parameterwerthen (u, iv) aufrecht erhalten worden, der für die geometrischen Beziehungen auf der Ringfläche von Bedeutung war. Fasst man jedoch die gewonnenen Fundamentalgleichungen allgemeiner und behandelt die Frage nach der Art des vollständigen Curvensystemes, dem die discutirten Curven 6^{ter} Ordnung hinsichtlich ihrer algebraischen Gleichungsform angehören, so erweitern sich diese Betrachtungen. Um dieses zu erreichen, wird man bei Bildung der Schnittpunkte zweier Tangenten, deren Parameterwerthe $u + iv$ und $u - iv$ sind, die willkührliche Einschränkung des Werthes vi auf das Gebiet der rein imaginären Grössen verlassen müssen und statt dessen die allgemeine Zuordnung treffen, dass die Tangente U mit der Tangente $U + C$ geschnitten wird, wobei $C = C' + C''i$ eine beliebige constante Grösse innerhalb des complexen Werthgebietes, die variable Grösse U die Gesammtheit aller Tangenten bedeutet. Auf diese Weise ist jeder Tangente eine andere *algebraisch eindeutig* zugeordnet. Die durch den Schnitt entsprechender Tangenten alsdann gebildete Curve kann hinsichtlich ihrer wesentlichen Eigenschaften bestimmt werden, auch ohne dass man auf die in § 1. sub (I) gegebenen Gleichungen, in welchen für vi der allgemeine Werth $\frac{C}{2}$ zu substituiren ist, einzugehen nöthig hat. — Denn es ist

*) Vorstehende Untersuchungen lassen sich nach einer Mittheilung, die ich Herrn Klein verdanke, auch auf die Flächen ausdehnen, welche durch beliebige algebraische Curven gebildet werden. Jedes Blatt einer solchen Fläche wird in seinen einzelnen Punkten durch den reellen Träger eines conjugirt imaginären Tangentenpaares erzeugt. Bei der Beziehung zwischen der $x + iy$ Ebene auf diese Art Riemann'scher Flächen behält der Satz von der isogonalen Abbildung entsprechender Curvensysteme seine Gültigkeit, wenn die Massbestimmung zwischen zwei Richtungen in jedem dieser Blätter auf das imaginäre Tangentenpaar an die Fundamentalcurve gegründet wird.

vor Allem ersichtlich, dass auf jeder Tangente 6 Schnittpunkte einer solchen Curve gelegen sind. Einer Tangente U entspricht nämlich die Tangente $U + C$, während umgekehrt U der Tangente $U - C$ zugeordnet werden muss. Sodann schneiden sich auf U noch 4 Paare entsprechender Tangenten, deren Argument $u' + u''i$, wenn U von der Form $U' + iU''$ ist, durch die Gleichungen bestimmt werden:

$$(1) \quad U' + 2u' + C' \equiv 0 \mid \text{mod } \omega \mid, \quad U'' + 2u'' + C'' \equiv 0 \mid \text{mod } \omega' \mid.$$

Das heisst also: *Liegt der Schnittpunkt der Tangente $u = u' + iu''$ mit der ihr zugeordneten auf U, so schneiden sich auch die 3 correspondirenden Tangenten von u mit den ihnen entsprechenden auf der nämlichen Tangentenlinie.*

Ist C *eine reelle Grösse*, so fallen auf jede Tangente des dreispitzigen Zuges 6 reelle Schnittpunkte, von denen 4 innerhalb dieses Zuges, 2 ausserhalb des Ovales sich befinden; dagegen gehören zu einer Tangente des ovalen Zuges nur 2 reelle Punkte. Die Curven verlaufen also mit zwei paaren Zügen innerhalb des dreispitzigen und ausserhalb des ovalen Zuges.

Ist C *rein imaginär*, wie in den vorhergegangenen Untersuchungen angenommen ward, so schneidet im Allgemeinen die C_6 jede Tangente des dreispitzigen Zuges in 4 reellen, jede Tangente des Ovales in 6 imaginären Punkten. Dagegen liegen diejenigen Curven, bei welchen C *eine complexe Grösse von der Form* $\frac{\omega}{a} + \frac{\omega' i}{2}$ *bedeutet*, völlig ausserhalb des Ovales, so zwar, dass ihre beiden Züge von jeder Tangente des dreispitzigen Zuges in je einem, von jeder Tangente des Ovales in je drei Punkten geschnitten werden. Diese Gruppe von zweitheiligen Curven verläuft also mit zwei unpaaren Zügen ausserhalb des Ovales. Die übrigen *complexen Werthe von* $C = u_0 + iv_0$ liefern völlig imaginäre Curven, die nur, wie leicht gefunden werden kann, je 6 reelle Punkte, auf der Ringfläche gelegen, besitzen, indem man nämlich sowohl von den drei reellen Tangenten: $-\frac{2}{3}u_0$, $-\frac{2}{3}u_0 + \frac{\omega}{3}$, $-\frac{2}{3}u_0 + \frac{2\omega}{3}$, als auch von den drei imaginären $-\frac{u_0}{3} - v_0 i$, $-\frac{u_0}{3} + \frac{\omega}{3} - v_0 i$, $-\frac{u_0}{3} + \frac{2\omega}{3} - v_0 i$ ausgeht, und diese mit den ihnen zugeordneten schneidet. Die sechs weiteren imaginären Tangenten aus diesen Punkten umhüllen einen Kegelschnitt.

Ausgezeichnet sind in diesem gesammten Systeme diejenigen drei Curven, für welche C die besonderen Werthe $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega' i}{2}$, $\frac{\omega + \omega' i}{2}$ erhält, weil bei diesen jeder Schnittpunkt doppelt zu zählen ist. Die so ent-

standenen Curven sind nach der früheren Bestimmung (§ 2. Abschn. I.) die drei der Cayley'schen zugehörigen Hesse'schen Curven und die dort discutirten Lagenbeziehungen finden ihre entsprechende Verallgemeinerung in den für beliebige Werthe von C hier ausgesprochenen Sätzen.

Für das vollständige Curvensystem, welches dreifach die Ebene überdeckt, wie daraus erschliessbar, dass die drei von jedem Punkte ausgehenden Tangenten, auf dreierlei Weisen zu je zweien als zugeordneten combinirt werden können, lässt sich der im vorigen Paragraph unter Beschränkung des Werthes vi bewiesene Satz allgemein ausdehnen:

Die durch einen Punkt der Ebene hindurchgehenden 3 Richtungen des Systems der Curven 6^{ter} Ordnung liegen harmonisch zu je einer der drei von diesem Punkte an die Fundamentalcurve ausgehenden Tangenten in Bezug auf die beiden anderen; das heisst: sie bilden die Covariante Q zu der binären cubischen Form f, welche durch die drei Tangenten der Fundamentalcurve in einem beliebigen Punkte der Ebene geometrisch repräsentirt ist.

Demnach ergiebt sich das Resultat: *Das behandelte System der Curven 6^{ter} Ordnung ist zugleich das System der Hauptcoincidenzcurven des Connexes $Q = (\alpha\beta x)^2(\gamma\alpha x)u_\gamma^2 u_\beta$ einer in der Form $f = u_a^3$ gegebenen Curve dritter Classe.*

Aus diesem Satze lässt sich die weitere Eigenschaft ableiten, dass die vorliegenden Curven *Berührungscurven* der zu Grunde liegenden K_3 sind, da in jedem gemeinsamen Punkte zwei Tangenten von f zusammenfallen, mithin auch die Form Q in die nämliche Richtung übergeht.

Weil einerseits die Ordnung der Curven gleich 6, andererseits ihr Geschlecht, da sie eindeutig auf die Fundamentalcurve bezogen sind, gleich 1 ist, so folgt, dass sie Singularitäten haben müssen, deren Anzahl in Bezug auf die Geschlechtserniedrigung 9 Doppelpunkten äquivalent ist. Soll aber ein Punkt, in welchem sich die 3 Tangenten U, $U + C$, $-2U - C$ schneiden, ein Doppelpunkt der Curve sein, so ist das nur auf die Weise erreichbar, dass er sowohl durch den Schnitt von U mit $U + C$, als auch durch den Schnitt von $-2U - C$ mit U oder $U + C$ geliefert wird. Dabei tritt jedoch als uneigentliche Lösung sofort der Fall ein, dass $-2U - C$ mit einer der beiden anderen Tangenten zusammenfällt; dieses Vorkommniss findet in der That in allen denjenigen Punkten statt, in welchen die C_6 die ursprüngliche K_3 berührt; die Parameterwerthe dieser 18 Berührungspunkte ergeben sich aus den Gleichungen:

$$-2U-C\equiv U,$$
$$-2U-C\equiv U+C,$$

oder

$$(2)\qquad \begin{aligned} U &= -\frac{C}{3}+\frac{m\omega+n\omega' i}{3} \\ U &= -\frac{2C}{3}+\frac{m\omega+n\omega' i}{3} \end{aligned} \quad (m \text{ und } n = 0, 1, 2),$$

das heisst, sie werden durch den Schnitt des Tangentenpaares:

$$(3)\qquad \frac{m\omega+n\omega' i}{3}-\frac{C}{3} \text{ und } \frac{m\omega+n\omega' i}{3}+\frac{2C}{3}$$

und ebenso:

$$(4)\qquad \frac{m\omega+n\omega' i}{3}-\frac{2C}{3} \text{ und } \frac{m\omega+n\omega' i}{3}+\frac{C}{3}$$

geliefert. Für alle Curven, bei denen C reell ist, sind also 6 dieser Berührungspunkte gleichfalls reell und zwar auf dem dreispitzigen Zuge vorhanden; für die Werthe $C=\frac{\omega}{a}+\frac{\omega' i}{2}$ liegt das System der 6 reellen Berührungspunkte auf dem Ovale, während in den übrigen Fällen alle 18 Berührungspunkte imaginär sind. Bei den beiden Hesse'schen Curven $\left(C=\frac{\omega' i}{2} \text{ oder } \frac{\omega}{2}+\frac{\omega' i}{2}\right)$ rücken je zwei Berührungspunkte zusammen, so zwar, dass drei Paare in reelle Punkte, gelegen auf den drei reellen Rückkehrtangenten in ihren Schnitten mit dem Oval, übergeführt werden.

Nach Ausscheidung dieser für das Problem der Doppelpunkte uneigentlichen Lösungen lassen sich die Werthe der gesuchten Punkte noch auf zweierlei Weisen bestimmen, indem man nämlich entweder:

$$(5)\qquad -2U-C\equiv U-C, \text{ das heisst } 3U\equiv 0,$$

oder

$$(6)\qquad -2U-C\equiv U+2C, \text{ das heisst } 3U-3C$$

setzt.

Beide Gleichungen liefern dieselben 9 Lösungen, die durch den Schnitt der 3 Tangenten

$$(7)\qquad \frac{m\omega+n\omega' i}{3}, \quad \frac{m\omega+n\omega' i}{3}+C, \quad \frac{m\omega+n\omega' i}{3}-C$$

gegeben werden. Dieses Ergebniss lautet in Worte gefasst:

Der Ort der Doppelpunkte der Hauptcoincidenzcurven des Connexes Q einer Curve 3^{ter} Classe ist durch die 9 Rückkehrtangenten der Fundamentalcurve bestimmt, so dass jede Curve auf je einer Rückkehrtangente einen einfachen Doppelpunkt besitzt.

Für reelle Werthe von C sind die auf den reellen Rückkehrtangenten innerhalb des dreispitzigen Zuges vorhandenen Punkte *eigent-*

liche Doppelpunkte, desgleichen repräsentiren die Doppelpunkte, wenn $C = \frac{\omega}{a} + \frac{\omega' i}{2}$ ist, drei reelle *Durchschnitte der beiden unpaaren Züge*, während für die Curven mit rein imaginären C-Werthen drei *isolirte Punkte* auf der Ringfläche liegen.

Insbesondere sind zwei reelle und zwei imaginäre Curven vorhanden, für welche je drei Doppelpunkte sich zu einem dreifachen Punkte vereinen; die von diesen dreifachen Punkten gebildeten Tripel sind die vier Dreiecke, welche durch die Durchschnitte der 9 Rückkehrtangenten erzeugt werden, und die Constante C erhält für diese Curven die Werthe:

$$\pm \frac{\omega}{3}, \quad \pm \frac{\omega' i}{3}, \quad \pm \frac{\omega + \omega' i}{3}, \quad \pm \frac{2\omega + \omega' i}{3}$$

Aus dieser Bestimmung der Ordnung, des Geschlechtes und der vielfachen Punkte ist es dann möglich, alle übrigen für die Curven charakteristischen Zahlen abzuleiten. Die *Classe* derselben ist im Allgemeinen gleich 12 und erniedrigt sich nur bei der ursprünglich gegebenen Curve auf 3, da hier die 9 Doppelpunkte zu Rückkehrpunkten werden.

Die Anzahl der *Wendepunkte* jeder Curve ist im Allgemeinen gleich 18 und kann ohne Schwierigkeit geometrisch bestimmt werden. Betrachtet man nämlich 2 unendlich nahe Punkte auf einer der Curven und bestimmt in den beiden Punkten zu den 3 Tangenten an die Fundamentalcurve die *eine* Richtung der Form Q, so werden die in einem beliebigen Paare benachbarter Punkte mit Zugrundelegung der 3 Tangenten erzeugten Strahlbüschel projectivisch auf einander bezogen sein, während für einen Wendepunkt die Beziehung eine perspectivische sein muss, da in diesem die Richtung der Curve für zwei benachbarte Punkte um ein Unendlichkleines zweiter Ordnung differirt, das heisst also die nämliche bleibt. *Die Berührungspunkte der drei von einem Wendepunkt ausgehenden Tangenten müssen mithin auf einer Geraden gelegen sein.*

Nun ist aber bekanntlich für eine Curve 3ter Ordnung die Hesse'sche Curve der Ort derjenigen Punkte, deren Polarkegelschnitte zerfallen, das heisst also auch der Ort aller der Punkte, von welchem aus sich sechs Tangenten ziehen lassen, deren Berührungspunkte zu je dreien auf zwei Geraden liegen. Dualistisch übertragen lautet das Nämliche: Die Hesse'sche Curve einer Curve 3ter Classe ist der Ort aller der Linien, welche die gegebene in sechs Punkten schneiden, so dass die Tangenten in diesen Punkten zu je dreien durch einen Punkt gehen. Diese Punkte bilden die Cayley'sche Curve der Curve 3ter Classe. Im Zusammenhange mit dem vorhergegangenen Satze folgt demnach:

Der Ort der Wendepunkte der Hauptcoincidenzcurven des Connexes Q einer Curve 3ter Classe ist durch die Cayley'sche Curve bestimmt.

Die Fundamentalcurve selber wird von der Cayley'schen in ihren neun Rückkehrpunkten geschnitten, in welche die 18 Wendepunkte paarweise zusammengefallen sind*).

Eine wesentliche Eigenschaft der behandelten Curven, bereits enthalten in der im § 1. sub (II) gebildeten Gleichungsform, ist bisher noch nicht in Discussion gezogen worden. Wie gleich bei Bildung der Schnittpunkte entsprechender Tangenten am Anfange dieses Paragraphen erörtert wurde, lässt sich nämlich unter den sechs auf einer Tangente gelegenen Punkten ein Quadrupel ausscheiden, welches dadurch zu Stande kommt, dass die vier zusammengehörigen Elemente: u, $u+\frac{\omega}{2}$, $u+\frac{\omega' i}{2}$, $u+\frac{\omega+\omega' i}{2}$ sich mit den ihnen zugeordneten $u+C\cdots$ auf einer Tangente $-2u-C$ schneiden. Beachtet man nun die Gleichungen (II), welche durch die Substitution des allgemeinen Werthes $\frac{C}{2}$ für vi in die Form übergehen:

$$\varrho x_i = \varphi_i(u) - \psi_i(u)\, S\left(\frac{C}{2}\right)^2, \tag{8}$$

so ist ersichtlich, dass die Werthe $\varphi_i(u)$ die Coordinaten des auf der Tangente mit dem Argument $-2u$ gelegenen Punktes der Fundamentalcurve bedeuten, der zugleich der Berührungspunkt der Tangente u ist, dagegen $\psi_i(u)$ den auf der nämlichen Tangente gelegenen Punkt repräsentiren, welcher als Berührungspunkt der Linie $u+\frac{\omega' i}{2}$ angehört. Beides ergiebt sich, wenn für $\frac{C}{2}$ die Werthe 0 und $\frac{\omega' i}{2}$ eingeführt werden. *Das Gebiet einer Tangente ist auf diese Weise mit Zugrundelegung eines beliebigen Punktepaares der Fundamentalcurve* (im vorliegenden Falle des durch Correspondenz zweiter Art verbundenen) *durch einen Parameter bestimmt.* Berücksichtigt man nun weiter, dass die vier auf der nämlichen Curve 6ter Ordnung befindlichen Punkte dadurch erhalten werden, dass bei variabelen Werthen von u die Grösse $\frac{C}{2}$ die Werthe $\frac{C}{2}$, $\frac{C}{2}+\frac{\omega}{2}$, $\frac{C}{2}+\frac{\omega' i}{2}$, $\frac{C}{2}+\frac{\omega+\omega' i}{2}$ erlangt, so ergiebt sich für das Doppelverhältniss dieser Punkte der Satz:

Unter den sechs Schnittpunkten jeder der Curven 6ter Ordnung mit einer Tangente der Fundamentalcurve lässt sich immer ein Quadrupel bestimmen, für welches auf allen Tangenten das gleiche Doppelverhältniss besteht.

*) Salmon a. a. O. p. 189.

Diese Relation bildet eine Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes von der Constanz des Doppelverhältnisses der vier einer beliebigen Tangente angehörigen Schnittpunkte, indem dadurch die Behauptung über die Durchschnittspunkte von u, $u+\frac{\omega}{2}$, $u+\frac{\omega' i}{2}$, $u+\frac{\omega+\omega' i}{2}$ mit $-2u$ auch auf die Durchschnitte mit $-2u-C$ ausgedehnt wird. Der Werth des für die Curve mit der Constante C gültigen Doppelverhältnisses folgt, wenn an dieser Stelle für S, C, D die Bezeichnung λ, μ, ν und für $\frac{C}{2}$ der Werth z eingeführt wird, unter Hinzunahme der Gleichungen:

$$(9)\quad \lambda\left(\frac{\omega}{2}+z\right)=\frac{\mu(z)}{\nu(z)},\quad \lambda\left(\frac{\omega' i}{2}+z\right)=\frac{1}{k\cdot\lambda(z)},\quad \lambda\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega' i}{2}+z\right)=\frac{\nu(z)}{k\,\mu(z)}$$

in der Form:

$$(10)\qquad \frac{k^2\cdot(\mu(z)^2-\nu(z)^2\,\lambda(z)^2)^2}{(k^2\mu(z)^2\,\lambda(z)^2-\nu(z)^2)^2}.$$

Für $z=0$ geht dieser Ausdruck in k^2 über; für die drei Hesse'schen Curven, bei welchen $z=\frac{\omega}{4}$, $\frac{\omega' i}{4}$, $\frac{\omega+\omega' i}{4}$, erhält er die Werthe 0, 1, ∞. In dem gesammten Systeme von Curven sind im Allgemeinen je sechs vorhanden, welche das gleiche Doppelverhältniss besitzen. Man erhält diese sechs Werthe von $\lambda(z)^2$, indem man den Ausdruck (10) den sechs conjugirten Werthen eines Doppelverhältnisses gleichsetzt; die in λ^2 biquadratische Gleichung liefert jedesmal vier Wurzelwerthe von z, die um halbe Perioden sich unterscheiden und daher der nämlichen Curve angehören.

Nennt man die beiden auf der Tangente $-2u$ befindlichen Punkte: $\varphi_i(u)$ und $\psi_i(u)$ bezüglich $x_1=0$ und $x_2=0$, so sind die beiden anderen Punkte der Fundamentalcurve durch $x_1-x_2=0$, $x_1-\frac{1}{k^2}x_2=0$, die drei Paare correspondirender Punkte der drei Hesse'schen Curven durch:

$$x_1-\frac{1}{1\pm\sqrt{1-k^2}}x_2=0,\quad x_1\pm\frac{1}{k}x_2=0,\quad x_1-\frac{k\pm\sqrt{k^2-1}}{k}x_2=0$$

gegeben, während ein zusammengehöriges Quadrupel durch die Werthe:

$$x_1-\lambda(z)^2x_2=0,\quad x_1-\frac{x_2}{k^2\lambda(z)^2}=0,\quad x_1-\frac{\mu(z)^2}{\nu(z)^2}x_2=0,$$

$$x_1-\frac{\nu(z)^2}{k^2\mu(z)^2}x_2=0$$

bestimmt wird.

Mithin wird auf jeder Tangente der Curve 3ter Classe durch die genannten Quadrupel unter den Schnittpunkten der Curven 6ter Ordnung

das Büschel $\varkappa F + \lambda H$ gebildet, wenn mit F die binäre biquadratische Form, geometrisch repräsentirt durch die vier Punkte der Fundamentalcurve, bezeichnet ist. Die drei Paare correspondirender Punkte der drei Hesse'schen Curven liefern die Covariante T dieses Büschels.

In dieser Eigenschaft ist die Möglichkeit begründet, in einfacher Weise das gesammte Curvensystem wirklich zu construiren, falls die *reellen* Punkte der zu Grunde liegenden Curve 3ter Classe als vollständig gegeben vorausgesetzt werden, womit dann zugleich die 3 zugehörigen Curven 3ter Ordnung geliefert sind. Nimmt man nämlich auf einer Tangente einen beliebigen Punkt an, so können die mit diesem auf derselben Curve gelegenen drei weiteren dadurch bestimmt werden, dass man die vierten harmonischen Punkte in Bezug auf die drei Paare correspondirender Punkte der Hesse'schen Curven aufsucht; auf jeder anderen Tangente werden sodann die zugehörigen Elemente construirt, indem zu drei beliebig auf dieser Linie gewählten Punkten der Fundamentalcurve derjenige vierte bestimmt wird, welcher mit diesen das gleiche Doppelverhältniss bildet, wie der willkührliche Ausgangspunkt mit dem entsprechenden Tripel aus den Punkten der K_3.

Denkt man sich auf diese Weise insbesondere die Ringfläche mit einem Netze von Meridian- und Breitencurven überdeckt, so ist es mit Annäherung möglich, den Restpunkt eines Schnittpunktsystemes der gegebenen Curve mit einer beliebigen anderen anzugeben. Von den $3n$ Schnittelementen einer Curve n^{ten} Grades mit der vorliegenden ist immer *ein* Element durch die $3n-1$ übrigen bestimmt. Sind die Parameterwerthe dieser $3n-1$ Elemente bekannt, so folgt der Werth des letzten aus der durch das Abel'sche Theorem gegebenen Gleichung. Es lässt sich demnach dasjenige Viereck, gebildet aus Meridian- und Breitencurven, geometrisch bezeichnen, innerhalb welches das gesuchte Element, das heisst sein reeller Träger, hineinfällt.

§ 4.

Die eintheilige Curve dritter Classe und ihre hyperbolische Fläche. Das System der eintheiligen Curven sechster Ordnung.

Nachdem bisher die gestaltlichen Verhältnisse auf der Ringfläche erläutert und von dieser auf das vollständige System der Curven 6ter Ordnung ausgedehnt worden sind, gehe ich dazu über, die gewonnenen Resultate auch auf die *eintheiligen* Curven zu übertragen. Die durch dieselbe gebildete Fläche stellt man sich in übersichtlicher Weise als eine Art von *einschaligem Hyperboloide* vor*), dessen sogenannte Kehlcurve von dem im Endlichen als geschlossen vorausgesetzen Curvenzuge

*) Klein a. a. O. p. 562.

gebildet wird und dessen Seitenflächen, zusammengebracht auf die Ebene der Kehlcurve, flach ausgebreitet sind. Denn mit Ausnahme der innerhalb des Curvenzuges gelegenen Punkte gehen von jedem anderen Punkte der Ebene zwei conjugirt imaginäre Tangenten aus. Ist ω die auf dem reellen Zuge vertheilte reelle Periode des elliptischen Integrales, so ist, wie im Abschnitt I., § 4. gezeigt wurde, die andere complexe Periode durch $\frac{\omega}{2} + \frac{\omega' i}{2}$ darstellbar; da ferner ebendaselbst nachgewiesen wurde, dass conjugirt imaginäre Tangenten Parameterwerthe von der Form $\frac{\omega}{a} \pm \frac{\omega' i}{a'}$ erhalten, so sind bei der gleichen Festsetzung wie früher auch hier die reellen Tangenten die Träger des constanten Bruchtheiles der reellen Periode. Wird das elliptische Integral auf dem oberen Blatte der Ebene längs einer Tangente mit dem Parameterwerth $-2u$, vom Punkte u beginnend, geführt, so gelangt es zu dem Unendlichkeitspunkte dieser Linie, und indem man die in projectivischem Sinne nothwendige Festsetzung trifft, dass wie beim Hyperboloide im Unendlichen das obere Blatt mit dem unteren zusammenhängt, kehrt alsdann das Integral auf dem unteren Blatte ins endliche Gebiet zurück, erreicht den zweiten reellen Schnittpunkt der Tangente mit dem reellen Zuge der Curve und hat alsdann den Werth $u + \frac{\omega' i}{2}$ erlangt. Von diesem Punkte aus wiederum ins obere Blatt tretend, legt es denselben Weg in entgegengesetzter Richtung und jedesmal auf dem anderen Blatte zurück, so dass, in den Ausgangspunkt zurückgekehrt, der Werth $u + \omega' i$ beträgt.

Definirt man als *Breitencurve* auch hier diejenigen Züge, auf welchen sämmtliche Punkte den gleichen Bruchtheil des Werthes $\omega' i$ besitzen, so ist für diese zunächst nur der dreispitzige Zug allein gegeben, welcher den *Werth* 0 *oder auch den Werth* $\frac{\omega' i}{2}$ besitzt. Wie in dem Falle der zweitheiligen Curve sämmtliche Breitencurven eindeutig auf die gegebene bezogen waren, also zweitheilige elliptische Curven, gebildet aus den paarweise zusammengehörigen Argumenten $v_0 i$ und $v_0 i + \frac{i\omega'}{2}$, vorstellten, so sind hier diese Curven eintheilig, gleichfalls so geartet, dass $v_0 i$ und $v_0 i + \frac{\omega' i}{2}$ zusammengehören, nur wird durch diese Werthe der nämliche Zug repräsentirt.

Von den Formeln (4) (Abschnitt I. § 4.) ausgehend, in welchen der Modul $k^2 = \frac{\alpha - \beta i}{\alpha + \beta i}$ gesetzt ward, erhält man für den Schnittpunkt der Tangenten $u + iv$ und $u - iv$ die den früheren vollkommen analogen Gleichungen:

$$\varrho x_1 = -(\alpha+\beta i)^{\frac{1}{2}}\{1-k^2 S(\overline{u})^4\}\{1+k^2 S(\overline{u})^2 \Theta(\overline{v})^2\},$$
$$\varrho x_2 = +(\alpha+\beta i)^{\frac{1}{2}}\{2C(\overline{u})^2 D(\overline{u})^2 (S(\overline{u})^2 - \Theta(\overline{v})^2) + (1-k^2 S(\overline{u})^4)(S(\overline{u})^2 + \Theta(\overline{v})^2)\},$$
$$\varrho x_3 = -2S(u)C(u)D(u)\{S(\overline{u})^2 + \Theta(\overline{v})^2\}.$$

in denen wiederum $S(vi) = i\Theta(v)$ gesetzt ist.

Unter den Breitencurven ist auch hier diejenige ausgezeichnet, längs welcher die Punkte den constanten Werth $\pm\frac{\omega' i}{4}$ haben. Diese Curve ist der *unpaare Zug derjenigen Hesse'schen Curve, welche durch Correspondenz 1ter Art aus der eintheiligen Curve als Cayley'scher* folgt. Die Lage derselben ist früher bereits bestimmt: sie besitzt einen paaren Zug, der, innerhalb des reellen dreispitzigen Zuges denselben tangirend gelegen, als Breitencurve zunächst nicht zur Bedeutung kommt. Das Auftreten des anderen unpaaren Zuges aber gestattet eine einfache Uebersicht von der Anordnung der Breitencurven sich zu machen. Jede reelle Tangente schneidet diesen Zug in einem und nur in einem reellen Punkte, da immer zwei Schnittpunkte auf dem Ovale dieser Curve liegen. Man denke sich nun den dreispitzigen Zug im Endlichen geschlossen und betrachte eine reelle Tangente, deren Schnittpunkte mit dem unpaaren Theile der C_3 auf der rechten Seite der Randcurve gelegen sei. Zunächst lagern sich die Breitencurven gleichfalls im Endlichen geschlossen um den dreispitzigen Zug herum, der Gestalt derselben sich annähernd und daher 6 reelle Wendepunkte besitzend. Die auf der linken Seite gelegenen Schnitte mit der Tangente convergiren rasch zum Unendlichen, die Breitencurven gehen alsbald durch das Unendliche hindurch, um auf der rechten Seite der Hesse'schen Curve heraus zu treten. Diese beiden, einer und derselben Curve angehörigen, nur scheinbar getrennten Züge rücken dann schliesslich, wenn der Zug der Hesse'schen Curve erreicht ist, in diese unpaare Linie zusammen.

Die allgemeinen Sätze über die wesentlichen projectivischen Eigenschaften des Systemes der Curven 6ter Ordnung behalten, wenn man auch hier auf die algebraisch vollständige Gleichung eingeht, selbstredend ihre Gültigkeit; es mag daher gestattet sein, nur noch die hinsichtlich der Lage abweichenden Beziehungen kurz zusammengefasst auszusprechen:

Die Hauptcoincidenzcurven des Connexes Q einer eintheiligen Curve 3ter Classe bilden in ihrem reellen Gebiete ein System von eintheiligen Curven 6ter Ordnung. In der Gesammtheit lassen sich hier nur *drei* Gruppen von Curven unterscheiden, während bei einer zweitheiligen Fundamentalcurve *vier* unterschiedlich auftreten. Die *eine Gruppe* liegt mit ihren reellen Theilen vollständig innerhalb der gegebenen Curve, dieselbe in je sechs reellen Punkten tangirend; jede Curve besitzt drei eigentliche

reelle Doppelpunkte und wird von jeder Tangente in vier reellen Punkten geschnitten. Die *zweite Gruppe* besteht aus lauter Curven, die eintheilig jedoch mit drei isolirten Punkten vollständig ausserhalb der Fundamentalcurve, nur in zwei reellen Punkten die Tangenten schneidend, verlaufen; dagegen enthält die *dritte Gruppe* völlig imaginäre Curven, die je sechs reelle Punkte, ausserhalb der ursprünglichen Curve befindlich, besitzen.

Der Ort der Wendepunkte wird auch hier von der Cayley'schen Curve der Fundamentalcurve gebildet. Während jedoch bei einer zweitheiligen Curve die zugehörige Cayley'sche nothwendig ebenfalls zweitheilig sein muss, wie schon daraus hervorgeht, dass dort Wendepunkte theils auf der Ringfläche, theils ausserhalb derselben gelegen sind, lässt sich hier für die eintheilige Curve eine entsprechende Aussage über die Gestalt der Cayley'schen Curve nicht machen. Der Beweis dieser Behauptung ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die Hesse'sche Curve einer *zweitheiligen* Curve immer *eintheilig*, dagegen einer *eintheiligen* stäts *zweitheilig* sein muss; der eintheiligen Hesse'schen Curve ist aber, wie früher bestimmt wurde, nur eine reelle Cayley'sche Curve, und zwar eine zweitheilige, zugeordnet*).

Die Lage der Cayley'schen Curve zur zweitheiligen Fundamentalcurve ist damit bestimmt, dass ihr paarer Zug, auf der Ringfläche gelegen, durch die drei reellen Rückkehrpunkte geht, ihr unpaarer Zug ganz ausserhalb der Ringfläche verläuft. Die innerhalb des dreispitzigen Zuges gelegenen Curvenzüge besitzen also dort keine reellen Wendepunkte. Für die Lage der Cayley'schen Curve zur eintheiligen Fundamentalcurve sind drei verschiedene Fälle möglich. Erstlich kann die Cayley'sche Curve zweitheilig so gelegen sein, dass das Oval durch die drei Rückkehrpunkte hindurchgeht, der unpaare Zug, ohne die Fundamentalcurve zu schneiden, ausserhalb verläuft. Dies tritt dann ein, wenn die Cayley'sche Curve durch Correspondenz 1^{ter} Art aus der Hesse'schen folgt. Die innerhalb der Fundamentalcurve gelegenen C_6 besitzen alsdann keine reellen Wendepunkte. Zweitens kann das Oval der zweitheiligen Cayley'schen Curve innerhalb des dreispitzigen Zuges liegen, der unpaare Zug die Fundamentalcurve in den drei reellen Punkten schneiden. In diesem Falle ist die Cayley'sche

---

*) Diese Relation zwischen einer Fundamentalcurve nnd ihrer Hesse'schen ergiebt sich aus dem Satze, der aus der Gleichung der Polconic einer Geraden u, $\Theta = (abu)^2 a_x b_x$ folgt, dass auf einem Doppelelement der Hesse'schen Curve die beiden correspondirenden Punkte äquianharmonisch zu den drei Schnittpunkten dieser Linie mit der Fundamentalcurve gelegen sind. Schneidet also die harmonische Polare eines Wendepunktes die Fundamentalcurve in drei reellen, so schneidet sie die Hesse'sche in zwei imaginären Punkten und umgekehrt.

durch Correspondenz 2ter Art aus der Hesse'schen abgeleitet; das System der C_6 besitzt innerhalb der gegebenen Curve theilweis reelle Wendepunkte. Schliesslich ist noch die Möglichkeit vorhanden, dass die Cayley'sche Curve eintheilig verläuft, wenn sie durch Correspondenz dritter Art aus der Hesse'schen construirt ist; innerhalb des dreispitzigen Zuges sind dann auch hier keine reellen Wendepunkte vorhanden*).

Die geometrische Construction des gesammten Systemes aus der vorliegend gedachten K_3 gestaltet sich hier noch einfacher denn früher. Ist aus den gegebenen Tangenten die reelle Hesse'sche Curve dargestellt, so hat man aus den so bestimmten vier Punkten jeder Tangente, von denen zwei der Cayley'schen, zwei der Hesse'schen Curve zugehören, entsprechende Tripel zu bilden, zu welchen alsdann Punkte mit gleichem Doppelverhältniss construirt werden. Der zweite auf der nämlichen Tangente befindliche Punkt wird nach dem Satze von der harmonischen Lage zum Hesse'schen Punktepaar aus dem erst gefundenen erhalten.

§ 5.

Ueber die eindeutigen algebraischen Transformationen der Curven dritten Grades in sich selbst.

Denkt man sich das gesammte Gebiet der Curve mit Parameterwerthen überdeckt, so ist die Gruppe der *eindeutigen algebraischen Transformationen* einer Curve in sich selbst damit erschöpft, dass einem Elemente mit dem Argumente u das Element $\pm u + C$ zugeordnet wird**), wenn wiederum C eine beliebige Grösse innerhalb des von ω und $\omega' i$ gebildeten Periodenparallelogrammes bedeutet. Dass in der That anderweitige eindeutige algebraische Transformationen nicht mehr vorhanden sind, wird ersichtlich, wenn man versucht, das Element in ein anderes überzuführen, dessen Argument eine *beliebige rationale Function von u ist.* Schon die Annahme einer *allgemeinen linearen* Beziehung ergiebt eine Vieldeutigkeit; denn soll die Grösse u in $nu + C$ transformirt werden, so wird das Element $u + \frac{m\omega + m'\omega' i}{n}$, wobei m und m' beliebige ganze Zahlen kleiner als n bedeuten, in das nämliche übergeführt, so dass die Transformation *ein – n^2deutig* werden würde. *Eine*

*) Ob eine eintheilige Fundamentalcurve, für welche immer $R = T^2 - \frac{S^3}{6} > 0$ ist, eine ein- oder zweitheilige Cayley'sche Curve besitzt, hängt, *analytisch* formulirt, davon ab, ob $S < 0$ oder $S > 0$ ist, wie aus der für $R^{(\varkappa H + \lambda P)}$ bestehenden Formel folgt. Math. Annalen Bd. VI, p. 502.

**) Salmon a. a. O. p. 395 ff.

Curve 3ter Grades lässt also zwei und nur zwei Reihen von unendlich vielen eindeutigen algebraischen Transformationen in sich selbst zu, entsprechend den beiden Werthen des Vorzeichens im Ausdrucke $\pm u + C$*).

Diese beiden Transformationen bilden zusammengefasst eine in sich geschlossene Gruppe, so zwar, dass die Transformation, welche durch das $+$ Zeichen charakterisirt ist, bei beliebiger Wiederholung immer eine Transformation derselben Art liefert, während eine zweimalige Ausführung der durch das $-$Zeichen charakterisirten Art in die andere hinüberleitet. Bei der ersten Art erzeugen die Schnittpunkte entsprechender Tangenten eine der Curven 6ter Ordnung, deren vollständiges System im vorhergegangenen bestimmt wurde, und jede dieser Curven wird durch die Transformationen beider Arten in sich transformirt. Innerhalb der zweiten Art schneiden sich die zugeordneten Tangenten stäts auf der nämlichen Tangente der K_3, deren Parameterwerth gleich $-C$ ist, und die 4 Tangenten, denen die Werthe $\frac{C}{2}$, $\frac{C}{2}+\frac{\omega}{2}$, $\frac{C}{2}+\frac{\omega' i}{2}$, $\frac{C}{2}+\frac{\omega+\omega' i}{2}$ zukommen, sind durch die Transformation $-u+C$ sich selbst zugeordnet**).

Um eine geometrische Uebersicht von der Bewegung zu erhalten, in welche die Gesammtheit der Curve durch diese eindeutigen Transformationen versetzt wird, ist das durch die Ringfläche (hyperbolische Fläche) gelieferte vollständige Bild derselben zu betrachten. Wenn

---

*) Wird die Beschränkung aufgehoben, dass die eindeutigen Transformationen zugleich *analytische* sein sollen, so lassen sich zweimal zweifach unendlich viele Reihen in folgender Weise angeben: Indem man den allgemeinen Parameterwerth $u+iv$ eines beliebigen Elementes in der Form $a\omega + a'\omega' i$ auffasst, wobei a und a' alle Werthe zwischen 0 und 1 bedeuten, wird diesem Elemente ein anderes $b\omega + b'\omega' i + C$ wechselseitig eindeutig zugeordnet, wenn die Bedingung aufgestellt wird, dass b und b' umkehrbar eindeutige Functionen von a und a' sein sollen; man hat demnach zu setzen:

$$b = pa + qa',$$
$$b' = p'a + q'a',$$

und die Relationen einzuführen, dass die ganzen Zahlen pq, $p'q'$ der Bedingung $pq' - p'q = \pm 1$ genügen. Innerhalb dieser Gesammtheit, bei welcher die Transformationsgleichungen im Allgemeinen nicht mehr als Functionen *einer* complexen Variabeln erscheinen, sind die beiden oben aufgestellten Reihen durch die Werthe $p = q' = \pm 1$ und $p' = q = 0$ dargestellt.

**) Die Zahl $3p-3$ der Moduln, welche eine Curve vom Geschlechte p im Allgemeinen besitzt, wird bekanntlich für $p = 0$, 1 unrichtig. Der Grund dafür kann nach einer Bemerkung, die mir Herr Klein machte, eben in den eindeutigen Transformationen erblickt werden, welche diese Curven in sich überführen. Dieselben sind bei den elliptischen, wie im Texte ausgeführt wird, in einfach-, bei den rationalen Curven in dreifach-unendlicher Zahl vorhanden und dem entsprechend ist die Zahl der Moduln in den beiden Fällen bez. um 1 oder 3 zu erhöhen.

die Constante C von der Form $\frac{\omega}{a}$, also eine reelle Grösse ist, so werden die reellen Elemente immer wieder in reelle übergeführt, und die Gruppen imaginärer Tangenten, welche durch die Breitencurven vorgestellt sind, bleiben bei den Transformationen $+u+C$ wie auch $-u+C$ erhalten. Die Bewegung auf der Ringfläche ist also durch ein Fliessen längs der Breitencurven veranschaulicht, bei welchem innerhalb der ersten Art kein Punkt, dagegen innerhalb der zweiten Art je zwei Punkte auf jeder Breitencurve fest bleiben. — Ist $C=\frac{\omega' i}{a'}$, so werden in der Transformation $+u+C$ die durch die Meridiancurven gebildeten Gruppen nicht geändert, die Bewegung erfolgt durch ein Fliessen der Elemente längs dieser Curven; wobei der dreispitzige Zug in die Breitencurve $\frac{\omega' i}{a'}$, der ovale in die zugehörige $\frac{\omega' i}{a'}+\frac{\omega' i}{2}$ übergeht. Ist die Transformation von der Form $-u+\frac{\omega' i}{a'}$ oder allgemein $\pm u+\frac{\omega}{a}+\frac{\omega' i}{a'}$, so bewegen sich die Elemente auf Curven, die gewissermassen als Schraubenlinien auf der Ringfläche sich winden, und aus einem Fortschreiten längs der Meridian- und Breitencurven combinirt werden können; die Bewegung vollzieht sich jedoch immer nur auf die Weise, dass jede durch die Breitencurven gebildete Gruppe in ihrer Gesammtheit in eine andere übergeführt wird. Als wesentlichstes Resultat aus diesen Betrachtungen ergiebt sich demnach der Schluss:

Durch jede eindeutige algebraische Transformation der Curve in sich selbst gehen im Allgemeinen die reellen Elemente in imaginäre über, deren reelle Träger jedesmal auf einer algebraischen Curve 6^{ter} Ordnung liegen, während umgekehrt die eine Gruppe derjenigen imaginären Elemente, deren Träger durch die Punkte dieser Curve gegeben sind, in das reelle Elementensystem übergeführt wird.

Unter den eindeutigen Transformationen zeichnen sich in besonderer Weise diejenigen aus, welche zugleich eine *lineare Transformation der gesammten Ebene* bilden*). Die beiden von einem Punkt einer Rückkehrtangente ausgehenden Tangenten liegen bekanntlich harmonisch zu der Rückkehrtangente und der Verbindungslinie dieses Ausgangspunktes mit dem harmonischen Polarpunkte. Vertauscht man also je zwei solcher Tangenten, so wird einerseits die Curve in sich selbst transformirt, andererseits tritt dadurch eine Collineation der gesammten Geradenebene ein. Die bei dieser Collineation festbleibenden Elemente, welche zugleich der Curve angehören, werden durch die

*) F. Klein: Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen Math. Annalen Bd. IV, p. 353 ff.

bezügliche Rückkehrtangente und durch die drei Tangenten geliefert, welche sich vom harmonischen Polarpunkte aus ziehen lassen, deren Berührungspunkte also auf der Rückkehrtangente gelegen sind. Combinirt man je zwei dieser *neun* Transformationen, so ergeben sich neun weitere Transformationen (die identische mit eingerechnet), so dass eine Gruppe von *achtzehn* Transformationen entsteht, die in sich geschlossen ist. Bei den acht neuen abgeleiteten Transformationen sind die festbleibenden Elemente erstlich die Verbindungslinie der beiden combinirten harmonischen Polarpunkte, sodann dasjenige Linienpaar, welches, vom Durchschnitt der combinirten Rückkehrtangenten aus gezogen, in beiden Systemen harmonisch liegt zu der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Collineationscentrum und der Collineationsaxe; das heisst, durch je zwei dieser Collineationen bleiben die Seiten eines von drei harmonischen Polarpunkten gebildeten Dreiecks ungeändert. Die Seiten eines jeden der drei übrigen Dreiecke gehen dabei cyklische Vertauschungen ein; auf der Curve selber sind keine festbleibenden Elemente vorhanden. Durch diese 18 linearen Transformationen entstehen Systeme von 18 conjugirten Elementen auf der Curve, deren Parameterwerthe durch folgende Grössen gegeben sind*):

$$
\begin{array}{lll}
u, & u+\frac{\omega}{3}, & u+\frac{2\omega}{3}, \\
-u, & -u+\frac{\omega}{3}, & -u+\frac{2\omega}{3}, \\
u+\frac{\omega' i}{3}, & u+\frac{\omega}{3}+\frac{\omega' i}{3}, & u+\frac{2\omega}{3}+\frac{\omega' i}{3}, \\
-u+\frac{\omega' i}{3}, & -u+\frac{\omega}{3}+\frac{\omega' i}{3}, & -u+\frac{2\omega}{3}+\frac{\omega' i}{2}, \\
u+\frac{2\omega' i}{3}, & u+\frac{\omega}{3}+\frac{2\omega' i}{3}, & u+\frac{2\omega}{3}+\frac{2\omega' i}{3}, \\
-u+\frac{2\omega' i}{3}, & -u+\frac{\omega}{3}+\frac{2\omega' i}{3}, & -u+\frac{2\omega}{3}+\frac{2\omega' i}{3}.
\end{array}
$$

Daraus folgt aber erstlich: Wenn ein Punkt u durch eine dieser linearen Transformationen überhaupt aus seiner Breitencurve heraustritt, so gehen die reellen Elemente in imaginäre über, deren reelle Träger auf dem Paare $\pm\frac{\omega' i}{3}$ und $\pm\frac{\omega' i}{6}$ gelegen sind; ferner: der Durchschnitt entsprechender Tangenten liegt bei den linearen Transformationen der Ebene entweder auf einer der 9 Rückkehrtangenten, oder auf denjenigen Curven 6^{ter} Ordnung, für welche C die Werthe: $\pm\frac{\omega}{3}$,

*) Man erkennt aus diesen Gleichungen und den in § 3. sub 3, 4, 7 gegebenen, dass die Gruppen von Tangenten, deren Schnittpunkte die Berührungs- und Doppelpunkte einer C_6 liefern, immer Systeme von 18 einander conjugirten Elementen bilden.

$\pm \frac{\omega' i}{3}$, $\pm \frac{\omega + \omega' i}{3}$, $\pm \frac{2\omega + \omega' i}{3}$ erhält. Diese 4 Curven sind, nach der in § 3. gegebenen Bestimmung, dadurch ausgezeichnet, dass bei ihnen je drei Doppelpunkte zu einem dreifachen Punkte sich vereinen, der alsdann in einer der Ecken der vier Dreiecke gelegen ist: ihre Beziehungen zu diesen Dreiecken können noch näher bestimmt werden, und lassen sich am einfachsten erschliessen, wenn von der oben genannten Eigenschaft der Curve $C = \frac{\omega' i}{3}$ ausgegangen wird. Legt man bei der gegebenen Curve 3ter Classe die andere bekannte Form zu Grunde, bei welcher das reelle Dreieck gebildet aus den Schnittpunkten je dreier Rückkehrtangenten, von denen eine reell, die beiden anderen conjugirt imaginär sind, zum Coordinatendreieck, der Durchschnitt der drei reellen Rückkehrtangenten zum Einheitspunkt gewählt ist:

$$a(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) + 6\,b u_1 u_2 u_3 = 0, \tag{1}$$

so ist eine der linearen imaginären Transformationen dadurch gegeben, dass sie die Coordinaten: $u_1\ u_2\ u_3$ in $u_1\ \varepsilon u_2\ \varepsilon^2 u_3$ überführt, wenn $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ bedeutet. Jede Tangente von der Form: $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ transformirt sich in $u_1 x_1 + \varepsilon u_2 x_2 + \varepsilon^2 u_3 x_3 = 0$ und der reelle Punkt dieser Linie ist aus den Gleichungen zu berechnen:

$$u_1 x_1 - u_2 x_2 = 0, \qquad u_2 x_2 - u_3 x_3 = 0, \tag{2}$$

oder auch

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= u_2 u_3, \\ \varrho x_2 &= u_3 u_1, \\ \varrho x_3 &= u_1 u_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Mithin ist die Gleichung der gesuchten Curve 6ter Ordnung:

$$a(x_2^3 x_3^3 + x_3^3 x_1^3 + x_1^3 x_2^3) + 6\,b x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 0. \tag{4}$$

Geometrisch werden diese Curven demnach so construirt, dass die Pole der gegebenen Tangenten in Bezug auf das zu Grunde gelegte Wendepunktsdreiseit bestimmt werden. Die Verbindungslinien jeder Ecke mit den drei gegenüberliegenden Wendepunkten sind, wie aus dieser Gleichung folgt, die Tangenten der Curve in dem dreifachen Punkte. Von den beiden reellen Curven enthält mithin die eine drei reelle dreifache Punkte so, dass in jedem derselben nur *eine* Tangente reell ist, die andere *einen* reellen dreifachen Punkt mit drei reellen Tangenten, wie schon aus der Stellung beider Curven innerhalb des gesammten Systemes hervorging*).

*) Die Polarenbildung in Bezug auf ein Dreieck, in welchem zwei Seiten conjugirt imaginär sind, bietet keine Schwierigkeit für die geometrische Aus-

Diese vier Curven stehen weiter in näherer Beziehung zu den *Inflexionstripeln*. Bekanntlich wird das System derjenigen achtzehn Curvenelemente, in welche eines durch die linearen Transformationen übergeführt werden kann, in 24 solcher Tripel eingetheilt, indem bei einer Curve *3ter Ordnung* diejenigen drei Elemente zusammengefasst werden, welche durch Projection eines Punktes von drei auf einer Geraden liegenden Wendepunkten aus erzeugt werden. Die Projection dieser drei Punkte von den nämlichen Wendepunkten aus liefert drei neue Punkte, welche das zum ersten *connexe* Tripel bilden. Den vier Wendepunktsdreiseiten entsprechend werden alsdann die 24 Tripel in vier Arten getheilt*). Geht man z. B. von den drei Wendepunkten: 0, $\frac{\omega}{3}$, $\frac{2\omega}{3}$ aus, so bilden die Projectionen eines Punktes u: $-u$, $-u-\frac{\omega}{3}$, $-u-\frac{2\omega}{3}$ solch ein Tripel, während das diesem connexe aus den Punkten u, $u-\frac{\omega}{3}$, $u-\frac{2\omega}{3}$ sich zusammensetzt. Demnach folgt, wenn man von einer Curve *3ter Ordnung* als Fundamentalcurve ausgeht, aus den für die Verbindungslinien je dreier solcher Punkte bewiesenen Sätzen:

*Die Seiten der Inflexionstripel der vier Arten umhüllen bezüglich vier Curven 6ter Classe, deren Geschlecht $p = 1$ ist, und von denen jede durch Polarenbildung der Curvenpunkte mit Bezug auf eines der vier Wendepunktsdreiseite erzeugt wird***).

Diese Eigenschaft der vier ausgezeichneten Curven 6ter Ordnung dass eine einfach unendliche Zahl von Dreiecken der Fundamentalcurve umgeschrieben, diesen Curven eingeschrieben werden kann, ist

---

führung, wenn die imaginären Linien als Doppelelemente einer elliptischen Involution bestimmt sind; bei dem Wendepunktsdreiseit ist diese Involution durch die Verbindungslinien des reellen Eckpunktes mit den gegenüberliegenden Wendepunkten und durch die zugehörigen harmonischen Polarlinien gegeben. Ist C der reelle Eckpunkt, w_1p_1, w_2p_2, w_3p_3 die Paare der elliptischen Involution auf der reellen Gegenseite, so wird der Pol einer beliebigen Linie $B'C'$, welche die reelle Dreiecksseite in C' schneidet, dadurch gefunden, dass zu C' der in der Involution w_1p_1, w_2p_2 zugehörige Punkt C'' construirt und die Linie CC'' bis zum Durchschnitt Q' mit $B'C'$ gezogen wird; bestimmt man sodann auf dieser Geraden einen Punkt Q so, dass $(CQ'C''Q) = -1$, ferner P nach der Relation $(CQPC'') = -1$, *so ist P der gesuchte Polarpunkt.*

*) In übersichtlicher Weise sind diese Tripelbildungen dargestellt von Gent: „Ueber den Zusammenhang derjenigen Punkte, in welchen Kegelschnitte eine allgemeine Curve 3ter Ordnung osculiren." Zeitschrift von Schlömilch Bd. 17.

**) In den 72 gemeinsamen Tangenten dieser vier Curven mit jeder der drei Cayley'schen fallen die Dreiecksseiten zusammen mit denjenigen Geraden, welche die Seiten der Dreiecke bilden, die der Hesse'schen Curve einbeschrieben, einer der Cayley'schen umbeschrieben sind. Vgl. Anmerk. p. 12.

einer Ausdehnung auf das ganze System selbstverständlich fähig, da es aus der Bildung dieser Curven ohne weiteres hervorgeht. Jedoch mag es gestattet sein, die Art und Weise ihrer Gruppirung noch durch einige Bemerkungen deutlicher hervortreten zu lassen.

Ist die Grösse C von der Form $\frac{m\omega + m'\omega' i}{n}$, so dass m, m' und n ganze Zahlen sind, die keinen allen dreien gemeinsamen Factor besitzen, und wird n zunächst als *ungerade* vorausgesetzt, so bilden die zugeordneten Tangenten:

$$u, \quad u + C, \quad u + 2C, \cdots u + (n-1)C$$

ein in sich geschlossenes System von n Seiten. Die $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte dieses vollständigen n-Seites liegen sodann zu je n auf denjenigen $\frac{n-1}{2}$ Curven 6^{ter} Ordnung, deren Constante C' die Werthe besitzen:

$$\pm C, \quad \pm 2C, \cdots \pm \frac{n-1}{2} C.$$

Wenn dagegen n eine *gerade* Zahl ist, so bilden die zusammengehörigen Tangenten eine n-Seit, in welchem von den $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Eckpunkten $\frac{n}{2}$ auf einer der drei Hesse'schen Curven, die übrigen $\frac{n \cdot (n-2)}{2}$ zu je n auf $\frac{n-2}{2}$ Curven 6^{ter} Ordnung gelegen sind, deren Constante C' die Werthe erlangen:

$$\pm C, \quad \pm 2C \cdots \pm \frac{n-2}{2} C.$$

Auf welcher der drei Hesse'schen Curven in diesem Falle die Schnittpunkte des n-Seites liegen, hängt davon ab, ob entweder m oder m' gerade, oder beide gleichzeitig ungerade sind.

Die nähere Untersuchung dieser Polygonbildung durch eindeutige Gruppirung der Tangenten führt zu Sätzen, wie z. B. über die Beziehung zweier connexer Polygone, über die Anzahl der Systeme von n-Seiten, welche die für die Inflexionstripeln bereits aufgestellten in bemerkenswerther Weise verallgemeinern*).

*) Die Anzahl dieser Systeme von n-Seiten repräsentirt die Zahl nicht äquivalenter Classen der Transformationen vom Grade n, denen das elliptische Integral unterworfen werden kann. Unter diesen Gesichtspunkt gestellt tritt dann auch die fundamentale Bedeutung der *vier* Arten von Inflexionstripeln ins Licht.

§ 6.

Ueber mehrdeutige Correspondenz zwischen den Curvenelementen und über die Hauptcoincidenzcurven der Connexschaar $\varkappa Q^2 + \lambda\Theta^3 = 0$.

An die Betrachtung der eindeutigen Transformationen schliesst sich die erweiterte Untersuchung über *mehrdeutige* Beziehungen der Curvenelemente an. Der Typus dieser verallgemeinerten Correspondenz ist durch die Werthsetzung $V = \frac{m}{n} U + C$ gegeben; soll dieselbe eine algebraisch vermittelte sein, so müssen m und n ganze Zahlen bedeuten, die als relativ prim vorausgesetzt werden dürfen, und jede andere mehrdeutige algebraische Verbindung von Curvenelementen geht aus der Combination der durch diese Form gelieferten Relationen hervor. In dieser Zuordnung entsprechen *jedem Elemente U n^2 Elemente V, umgekehrt gehören zu jedem V-Werthe m^2 Elemente U, die Beziehung ist also n^2-m^2-deutig.* Durch den Schnitt entsprechender Tangenten wird abgesehen von den $(n-m)^2$ fest bleibenden Elementen eine Curve erzeugt, deren Grad sich wiederum auf die Weise finden lässt, dass man die Anzahl der Elementenpaare bestimmt, die sich auf einer festen Tangente schneiden. Die Zahl dieser Schnittpunkte ist $(m+n)^2$ und mit den $n^2 + m^2$ Punkten, die durch diejenigen Tangenten entstehen, welche dem U zugeordnet sind und durch die anderen, denen umgekehrt U angehört, ergiebt sich also der *Grad der gesuchten Curve gleich* $2(m^2 + mn + n^2)$. Untersucht man die Gestalt und Lage dieser Curven, so ist in Bezug darauf wiederum ein wesentlicher Unterschied zwischen den zwei- und eintheiligen Fundamentalcurven zu machen: Im *ersten* Falle stellt die Constante C, falls sie eine reelle Grösse bedeutet (also von der Form $\frac{\omega}{a}$ ist), bei allen Werthen von m und n Curven mit zwei paaren Zügen dar, die dann sowohl innerhalb des dreispitzigen Zuges als auch ausserhalb des Ovales verlaufen. Ist C dagegen eine complexe Zahl von der Form $\frac{\omega}{a} + \frac{\omega' i}{2}$, so werden unter der Bedingung, dass m und n beide ungerade Zahlen sind, und nur unter dieser, Curven geliefert, welche sich mit *zwei unpaaren* Zügen ausserhalb des Ovales erstrecken, derart dass eine Tangente am inneren Zuge der Fundamentalcurve diese Theile in je n und m, eine Tangente am Ovale die nämlichen Theile in je $n + 2m$ und $m + 2n$ reellen Punkten schneidet. Für jeden andersartigen Werth von C werden die Curvensysteme imaginär. — Im *zweiten* Falle können sämmtliche Curven nur *eintheilig* sich gestalten, wenn sie überhaupt reell sind, da das im ersten Falle vorhandene, ausserhalb des Ovales gelegene Gebiet hier eben imaginär geworden ist. Auf der Ringfläche

(hyperbolischen Fläche) sind keine Curven gelegen, mit Ausnahme des schon erledigten Falles, dass $m = n = 1$. Jede unter ihnen tangirt die Fundamentalcurve in $6(m^2 + mn + n^2)$ Punkten, unter denen $(n - m)^2$ durch die Berührungspunkte der sich selber entsprechenden Elemente geliefert sind. Für feste Werthe von m und n gehen bei variabelen Werthen von C im Allgemeinen *durch jeden Punkt der Ebene 6 Curven*, wie daraus hervorgeht, dass man aus drei Elementen auf drei Weisen Gruppen zu zweien bilden, und in diesen Gruppen jede Tangente als aus der anderen abgeleitet betrachten kann; bei den wechselseitig eindeutigen Gruppen fielen je zwei dieser Curven desshalb zusammen, weil die Constanten $+ C$ und $- C$ derselben Curve angehörten. Liegt der Ausgangspunkt auf der Fundamentalcurve, so gehen durch denselben nur 3 Curven in der mit der ursprünglichen zusammenfallenden Richtung.

Um die Gleichungen des gesammten Systemes zu bestimmen ist in den Fundamentalformen (I) des § 1. für u der Werth $\frac{(n+m)u+C}{2}$, für v der Werth $\frac{(n-m)u-C}{2}$ zu setzen; die Curven sind demnach vom Geschlecht $p = 1$, da die Coordinaten ihrer Punkte als *rationale* Ausdrücke der doppelt periodischen Functionen $S(u)$ und $\frac{dS(u)}{du}$ dargestellt sind. Setzt man $n + m = m'$, $n - m = n'$ und zählt in den Entwickelungen der Functionen $S\left(\frac{m'}{2}u\right)$, $S\left(\frac{n'}{2}u\right)$ ferner $C\left(\frac{m'}{2}u\right) \cdot D\left(\frac{m'}{2}u\right)$ und $C\left(\frac{n'}{2}u\right) \cdot D\left(\frac{n'}{2}u\right)$ den Grad, bis zu welchem die Coordinaten eines Punktes steigen, so ergiebt sich die Ordnung derselben gleich $\frac{3m'^2+n'^2}{2}$, was mit der Zahl $2(m^2 + mn + n^2)$ übereinstimmt.

Mit Aufstellung der *allgemeinen linearen* Beziehung zwischen den Parameterwerthen der Elemente ist die Frage nach den Hauptcoincidenzcurven des Connexes $\Theta = (\alpha\beta x)^2 u_\alpha u_\beta$ einer in der Form $f = u_\alpha^3$ gegebenen Curve 3ter Classe oder die allgemeinere Frage nach denselben Curven der Connexschaar $\varkappa Q^2 + \lambda\Theta^3 = 0$ ihrer Beantwortung nahe gekommen. Bedeutet in der Gleichung $V = mU + C$ m irgend eine beliebige reelle oder complexe Zahl, so ist durch den Schnitt von U mit V eine algebraische oder transscendente Curve erzeugt, so dass durch jeden Punkt der Ebene bei variabelem Werthe von C für ein constantes m 6 Curven hindurchgehen. Bei einer beliebigen *eindeutigen Transformation der ursprünglichen Curve* wird nicht mehr jede einzelne dieser Curven, wohl aber die *zu demselben Werthe von m gehörige Reihe in sich übergeführt*. Denn setzt man für u den Werth $u + C'$, so geht der Punkt $(u, mu + C)$ in $(u + C', mu + C' + C)$ über, woraus sich die vorangestellte Behauptung als gültig erweist. Die 6 durch jeden

Punkt der Ebene gehenden Richtungen einer Curvenreihe m bilden mithin eine Covariante der binären cubischen Form, welche geometrisch durch die drei von diesem Punkte an die Fundamentalcurve gehenden Tangenten dargestellt ist.

Das nämliche ist aus einer andersartigen Betrachtung erschliessbar*). Durch die Relation (I) des § 1., bei welcher die Beschränkung des Werthes v aufgehoben und die in der symbolischen Form $\varrho x_i = \chi_i(u\,v)$ geschrieben werden möge, ist jeder Punkt der Ebene durch zwei Coordinaten u v dargestellt, so zwar dass jedwedem Punkte drei Coordinatenwerthe zukommen. Sind nämlich die Grössen $u = u_0$, $v = v_0$ fixirt, so ist der zugehörige Punkt durch den Schnitt der beiden Tangenten $u_0 - v_0$ und $u_0 + v_0$ geliefert. Geht man nun von diesem Punkte aus, so erhalten sämmtliche Punkte der beiden Tangenten, durch deren Schnitt der Ausgangspunkt gewonnen erscheint, die Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} (v - v_0) + (u - u_0) = 0\,. \\ (v - v_0) - (u - u_0) = 0\,. \end{cases}$$

Denn bindet man v an diese Bedingungen, so wird im ersten Falle, da $u + v = u_0 + v_0$, $u - v = -2u - u_0 - v_0$ ist, bei variabelem Werthe von u jeder Punkt auf der Tangente $u_0 + v_0$, im zweiten Falle aus dem analogen Grunde auf $u_0 - v_0$ gelegen sein. Die dritte Tangente wird durch die Bedingung repräsentirt:

$$(2) \qquad u - u_0 = 0\,.$$

Führt man alsdann irgend eine lineare Beziehung zwischen u und v ein, so erhält man Curven der oben genannten Reihen, in der Form

$$(3) \qquad (v - v_0) + \varrho\,(u - u_0) = 0\,,$$

deren Punkte wiederum so zu bilden sind, dass die Tangente

$$u + \varrho u - (\varrho u_0 + v_0)$$

mit

$$u - \varrho u + (\varrho u_0 + v_0)$$

zum Durchschnitt gebracht wird. Aus der Zusammenstellung der Gleichungen (1, 2 und 3) geht alsdann hervor, dass das Doppelverhältniss der Curvenrichtung zu der dritten Tangente in Bezug auf das zusammengehörige Paar durch den Ausdruck:

$$(4) \qquad \frac{\varrho - 1}{\varrho + 1} = d$$

gemessen wird, und in jedem Punkte dieser Curve constant bleibt. Die zweite Curve der nämlichen Reihe, deren Richtung das gleiche Doppelverhältniss bildet, falls das zusammengehörige Tangentenpaar

*) Vgl. hiezu § 2.

unter sich vertauscht wird, folgt, wenn man für ϱ den Werth $-\varrho$ substituirt; die anderen beiden Paare ergeben sich bei gleichen Werthen von ϱ durch eine Aenderung der paarweisen Gruppirung.

Es ist demnach durch diese Untersuchungen das Resultat gewonnen:

Bildet man in jedem Punkte der Ebene zu der binären cubischen Form f, welche durch die drei Tangenten einer Curve 3ter Classe vorgestellt wird, das Büschel $\varkappa Q^2 + \lambda\Theta^3 = 0$*), so entsteht, da diese Formen sowohl Punkt- wie Liniencoordinaten enthalten, eine Schaar von Connexen 6ter Ordnung und 6ter Classe. Die Hauptcoincidenzcurven dieser Connexschaar werden, falls die Elemente der Fundamentalcurve durch doppelt periodische Functionen eines Parameters u dargestellt sind, dadurch vollständig erhalten, dass man aus diesen Ausdrücken den Schnitt zweier Tangenten mit den Argumenten* $u + v$ *und* $u - v$ *bildet und in den so gewonnenen Gleichungen die lineare Beziehung* $v = \varrho u + C$ *einführt. Die Curvenreihe, welche bei constantem Werthe von* ϱ *hervorgeht, bildet die Hauptcoincidenzcurve eines Connexes, in welchem das Doppelverhältniss jeder Richtung des Sextupels mit den drei zu Grunde liegenden Geraden durch die Grösse* ϱ *eindeutig bestimmt ist.*

Bedeutet ϱ und also auch der Werth d des Doppelverhältnisses eine *reelle rationale* Zahl, so sind in sämmtlichen zugehörigen Connexen die Hauptcoincidenzcurven diejenigen *algebraischen Curven vom Geschlecht* $p = 1$, deren Grad und Verlauf bei der Discussion der mehrdeutigen algebraischen Correspondenz angegeben wurde. Sind dagegen die Grössen ϱ zwar noch *reell*, aber *irrational* gewählt, so ergeben sich *transscendente* Curven, die je nach Art der Grösse C entweder ausserhalb des Ovales oder innerhalb des dreispitzigen Zuges, die Fundamentalcurve sämmtlich in unbegrenzt vielen Punkten tangirend gelegen sind, oder endlich imaginär verlaufen. Für alle rein *imaginären* oder *complexen* Werthe von ϱ werden die Curven gleichfalls transscendent; dabei ist es indess als charakteristisch für diese Curven zu betrachten, dass die Coordinaten ihrer Punkte durch doppelt periodische Functionen, in denen Irrationalitäten auftreten, dargestellt sind. Innerhalb des letztgenannten Gebietes sind reelle Systeme vorhanden, falls ϱ und C beide rein imaginär sind; denn durch die Zuordnung $u + \varrho u + v_0 i$ und $u - \varrho u + v_0 i$ werden alsdann conjugirt imaginäre Tangenten combinirt. Unter der Bedingung, dass das Doppelverhältniss $d = \frac{\varrho - 1}{\varrho + 1}$ zwar eine imaginäre Zahl, jedoch mit dem absoluten Betrage 1 ist, befinden sich demnach auf der Ringfläche Systeme von reellen Curven-

*) Vgl. die betreffenden Abschnitte von Clebsch's Theorie der binären Formen, in welchen für Θ die Bezeichnung Δ gebraucht ist.

reihen. — Erhält insbesondere d den Werth des *äquianharmonischen* Doppelverhältnisses, so werden die dem Connex $\Theta = (\alpha\beta x)^2 u_\alpha u_\beta$ angehörigen Coincidenzcurven geliefert. Die Grösse ϱ wird für diesen Werth gleich $\pm i\sqrt{3}$ und jede Curve tritt in jedem Punkte dreimal gezählt auf. Berücksichtigt man nämlich, dass $\frac{1-\varrho}{1+\varrho}$ in diesem Falle den Werth $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$ hat, so ist ersichtlich, dass in jedem Punkte der Curve den 3 Tangenten der Fundamentalcurve die Bezeichnungen u, εu, $\varepsilon^2 u$ beigelegt werden können, so dass also bei gleicher Constante innerhalb der Reihe derselbe Punkt durch drei Combinationen erreicht wird. Von jedem Punkte gehen demnach nur noch zwei Richtungen von Curven aus, welche die beiden Züge der Fundamentalcurve berührend unbegrenzt oft auf der Ringfläche sich winden. Da jede Curve eine gerade Linie in denjenigen beiden Punkten tangirt, in welchen diese Gerade von ihrem in Bezug auf die Fundamentalcurve gebildeten Polarkegelschnitte geschnitten wird, für die Linien der Hesse'schen Curve diese beiden Punkte aber zusammenfallen und ein Element der Cayley'schen bilden, so ist also auch in dieser Curvenreihe die *Cayley'sche Curve der Ort der Wendepunkte, während die Richtung der Wendetangenten hierbei durch die Linien der Hesse'schen Curve gegeben ist.* Ueberhaupt lässt sich der im § 3. durchgeführte Beweis auf die gesammte Connexschaar ausdehnen und liefert das Resultat: *Die Punkte der Cayley'schen Curve bilden für die Hauptcoincidenzcurven jedes dieser Connexe den Ort der Wendepunkte.*

Unter den reellen Curven auf der Ringfläche ist eine Art besonders einfach zu verfolgender vorhanden, welche dadurch entsteht, dass die rein imaginäre Grösse ϱ gleich $\frac{\omega' i}{\omega} \cdot \frac{m}{n}$ gesetzt wird, wobei m und n *ganze* Zahlen bedeuten. Die beiden combinirten Tangenten lassen sich alsdann, so lange sie conjugirt imaginär sind, in der Form:

$$\frac{\omega}{a} + \frac{\omega' i}{a} \cdot \frac{m}{n} + v_0 i \text{ und } \frac{\omega}{a} - \frac{\omega' i}{a} \cdot \frac{m}{n} - v_0 i$$

darstellen; durch ihren Schnitt wird mithin eine Curve erzeugt, längs welcher das elliptische Integral die Periode ω $n$mal, die Periode $\omega' i$ $m$mal durchläuft, bis es in den Ausgangspunkt zurückkehrt. Die gegebene in sich geschlossene Curve tangirt das Oval sowohl wie den dreispitzigen Zug in je m Punkten, während $2n$ die Zahl dafür angiebt, wie oft jede reelle Tangente des letzteren Zuges in reellen Punkten geschnitten wird. Sämmtliche Curven auf der Ringfläche sind zugleich die Abbildungen beliebiger innerhalb des Periodenparallelogrammes gezogener gerader Linien, auf welche im § 2. hingewiesen wurde, und repräsentiren für die durch eindeutige Transformation hervorgerufene Bewegung das System derjenigen Richtungen, nach welchen die Curven-

elemente verschoben werden können. — Setzt man $\frac{m}{n} = 1$, so ist durch diese Curvenreihe für eine eintheilige Fundamentalcurve dasjenige System gefunden, auf welcher die *complexe* Periode vom Integrale durchlaufen wird, nach dieser Eigenschaft also das den Meridiancurven einer zweitheiligen K_3 entsprechende Gebiet.

Die nähere Untersuchung des Zusammenhanges zwischen der allgemeinen Differentialgleichung der Hauptcoincidenzcurven und der durch geometrische Betrachtung hier gewonnenen Integrationsmethode wird für die algebraische Formulirung von Werth sein müssen. Auch ist in den vorliegenden Untersuchungen die specielle Frage noch nicht erörtert worden, wie sich das complexe Multiplicationstheorem geometrisch deuten lässt, wenn Curvenreihen, die im Allgemeinen als transscendent erkannt worden sind, für gewisse Werthe des Modul algebraisch werden.

Erlangen, im October 1874.

H. A. Schwarz
B 77
Crelle

Verbesserung.

Auf p. 18 im Schlusssatze des § 3 lese man: „so convergirt ... der Werth von $a:b$ im ersten Falle gegen -2, im zweiten Falle gegen 0."

Ueber Complexe und Congruenzen.

Von A. Voss in Darmstadt.

Die folgenden Untersuchungen beschäftigen sich mit den Singularitäten der Plücker'schen Liniencomplexe und Congruenzen, sowie der zu ihnen gehörenden covarianten Flächen von demselben rein liniengeometrischen Gesichtspunkte aus, den ich in einer früheren Arbeit auf die Theorie der windschiefen Flächen angewandt habe*).

Bei der analytischen Behandlung ist auch hier der Kürze halber die kanonische Form der zwischen den sechs homogenen Liniencoordinaten bestehenden Identität

$$(x^2) = 0$$

vorausgesetzt worden. Die algebraischen Methoden, von denen Gebrauch gemacht ist, erhalten ihren besonderen Charakter dadurch, dass diese fundamentale Relation überall in den Vordergrund tritt, sie sind übrigens grösstentheils schon in der genannten Arbeit dargelegt worden. Ich bemerke dabei noch, dass eine ähnliche Behandlungsweise durchführbar ist für alle Mannigfaltigkeiten, deren Schnitt mit einem quadratischen Fundamentalgebilde (von nicht verschwindender Determinante) untersucht werden soll, insbesondere also auch auf die Betrachtung von Curven und Punktsystemen auf einer Fläche zweiten Grades sich anwenden lässt.

Die analytische Darstellung, welche man einem ebenen Strahlbüschel (im allgemeinen Falle überhaupt einer einfach unendlichen linearen Reihe von Elementen der Mannigfaltigkeit) geben kann, führt dann zur Theorie der *Polarcomplexe*, denen im Interesse geometrisch anschaulicher Begriffe eine etwas speciellere Auffassung zu Grunde gelegt ist, als die Plücker'sche**), und damit zu einer Richtung der Untersuchung, *welche der in der allgemeinen Flächentheorie üblichen vollständig parallel läuft, insbesondere also die Abzählung der charakteristischen Zahlen der Singularitäten zum Zweck hat.*

---

*) Math. Annalen Bd. VIII.

**) Neue Geometrie des Raumes S. 294.

Diesen Abzählungen liegen zwei Voraussetzungen zu Grunde. Zunächst die weniger wesentliche, dass die Gleichungen der zu betrachtenden Liniengebilde in ihrer *allgemeinen* Form vorliegen, in welcher sämmtliche Coefficienten völlig willkürliche Werthe haben. Es ist dann noch immer möglich, die Gleichung des Complexes in eine gewisse kanonische Gestalt, die *Clebsch'sche Normalform*, zu bringen, deren Zweckmässigkeit vielfach hervortritt und von der bisher in den liniengeometrischen Untersuchungen kein eigentlicher Gebrauch gemacht zu sein scheint. Die allgemeinen Strahlencomplexe sind, um mit Plücker zu reden, zugleich die allgemeinen Axencomplexe. Sie gehen bei einer dualistischen Raumtransformation zwar im Allgemeinen nicht in sich selbst über, doch ist es erlaubt, sie geradezu als sich selbst reciproke Gebilde zu betrachten, mit der Beschränkung, dass die Doppelverhältnissrelationen, welche zwischen reciproken Gebilden im Sinne der gewöhnlichen projectivischen Geometrie stattfinden, dabei nicht erhalten bleiben. Den allgemeinen Complexen kommt darnach eine vollständige *Dualität* zu, welche sich weiter auf alle Gebilde erstreckt, die in dualistischer Weise mit den Geraden des Complexes in Zusammenhang stehen. Diese Dualität bleibt auch dann noch erhalten, wenn man vollständige Durchschnitte von Complexen betrachtet, welche sich nicht in undualistischen Lagenbeziehungen zu einander befinden u. s. w.

Die Voraussetzung dieser Dualität ist es nun eigentlich, welche für die folgenden Betrachtungen wesentlich ist. Sie erstrecken sich daher, wenn man von den Modificationen absieht, welche Abzählungen überhaupt erleiden, wenn sie sich auf specielle Fälle beziehen sollen, auf alle Complexe, bei denen dieselbe erhalten bleibt, mögen die Constanten dabei völlig willkürliche oder irgendwelche specielle Werthe besitzen, sowie auf alle vollständigen (oder unvollständige von dualistischem Charakter) Durchschnitte von Complexen (Congruenzen, Brennflächen), vorausgesetzt, dass eine undualistische Lage derselben zu einander nicht stattfindet.

Die Singularitäten, welche ich betrachtet habe, sind nun diejenigen, welche unter Voraussetzung völlig allgemeiner Complexe nothwendig auftreten werden. In der That sind die Singularitäten, welche besonderen Complexen zukommen können, so mannigfaltig, dass es zunächst geboten schien, von der gleichzeitigen Untersuchung derselben abzusehen. Von der algebraischen Behandlung sind ferner diejenigen ausgeschlossen, welche sich nicht durch verschwindende Invarianten ausdrücken lassen, eine Beschränkung, der auch bis jetzt die analogen Probleme der Flächentheorie grösstentheils unterliegen.

Jedem Raumpunkte wird durch den Complexkegel — dualistisch jeder Ebene durch ihre Complexcurve — eine gewisse Zahl von Ebenen zugeordnet, die Doppel- und Wendeebenen des Kegels. *Sie bilden*

eine erste Gruppe von Singularitäten des Complexes, deren Gruppirung zu erforschen ist. Ihre singulären Elemente constituiren eine dreifache Mannigfaltigkeit, sie enthalten niedere Mannigfaltigkeiten in sich, für welche die Singularitäten einen höheren Charakter annehmen. Insbesondere führt die nächst höhere Specialisirung zu dem Complexe covarianten Congruenzen resp. covarianten Flächen, auf welchen ausgezeichnete Curven vorhanden sind, die mit den weiteren Singularitäten in Verbindung stehen. — Doppelkanten und die an diese sich anreihenden Singularitäten besitzt dagegen der Complexkegel eines beliebigen Punktes als allgemeiner Ordnungskegel nicht. Die Untersuchung dieser Singularitäten, welche ich als *zweite Gruppe* bezeichne, steht daher direct mit einer covarianten Fläche in Verbindung, welche bis jetzt vorwiegend das Interesse in Anspruch genommen hat und der Kürze halber als *singuläre Fläche des Complexes* bezeichnet ist.

In § I. sind zunächst einige allgemeine Bemerkungen vorausgeschickt. Im zweiten Paragraphen ist dann das Problem der Wendekanten genauer behandelt worden, dagegen auf die Doppelebenen der Complexkegel und andere Singularitäten nur soweit eingegangen, als für die weiter folgenden Abzählungen nothwendig war. Die Betrachtung des linearen und conischen Polarcomplexes führt in § III. zur Untersuchung der Doppelkanten und damit zur Theorie der singulären Fläche.

Die letztere ist durchgehends als unvollständige Brennfläche der singulären Congruenz aufgefasst. Daran anknüpfend ist in § IV. zunächst die allgemeine Theorie der Congruenzen und ihrer Brennflächen behandelt. Die nächsten Paragraphen beschäftigen sich mit der Bestimmung der Singularitäten dieser Flächen, welche in vielfacher Hinsicht wegen ihrer Dualität merkwürdig sind und deren genauere Betrachtung von anderen Gesichtspunkten aus von Interesse sein dürfte. Von entscheidender Wichtigkeit wird dabei das in § VII. behandelte Haupttangentenproblem der Brennflächen, durch welches insbesondere Rückkehr- und Doppelcurve derselben der Untersuchung zugänglich werden. Daran schliesst sich die Untersuchung von Curven auf den Brennflächen, namentlich algebraischer Haupttangentencurven derselben.

In § XII. definire ich sodann die Singularitäten der Congruenzen in ihrem Zusammenhange mit den Singularitäten der Brennfläche, und leite daraus eine neue Lösung des Haupttangentenproblems ab. Es ergiebt sich dann die Bestimmung aller Singularitäten der Brennflächen mit Hülfe der Plücker'schen und Salmon'schen Formeln, welche letztere eine einfachere Gestalt annehmen. Daran schliesst sich in § XV. die Untersuchung der zweiten Gruppe der Singularitäten des Complexes in ihrem Zusammenhange mit den Singularitäten der singulären Fläche, sowie die Abzählung der letzteren.

Die gewonnenen Resultate, welche eine vollständige Theorie der allgemeinen Complexe und Congruenzen geben, soweit die Untersuchung ihrer Singularitäten mit denen der singulären Flächen und Brennflächen zusammenhängt, sind schliesslich auf die Betrachtung einiger einfacheren Fälle, insbesondere den Complex zweiten und dritten Grades angewandt.

I.

Vorbemerkungen. Normalform und Polarcomplexe eines Complexes.

In diesem Paragraphen stellen wir einige Betrachtungen zusammen, die zwar zum Theil schon Bekanntes reproduciren, aber in dieser Allgemeinheit bisher wohl noch nicht ausgesprochen sind und deren Kenntniss für das Verständniss der folgenden Untersuchungen erforderlich ist.

Werden an Stelle der Plücker-Cayley'schen Coordinaten einer geraden Linie, welche durch die beiden Punkte y und z mit den homogenen Punktcoordinaten $y_i z_i$ bestimmt ist,

$$p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$$

beliebige lineare Functionen

$$x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6$$

derselben vermöge der Substitutionen

$$\begin{aligned}
p_{12} &= \alpha_{11}x_1 + \cdots \alpha_{16}x_6\,,\\
p_{34} &= \alpha_{21}x_1 + \cdots \alpha_{26}x_6\,,\\
p_{13} &= \alpha_{31}x_1 + \cdots \alpha_{36}x_6\,,\\
p_{42} &= \alpha_{41}x_1 + \cdots \alpha_{46}x_6\,,\\
p_{14} &= \alpha_{51}x_1 + \cdots \alpha_{56}x_6\,,\\
p_{23} &= \alpha_{61}x_1 + \cdots \alpha_{66}x_6
\end{aligned}$$

(deren Determinante nicht verschwindet) eingeführt, so geht die zwischen den p_{ik} bestehende Identität

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

über in die allgemeine quadratische Form:

$$X = \Sigma c_{ik}x_i x_k = 0\,.$$

Es wird daher

$$P_{p+\lambda p'} = P + \lambda\left(p'\,\frac{\partial P}{\partial p}\right) + \lambda^2 P'$$

übergehen in

$$X_{x+\lambda y} = X + \lambda\left(y\,\frac{\partial X}{\partial x}\right) + \lambda^2 Y\,.$$

Da nun

$$\left(p'\frac{\partial P}{\partial p}\right) = p_{12}'p_{34} + p_{12}p_{34}' + p_{13}'p_{42} + p_{13}p_{42}' + p_{14}'p_{23} + p_{14}p_{23}' = 0$$

die Bedingung ist, unter welcher sich die Geraden $p\,p_1$ schneiden, so

ist bei Zugrundelegung der neuen Coordinaten x die Bedingung des Schneidens der beiden Geraden x, y:

$$\Sigma c_{ik} x_i y_k = 0 .$$

Ein linearer Complex

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 + a_6 x_6 = 0$$

wird daher die Gesammtheit der Geraden vorstellen, welche eine Gerade y schneiden, wenn die Gleichungen:

$$\varrho a_1 = c_{11} y_1 + \cdots c_{16} y_6 ,$$
$$\vdots$$
$$\varrho a_6 = c_{61} y_1 + \cdots c_{66} y_6$$

und

$$c_{ik} y_i y_k = 0 \text{ oder } a_y = 0$$

zugleich bestehen können, d. h. unter der Bedingung:

$$a_i a_k \Omega_{ik} = 0 .$$

Unter Ω ist dabei die Determinante der c_{ik} verstanden, während die Ω_{ik} die ersten Unterdeterminanten derselben bedeuten. Die letztere Bedingung konnte man übrigens auch direct aus der Bemerkung entnehmen, dass dieselbe in Bezug auf lineare Transformationen der x eine Invariante ist, welche vermöge der speciellen Transformation der x, die zu den p_{ik} zurückführt, in die bekannte Bedingungsgleichung:

$$a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23} = 0$$

eines speciellen linearen Complexes übergeht, wenn a_x die Form

$$a_{12} p_{34} + a_{31} p_{12} + \cdots = 0$$

annimmt.

Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades in x, $f = 0$ stellt einen *Complex n^{ten} Grades* vor. Sie enthält

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{5!} - 1$$

willkürliche Constanten. Aber der Complex n^{ten} Grades ist nicht von soviel Constanten abhängig. Man kann, sobald $n > 2$, seine Gleichung $f = 0$ in der gleichbedeutenden Form

$$f + \varphi X = 0$$

schreiben, wo φ eine *willkürliche* homogene Function $n-2^{\text{ten}}$ Grades. Mit Hülfe derselben lassen sich immer

$$\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)(n+3)}{5}$$

Coefficienten von f entfernen, so dass also für den Complex n^{ten} Grades

$$\frac{(n+1)(n+2)^2(n+3)}{3 \cdot 5} - 1$$

wesentliche Coefficienten übrig bleiben, wie dies auch schon Herr Lüroth bemerkt hat*).

Wir geben dieser Willkürlichkeit in der Darstellung der Gleichung eines Complexes einen symmetrischen Ausdruck, wenn wir f in einer Form darstellen, für welche eine aus f irgendwie abgeleite Form $n-2^{\text{ten}}$ Grades identisch verschwindet. Es ist zweckmässig, für dieselbe die in den Coefficienten von f lineare Covariante

$$\Omega_{ik}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k}$$

zu wählen, welche durch eine einfache Operation, die wir durch Δ bezeichnen, aus f abgeleitet wird. Die Form der Gleichung des Complexes, für welche jene Covariante verschwindet, mag mit Clebsch als *Normalform* desselben bezeichnet werden. Symbolisch kann man dann einen Complex in seiner Normalform

$$(a_x)^n = 0$$

darstellen, wo die a symbolische Coefficienten eines speciellen linearen Complexes sind.

Die Normalform lässt sich, wie Clebsch gezeigt hat**), auf eine völlig bestimmte Weise herleiten; es wird daher genügen, wenn wir nur andeutungsweise den Process für den hier vorliegenden Fall der allgemeineren Coordinatenbestimmung angeben. Man hat zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi X) = X\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \varphi\,\frac{\partial X}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(\varphi X) = \frac{\partial X}{\partial x_i}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{\partial X}{\partial x_k}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + X\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\,\partial x_k} + 2\varphi c_{ik},$$

daher

$$\Delta(\varphi X) = 2\,\Sigma\,\frac{\partial X}{\partial x_k}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\Omega_{ik} + 2\varphi\,\Sigma\,\Omega_{ik}c_{ik} + X\Delta\varphi\,.$$

Nun ist aber:

$$\Sigma\,\frac{\partial X}{\partial x_i}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\,\Omega_{ik} = -\,2(n-2)\varphi\Omega\,,$$

$$\Sigma\,\Omega_{ik}c_{ik} = -\,6\,\Omega\,,$$

also:

$$\Delta(\varphi X) = -\,\varphi\Omega 4(n+1) + X\Delta\varphi.$$

Man erhält daraus durch Fortsetzung der Operation Δ die allgemeine Gleichung:

$$\Delta^k(\varphi X) = -\,4k(n-k+2)\,\Omega\Delta^{k-1}\varphi + X\Delta^k\varphi$$

und hieraus endlich, wenn

*) Lüroth, Zur Theorie der windschiefen Flächen, Crelle's Journ. Bd. 67.

**) Vgl. Math. Annalen Bd. II, p. 1, und dessen Abhandlung „Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie". Gött. Abh. XVII.

$$f + \varphi X = f'$$

gesetzt wird, aus der Bedingung

$$\Delta^r f' = 0$$

die Normalform f' durch die folgende Gleichung ausgedrückt:

$$f' = f - \frac{X\Delta f}{4n+1\,\Omega} + \frac{X^2\Delta^2 f}{4^2 n+1\cdot n\cdot 1\cdot 2}\frac{1}{\Omega^2} - \frac{X^3\Delta^3 f}{4^3 n+1\,n\,n-1\;1\,2\,3}\frac{1}{\Omega^3} + \cdots.$$

Im Folgenden werden wir uns der Einfachheit halber immer derjenigen Transformation der p_{ik} bedienen, für welche X die Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = (x^2) = 0$$

annimmt. Dann ist $\Omega = 1$ und die Operation Δ die Summe der zweiten partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ nach den 6 Variabeln. Bezeichnet man also wie üblich

$$\frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i,$$

$$\frac{1}{n(n-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f_{ik} \text{ u. s. w.},$$

so bedingt die Normalform des Complexes, dass der Ausdruck:

$$\Sigma f_{ii} = 0$$

eine identische Gleichung darstellt, aus welcher man durch Differentiation die weiteren Identitäten

$$\Sigma f_{iiklm} \cdot \cdots = 0$$

ableiten kann. Wir werden im Folgenden immer voraussetzen, dass die Gleichung $f = 0$ sich in der Normalform befinde.

Wir bilden jetzt den Ausdruck:

$$(f + X\varphi)_{x=x+\lambda y} = f(x+\lambda y) + [(x^2) + 2(xy)\lambda + (y^2)\lambda^2]\varphi(x+y\lambda),$$

oder, da $(x^2)=0$, $(y^2)=0$,

$$= f + \frac{n}{1}\lambda\Delta f + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\lambda^2\Delta^2 f + \cdots$$

$$+ 2(xy)\lambda\left[\varphi + \frac{n-2}{1}\lambda\Delta\varphi + \frac{n-2}{1}\frac{n-3}{2}\lambda^2\Delta^2\varphi + \cdots\right].$$

Die Ausdrücke Δf, $\Delta^2 f$, $\cdots$ bedeuten die bekannten Polarenbildungen. Der Factor von λ^m in der Entwickelung für $x+\lambda y$ ist

$$\binom{n}{m}\Delta^m f + 2(xy)\binom{n-2}{m-1}\Delta^{m-1}\varphi\ ^*);$$

wir nennen ihn den *m^{ten} Polarcomplex der Geraden x*, er enthält die y

---

*) Die Bezeichnung (xy), sowie später $(f\varphi)$ (f^2) an Stelle von $\Sigma x_i y_i$, $\Sigma f_i \varphi_i$, Σf_i^2, ist dieselbe, wie in meinem Aufsatze „Zur Theorie der windschiefen Flächen".

im m^{ten} Grade. Insbesondere werden wir von *linearen*, *conischen*, *cubischen* Polarcomplexen reden. Die Polarcomplexe sind ersichtlich nicht vollkommen bestimmt, sondern enthalten die willkürlichen Coefficienten der Function φ. Es giebt also einfach unendlich viele lineare, sechsfach unendlich viel conische Polarcomplexe einer Geraden. Wird aber $(xy) = 0$ gesetzt, d. h. betrachtet man nur solche Geraden y der Polarcomplexe, welche die Gerade x, auf welche dieselben bezogen sind, schneiden, so sind dieselben völlig bestimmt und von den Ausdrücken $\Delta^m f$ nicht verschieden.

Wir bemerken dazu, dass unter der Voraussetzung $(xy) = 0$ der Substitution $x + \lambda y$ ein völlig anschaulicher geometrischer Sinn sich unterlegen lässt. In der That stellt $x + y\lambda$ alle Geraden des ebenen Strahlbüschels vor, welches durch (x, y) gegeben ist*). Die Gleichung

$$f(x + y\lambda) = 0$$

giebt daher die Geraden des Complexes an, welche in der willkürlichen Ebene (xy) liegen und durch den Punkt (xy) gehen. Wir werden in der Folge immer $(xy) = 0$ voraussetzen, falls nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird.

II.

Erste Gruppe der Singularitäten eines Complexes.

Die Gleichung

$$(1) \qquad fx + \lambda y = f + \frac{n}{1}\lambda\Delta f + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\lambda^2\Delta^2 f + \cdots = 0$$

giebt für jeden Werth von x, y n Werthe von λ, d. h. n Gerade des Complexes, welche in der Ebene (xy) durch den Punkt (xy) verlaufen. In jeder Ebene des Raumes liegt daher eine von Geraden des Com-

*) Dass $x + \lambda y$ unter der angegebenen Voraussetzung ein ebenes Strahlbüschel vorstellt, lässt sich auf die folgende Weise darthun, die unmittelbar auf den Principien der Liniengeometrie beruht. Wir betrachten die Geraden, welche x und y schneiden.

Sie zerfallen in zwei Gruppen u, v von denen u Gerade durch den Punkt v Gerade in der Ebene (xy) darstellt. Dabei ist dann:

$$(ux) = 0, \quad (uy) = 0,$$
$$(vx) = 0, \quad (vy) = 0.$$

Eine Gerade $z = x + \lambda y$ genügt daher den beiden Bedingungen

$$(zu) = 0, \quad (zv) = 0,$$

schneidet also sämmtliche Geraden der beiden Gruppen u und v. Dies ist nur möglich, wenn z zugleich durch den Punkt (xy) geht und in der gleichnamigen Ebene liegt, d. h. wenn es dem Strahlbüschel (xy) angehört.

plexes umhüllte Curve n^{ter} Classe, die *Complexcurve*, durch jeden Punkt gehen Geraden, welche einem Kegel n^{ter} Ordnung, dem *Complexkegel* angehören. Man schliesst daraus, dass das durch zwei Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ vom n^{ten} und m^{ten} Grade definirte Gebilde die Congruenz dadurch charakterisirt ist, dass (mn) Geraden derselben in jeder Ebene liegen, beziehungsweise durch jeden Punkt gehen.

Ist x eine Gerade des Complexes $f = 0$ selbst, so giebt die Gleichung (1) noch $n-1$ weitere Kanten des Complexkegels, respective Tangenten der Complexcurve. Wird aber y so gewählt, dass:

$$\Delta f = 0 = (yf),$$

so fällt jedesmal von diesen noch eine mit x zusammen. *Die Ebene (xy) berührt also den Complexkegel von (xy) in der Kante x, die Complexcurve in der Ebene (xy) berührt x im Punkte (xy).* Man hat damit den folgenden Satz:

Die Tangentialebenen der Complexkegel längs einer beliebigen Geraden des Complexes sind den betreffenden Kegelspitzen zugeordnet, wie die Ebenen eines linearen Complexes, die sich um eine Gerade desselben drehen, ihren entsprechenden Punkten, also projectivisch. Das Doppelverhältniss von vier Kegelspitzen auf einer Geraden des Complexes ist daher gleich dem der vier Ebenen, welche die Kegel längs der nämlichen Geraden berühren.

Verschwindet auch der conische Polarcomplex

$$\Delta^2 f = 0 = y_i y_k f_{ik},$$

so hat der Complexkegel von (xy) die Ebene (xy) zur *Wendeebene*, die Complexcurve in der Ebene (xy) die Gerade x zur *Spitzentangente*. Die drei Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} (yx) = 0, \\ (yf) = 0, \\ y_i y_k f_{ik} = 0 \end{cases}$$

bestimmen eine Linienfläche vierten Grades, welche selbstverständlich aus vier ebenen Büscheln bestehen muss, deren Mittelpunkte auf x liegen, deren Ebenen durch x gehen, wovon man sich übrigens auch sehr leicht auf analytischem Wege überzeugen kann.

Zu jeder Complexgeraden x gehören daher vier Wendeebenen oder, genauer ausgedrückt, vier Kegel, deren Wendekante, vier Complexcurven, deren Spitzentangente sie ist, und das Doppelverhältniss der vier Kegelspitzen ist gleich dem der vier Ebenen der Complexcurven.

Verschwindet auch der cubische Polarcomplex

$$\Delta^3 f = y_i y_k y_l f_{ikl} = 0,$$

so hat der Complexkegel von (xy) in der Kante x eine Singularität,

die wir mit Cayley als *Undulation* bezeichnen*), die Complexcurve der Ebene (xy) eine höhere Spitze. Eine Spitze dieser Art ist in der That die Vereinigung von zwei Spitzen und einem Doppelpunkte, sie repräsentirt daher einen dreifachen Punkt, der sich äusserlich von einem gewöhnlichen Curvenpunkte nicht unterscheidet. Die Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{cases} (yx) = 0, \\ (yf) = 0, \\ y_i y_k f_{ik} = 0, \\ y_i y_k y_l f_{ikl} = 0 \end{cases}$$

ergeben zwar 12 Werthe von y. Dieselben können sich aber nicht auf die genannte Singularität beziehen, vielmehr ist ohne Weiteres ersichtlich, dass die zwölf Wurzeln der Gleichungen (3) sämmtlich gleich x sind. Es giebt daher nur zweifach unendlich viele Geraden des Complexes, für welche die Gleichungen (3) von x verschiedene Wurzelwerthe y zulassen (natürlich dann gleich unendlich viele, die ein ebenes Büschel bilden). Es existiren daher zwei Flächen, von denen die eine von den Spitzen der Complexcurven gebildet, die andere von den Undulationsebenen der Complexkegel umhüllt wird, deren Betrachtung mit der Untersuchung der Complexe zusammenhängt. Beide Flächen entsprechen sich dualistisch, für den Complex zweiten Grades sind sie überdies identisch und bilden dessen singuläre Fläche, für den Complex dritten Grades degeneriren dieselben in eine Raumcurve, beziehungsweise Developpable.

Es wird ferner eine Linienfläche von Complexgeraden geben, für welche auch der vierte Polarcomplex verschwindet, endlich einzelne Gerade, für welche die fünf ersten Polarcomplexe für einen von x verschiedenen Werth von y sich annulliren. Wir gehen jetzt zu einer genaueren Untersuchung der besprochenen Fälle über.

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, auf der Complexgeraden x die vier Kegelspitzen zu bestimmen, deren Kegel x zur Wendekante haben. Es kann dies folgendermassen geschehen. Es seien r, s zwei Gerade, welche x und sich untereinander schneiden. Die vier Strahlen des Büschels $r+\lambda s$, welche durch die genannten vier Spitzen hindurchgehen, erhält man durch Elimination von y aus den Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} (\alpha y) = 0, \\ (xy) = 0, \\ (fy) = 0, \\ y_i y_k f_{ik} = 0, \\ (y^2) = 0, \\ r_y + \lambda s_y = 0, \end{cases}$$

*) Vgl. Salmon, Anal. Geom. d. höheren ebenen Curven, p. 43.

in denen die α Coordinaten eines willkürlichen linearen (speciellen) Complexes sein mögen. Man vollzieht diese Elimination durch Bildung der Discriminante der in μ quadratischen Gleichung:

$$(5)\quad \frac{\mu^2}{1}\begin{vmatrix} f_{11}-\mu & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & f_1 & r_1+\lambda s_1 \\ f_{21} & f_{22}-\mu & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} & f_2 & r_2+\lambda s_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33}-\mu & f_{34} & f_{35} & f_{36} & f_3 & r_3+\lambda s_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44}-\mu & f_{45} & f_{46} & f_4 & r_4+\lambda s_4 \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55}-\mu & f_{56} & f_5 & r_5+\lambda s_5 \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66}-\mu & f_6 & r_6+\lambda s_6 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & 0 & 0 \\ r_1+\lambda s_1 & r_2+\lambda s_2 & r_3+\lambda s_3 & r_4+\lambda s_4 & r_5+\lambda s_5 & r_6+\lambda s_6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Discriminante ist biquadratisch in λ, das Doppelverhältniss ihrer vier Wurzeln $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ von der besonderen Wahl der r, s unabhängig.

Man kann die vier Wendeebenen resp. Kegelspitzen unter einem anderen Gesichtspunkte auffassen, der besondere Vortheile bietet. Es sind die letzteren die vier Punkte, für welche der Kegel des conischen Polarcomplexes von x in ein Ebenenpaar degenerirt. Nun bilden die sämmtlichen Punkte, für welche der Complexkegel eines Complexes zweiten Grades sich in ein Ebenenpaar auflöst, eine Fläche vierter Ordnung und Classe, *die singuläre (Kummer'sche) Fläche des Complexes. Man wird daher die besonderen Lagenbeziehungen der vier Kegelspitzen resp. Wendeebenen untersuchen können, indem man die Lage der Geraden x gegen die singuläre Fläche des conischen Polarcomplexes von x betrachtet.*

Beispielsweise: Coincidiren zwei oder drei Kegelspitzen, so ist x einfache oder Haupttangente (in besonderen Fällen vierpunktige Tangente) der Kummer'schen Fläche, coincidiren sie paarweise, so ist sie eine Doppeltangente der letzteren. Dabei rücken immer gleichzeitig die Kegelspitzen und zugehörigen Wendeebenen zusammen. Eine Ausnahme hiervon findet nur für die singulären Geraden des Complexes statt.

Der weiteren Darstellung, welche die Theorie der singulären Flächen von ganz allgemeinen Gesichtspunkten aus aufnehmen wird, einen Augenblick vorgreifend, beziehen wir uns auf die Untersuchungen, welche Herr Klein über die Kummer'sche Fläche angestellt hat*).

Die Gleichung eines Complexes zweiten Grades kann im Allgemeinen immer auf die kanonische Form

*) Math. Annalen Bd. II, p. 213 ff., Bd. V, p. 295 ff.

(6) $$k_i y_i^2 = 0$$

gebracht werden. Von dieser Form ausgehend gelangt man leicht zu der Bemerkung, dass allen Complexen des Büschels:

(7) $$\frac{y_i^2}{k_i - \lambda} = 0$$

dieselbe Kummer'sche Fläche als singuläre Fläche entspricht*). Umgekehrt wird eine beliebige Gerade z einem der Complexe des Büschels angehören, wenn die Gleichung (7) für $z = y$ erfüllt ist. Dieselbe ist biquadratisch in λ, es giebt also vier Complexe desselben, welche die Gerade z enthalten. Herr Klein hat weiter gezeigt, dass die Gerade z Tangente der singulären Fläche von (6) ist, wenn die Gleichung (7) zwei gleiche Wurzeln hat, Haupttangente respective vierpunktige Tangente bei drei oder vier gleichen Wurzeln u. s. w. Ferner lassen sich durch jede Gerade z vier Tangentialebenen an die singuläre Fläche legen, ebenso wird sie von derselben in vier Punkten getroffen. Das Doppelverhältniss der vier Ebenen ist nach den Untersuchungen von Herrn Klein gleich dem der vier Punkte. Wir fügen diesem Satze, für den derselbe neuerdings einen Beweis veröffentlicht hat**), noch die Bemerkung hinzu, dass das Doppelverhältniss seinem Werthe nach übereinstimmt mit dem der vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung (7), ein algebraisches Theorem, in dem umgekehrt der genannte Klein'sche Satz seine analytische Begründung findet.

Wir betrachten nach diesen Bemerkungen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} (yx) &= 0, \\ (y^2) &= 0, \\ y_i y_k f_{ik} &= 0, \end{aligned}$$

wir denken dieselben durch die Substitutionen

$$y_i = c_{i1} z_1 + \cdots c_{i6} z_6$$

so transformirt, dass die zweite Gleichung ihre kanonische Form beibehält, während die letzte in

$$k_i z_i^2 = 0$$

übergeht. Dabei wird $(yx) = 0$ zu $(z\xi) = 0$, wobei, wie sich leicht beweisen lässt, die Grössen ξ wieder der Bedingung $(\xi^2) = 0$ genügen.

Bei linearen Transformationen aber, welche (y^2) in sich selbst überführen, ist der Ausdruck

*) Vgl. § XIV.
**) Math. Ann. Bd. VII, p. 208.

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} f_{11}-\mu & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & x_1 \\ f_{21} & f_{22}-\mu & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} & x_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33}-\mu & f_{34} & f_{35} & f_{36} & x_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44}-\mu & f_{45} & f_{46} & x_4 \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55}-\mu & f_{56} & x_5 \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66}-\mu & x_6 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & 0 \end{vmatrix} = \Omega$$

eine Invariante. Für die besondere Transformation, welche angegeben wurde, ist der Werth desselben bis auf einen Factor gleich

$$\frac{\xi_i^2}{k_i-\mu}.$$

Aus der Vergleichung mit den obigen Bemerkungen ergiebt sich demnach, dass die Determinante (8) zu der Frage nach den Wendeebenen in der Beziehung steht, welche die Untersuchung besonderer Lagenverhältnisse derselben auf die der Wurzeln von

$$\Omega = 0$$

zurückführt.

Wir entwickeln daher zunächst den Werth von Ω, welcher von der Form

$$\mu^4 E + \mu^3 D + \mu^2 C + \mu B + A$$

sein wird. Die Bestimmung der Coefficienten der Potenzen von μ geschieht mittelst eines Kunstgriffes, dessen wir uns in dem Folgenden noch häufig zu bedienen haben werden. Zunächst multipliciren wir die letzte Horizontal- oder Verticalreihe von (8) mit μ und addiren zu derselben die mit den $x_1 \cdots x_6$ multiplicirten sechs analogen Reihen.

Da $(x^2) = 0$ so geht Ω über in

$$(9)\qquad \Omega = \frac{1}{\mu^2}\begin{vmatrix} f_{ik}-\mu & f_i \\ f_i & 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{\mu^2} f\Delta.$$

Bezeichnet man nun die rechte Seite von (9) mit

$$\frac{1}{\mu^2}(A'\mu^2 + B'\mu^3 + C'\mu^4 + D'\mu^5 + E'\mu^6),$$

so ist $E = E'$, $D = D'$ etc.

Durch Δ ist die Determinante:

$$\begin{vmatrix} f_{11}-\mu & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22}-\mu & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33}-\mu & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44}-\mu & f_{45} & f_{46} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55}-\mu & f_{56} \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66}-\mu \end{vmatrix}$$

bezeichnet, welche entwickelt die Gestalt

$$\Delta = \alpha_6 \mu^6 + \alpha_5 \mu^5 + \cdots \alpha_0$$

annimmt, α_6 ist dabei gleich Eins.

Man hat also aus (9):

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} E = f, \\ D = (f_i^2) + \alpha_5 f. \end{cases}$$

Wir setzen jetzt:

$$\text{(11)} \qquad (f_i^2) = F,$$

woraus durch Differentiation:

$$\text{(12)} \qquad f_i f_{ik} = F_k.$$

Multiplicirt man jetzt die 6 ersten Verticalreihen mit den f_i und addirt zur mit μ multiplicirten letzten, so entsteht ferner:

$$\Omega = \frac{1}{\mu^3} \begin{vmatrix} f_{ik} - \mu & F_i \\ f_i & 0 \end{vmatrix} + \left(\frac{F}{\mu^3} + \frac{f}{\mu^2}\right) \Delta,$$

woraus

$$\text{(13)} \qquad C = (f_i F_i) + \alpha_5 F + \alpha_4 f,$$

und dem entsprechend

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} B = (F_i^2) + \alpha_5 (f_i F_i) + \alpha_4 F + \alpha_3 f, \\ A = F_i F_k f_{ik} + \alpha_5 (F_k^2) + \alpha_4 (f_i F_i) + \alpha_3 F + \alpha_2 f, \end{cases}$$

A ist übrigens die Hesse'sche Determinante von f, gerändert mit den x, ein Ausdruck den wir durch

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

bezeichnen.

Die vollständige Bestimmung der Coefficienten α hat keine Schwierigkeiten. α_5 ist offenbar gleich $-\Sigma f_{ii}$, verschwindet also, da der Complex sich in der Normalform befindet. Ferner ist α_4 gleich der Summe der mit Hülfe der Diagonalglieder von Δ gebildeten zweireihigen Determinanten*)

$$\alpha_4 = \tfrac{1}{2}\left(\Sigma f_{ii} f_{kk} - \Sigma (f_{ik})^2\right) = -\tfrac{1}{2} \Sigma (f_{ik})^2.$$

Aus

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = 2(n-1) \Sigma f_i f_{ik}$$

hat man aber:

$$\Sigma \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = 2(n-1)^2 \Sigma (f_{ik})^2 + 2n - 1\, n - 2\, \Sigma f_i f_{ikk},$$

oder da $\Sigma f_{ikk} = 0$,

*) Baltzer, Determinanten § 26.

$$a_4 = -\frac{1}{4(n-1)^2}\Delta F,$$

wo ΔF das Resultat der Operation Δ in Bezug auf den Complex F ist.

Die explicite Darstellung von a_3, a_2 übergehen wir, da sie für das Folgende gleichgültig ist. Wir schreiben nun Ω in der Form:

$$\Omega = a_0 + 4a_1\mu + 6a_2\mu^2 + 4a_3\mu^3 + a_4\mu^4 = 0, \tag{15}$$

in welcher die Coefficienten a die Coordinaten x der Reihe nach in den Geraden

$$5n-8 \quad 4n-6 \quad 3n-4 \quad 2n-2 \quad n$$

enthalten. Die Discriminante von (15) hat die bekannte Form

$$i^3 - 6j^2, \tag{16}$$

in welcher i und j die Bedeutungen

$$i = 2(a_0a_4 - a_1a_3 + 3a_2^2)$$
$$j = 6(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4)$$

haben, also die x in den Graden $6n-8$, $9n-12$ enthalten. Da $f=0$, so ist auch $a_4 = 0$. Die Discriminante verschwindet daher immer, wenn die Gleichungen

$$f = 0, \qquad F = 0$$

bestehen, *d. h. für eine Congruenz* $2n(n-1)^{\text{ten}}$ *Grades, welche die singulären Geraden des Complexes* $f=0$ *repräsentirt.*

Sie enthält daher, wenn $a_4 = 0$ gesetzt wird, den Factor $a_3^2 = 0$. In diesem Falle rücken zwei Kegelspitzen zusammen, ohne dass die entsprechenden Wendeebenen sich vereinigen*). Daraus folgt:

Die Congruenz der Complexgeraden, für welche zwei Wendeebenen und gleichzeitig die zugehörigen Kegelspitzen zusammenfallen, ist von der Ordnung und Classe

$$n(18n-24) - 4(n)(n-1) = 2n(7n-10),$$

ausgeschieden ist dabei die doppeltzählende Congruenz der singulären Geraden.

Die Complexgeraden, für die das Doppelverhältniss der vier Wendeebenen äquianharmonisch respective harmonisch ist, bilden zwei Congruenzen, deren Ordnung und Classe durch die Zahlen

$$2n(3n-4) \quad \text{resp.} \quad 3n(3n-4)$$

gegeben ist.

Drei Wurzeln der Gleichung (15) werden zusammenfallen, in dem besonderen Falle

$$f = 0, \qquad (fF) = 0, \qquad F = 0,$$

*) Gleichzeitig coincidiren die beiden anderen Wendeebenen, während die zu ihnen gehörenden Kegelspitzen getrennt bleiben.

im allgemeinen dagegen, wenn die beiden Invarianten

$$i = -(4a_1a_3 - 3a_2^2) = 0$$
$$j = 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_0a_3^2 = 0$$

für sich verschwinden. Die letzteren beiden Gleichungen sind durch das System

$$4a_1a_3 - 3a_2^2 = 0$$
$$2a_1a_2 - 3a_0a_3 = 0$$

zu ersetzen, aus welchem wieder $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ auszuscheiden ist. *Es existirt also eine Linienfläche singulärer Complexgeraden vom Grade* $4n(n-1)(3n-4)$ *und eine zweite nicht singulärer Geraden vom Grade*

$$2n[(6n-8)(7n-10) - (3n-4)(2n-2)] = 12n(3n-4)(2n-3),$$

für welche jedesmal drei Wendecbenen und Kegelspitzen sich vereinigen.

Wir weisen noch kurz darauf hin, dass man zu den ausgesprochenen Resultaten auch leicht gelangen kann, ohne die besonderen Eigenschaften der Kummer'schen Fläche vorauszusetzen. Man kann das folgende algebraische Theorem aufstellen, welches als eine Verallgemeinerung bekannter Untersuchungen über das Schnittpunktsystem von zwei Kegelschnitten zu betrachten ist:

Damit zwei quadratische Gleichungen mit n homogenen Variabelen

$$A = y_i y_k a_{ik} = 0,$$
$$B = y_i y_k b_{ik} = 0,$$

und die $n - 3$ *linearen*

$$\alpha_i' y_i = 0, \quad \alpha_i'' y_i = 0 \cdots \alpha_i^{n-3} y_i = 0$$

zwei oder drei gleiche Wurzeln y besitzen, muss die cubische Gleichung in μ, *welche entsteht, wenn man die Determinante der Function*

$$A - \mu B$$

mit den Coefficienten der $n - 3$ *linearen Gleichungen rändert, zwei oder drei gleiche Wurzeln haben.*

Den Beweis dieses Satzes kann man in der folgenden Form geben. Wir bezeichnen die genannte geränderte Determinante mit

$$\Pi = (\Omega : \alpha'\alpha^2 \cdots \alpha^{n-3}),$$

sie ist eine Invariante in Bezug auf beliebige lineare Transformationen der y. Transformirt man daher die y in neue Variabele η der Art, dass die Form

$$\alpha_i^{n-3} y_i \text{ übergeht in } \eta_n,$$

so geht das vorgelegte System von $n - 1$ Gleichungen mit n Variabelen in ein neues von $n - 2$ Gleichungen mit $n - 1$ Variabelen über, Π aber in die nach demselben Gesetze aus diesem abgeleitete Determinante:

$$\Pi' = (\Omega' : \beta' \beta^2 \cdots \beta^{n-4}),$$

nach welchem Π aus dem ersten System gebildet wurde. Der Satz ist daher erwiesen für n Variabele, sobald er für $n-1$ gültig ist. Bekanntlich findet er aber statt für drei Variabele u. s. w.

Wendet man das genannte Theorem auf die Gleichungen

$$y_i y_k f_{ik} = 0, \quad (yf) = 0, \quad (yx) = 0, \quad (y^2) = 0,$$

denen man noch die willkürliche lineare

$$(y\alpha) = 0$$

hinzufügt, so ergiebt sich ohne weiteres nach Absonderung des Factors $(\alpha_x)^2$ vermöge $(x^2) = 0$, $f = 0$ die Determinante (8), welche nun aber von vornherein als cubische Gleichung für μ zu betrachten ist und die besonderen Fälle, die oben betrachtet wurden, nicht mehr enthält.

Für den Complex zweiten Grades ist beispielsweise die Congruenz der singulären Linien vierter Ordnung und Classe, die Congruenz der die singuläre Fläche berührenden Complexgeraden von der sechszehnten, die Congruenz der die nämliche Fläche äquianharmonisch oder harmonisch schneidenden Complexgeraden von der achten resp. zwölften Classe und Ordnung. Die Linienfläche der singulären Haupttangenten ist 16^{ten} Grades, die der Complexgeraden, welche zugleich Haupttangenten sind, vom achtundvierzigsten. Man kann diese Zahlen unmittelbar aus dem Umstande herleiten, dass die singuläre Fläche von der vierten Ordnung und Classe ist. In einer beliebigen Ebene liegt daher die Complexcurve zweiter Classe und die Schnittcurve mit der singulären Fläche, d. h. eine Curve 4^{ter} Ordnung und zwölfter Classe. Beide Curven berühren sich in vier Punkten, die gemeinsamen Tangenten in denselben sind die doppeltzählenden aus singulären Linien, die 16 weiteren gemeinsamen Tangenten geben die Classenzahl der Congruenz an, deren Gerade die singuläre Fläche berühren und dem Complexe als nicht singuläre angehören. Da ferner durch den Berührungspunkt a einer nicht singulären Linie mit der singulären Fläche eine singuläre Linie des Complexes hindurchgeht, so gehören alle Tangenten im Punkte a dem Complexe an, die Congruenz 16^{ter} Ordnung und Classe besteht also aus lauter ebenen Strahlbüscheln, deren Centra eine Haupttangentencurve der singulären Fläche bilden, und deren Ebenen Schmiegungsebenen dieser Curve sind. Diese Haupttangentencurve ist daher selbst von der 16^{ten} Classe und Ordnung. Nach bekannten Untersuchungen bilden ferner die Geraden, welche eine ebene Curve vierter Ordnung äquianharmonisch resp. harmonisch schneiden, eine Curve vierter resp. sechster Classe, womit sich die nämlichen Zahlen wie vorhin für die entsprechenden Congruenzen der Complexgeraden ergeben.

Wir wenden uns jetzt zu einigen anderen Untersuchungen über die Wendeebenen. Durch eine beliebige Gerade y kann man eine be-

stimmte Zahl von Ebenen legen, welche Complexkegel stationär berühren. Den Gleichungen

$$\begin{aligned}(yx) &= 0\\ (yf) &= 0\\ y_i y_k f_{ik} &= 0\\ f &= 0\\ (x^2) &= 0\end{aligned}$$

entsprechend, welche $2n(n-1)(n-2)$ Wurzeln x geben, kann man den folgenden Satz behaupten:

Durch jede Gerade des Raumes lassen sich $2n(n-1)(n-2)$ Wendeebenen von Complexkegeln legen.

Oder auch

Unter den sämmtlichen Complexcurven, deren Ebenen die Gerade y enthalten, befinden sich $2n(n-1)(n-2)$, welche eine Spitze auf y haben.

Ist y eine Gerade des Complexes selbst, so existiren also 4 Complexcurven, für welche y Spitzentangente ist, ausserdem noch $2n(n-1)(n-2) - 12$ andere, deren Spitzen auf y liegen.

Auf den Kanten des Complexkegels n^{ter} Ordnung, der von einem beliebigen Punkte des Raumes a ausgeht, bilden die Spitzen der Kegel, für welche dieselben Wendekanten sind, eine Raumcurve, deren Ordnung leicht zu bestimmen ist. Da nämlich der Complexkegel von a selbst $3n(n-2)$ Wendekanten hat, so ist a ein ebenso vielfacher Punkt der Curve, von der ausserdem in jeder durch a gehenden Ebene $4n$ Punkte liegen. *Ihre Ordnung ist daher* $n(3n-2)$. Diese Curve wird nach den vorigen Betrachtungen $2n(7n-10)$ Kanten des Kegels berühren, welche nicht singuläre Linien des Complexes sind, ausserdem die $2n(n-1)$ singulären Geraden. Dualistisch entsprechend umhüllen die Wendeebenen, welche zu den Complexlinien einer beliebigen Complexcurve gehören, eine Curve $n(3n-2)^{ter}$ Classe.

Wir betrachten ferner die Complexcurve in einer beliebigen Ebene. Auf jeder Tangente derselben liegen vier Punkte, deren Gesammtheit eine Curve bildet, deren Ordnung wir bestimmen wollen. Wir bedienen uns zu diesem Zwecke des in der Folge*) zu beweisenden Satzes, dass die Linienfläche, welche von den Geraden eines (speciellen) linearen Complexes gebildet wird, die zugleich Wendekanten von Complexkegeln eines Complexes n^{ten} Grades sind, vom Grade $4n(3n-4)$ ist. In einer beliebig durch die Axe des speciellen linearen Complexes gelegten Ebene liegen nun erstens $3n(n-2)$ Erzeugende dieser Fläche,

*) Vgl. § XII.

— die $3n(n-2)$ Spitzentangenten der Complexcurve — zweitens x andere, welche für die Complexkegel der x Punkte, in denen jene Erzeugenden die Axe treffen, selbst Inflexionskanten sind. Durch einen beliebigen Axenpunkt gehen dagegen $3n(n-2)$ Inflexionskanten des Complexkegels, ausserdem noch x andere Erzeugende, welche den x eben betrachteten dualistisch entsprechen. Man hat daher:

$$2x + 6n(n-2) = 4n(3n-4)$$
$$x = n(3n-2).$$

Zieht man daher in der Ebene der Complexcurve eine Gerade y, so liegen auf derselben $n(3n-2)$ Spitzen von Kegeln, deren Wendekante mit einer Geraden der Complexcurve zusammenfällt. *Die Ordnung der fraglichen Curve ist daher* $(3n-2)n$, sie geht ausserdem durch die $3n(n-2)$ Spitzen der Complexcurve und berührt dieselbe in $2n(n-1)$ weiteren Punkten.

Uebertragen wir diese Betrachtung auf den Complexkegel eines beliebigen Punktes, so ergiebt sich noch:

Die Wendeebenen, welche durch die Kanten eines beliebigen Complexkegels gehen, umhüllen einen Kegel $n(3n-2)^{ter}$ *Classe.*

Wir betrachten jetzt die *Undulationsebenen* der Complexkegel. Es sei y eine Gerade, welche durch eine Kegelspitze in der Undulationsebene gezogen ist. Es bestehen dann die Gleichungen:

$$\begin{aligned} (yx) &= 0, & (yf) &= 0. \\ y_i y_k f_{ik} &= 0, & y_i y_k y_l f_{ikl} &= 0. \\ f &= 0, & (x^2) &= 0. \end{aligned}$$

Eliminirt man die x, so entsteht eine Gleichung in y, welche vom Grade

$$2n(n-1)(n-2)(n-3)+2n(n-2)(n-3)+4n(n-1)(n-3)+6n(n-1)(n-2)$$

ausfüllt. Da aber die ersten vier Gleichungen in Verbindung mit $(y^2) = 0$ zwölf gleiche Wurzeln $y = x$ haben, so muss die Resultante den Factor f^{12} erhalten. Wir erhalten daher, wenn $12n$ abgezogen wird, einen Complex vom Grade

$$2n(n^3 - 11n + 6),$$

dessen Gerade sich zu zweifach unendlich vielen Büscheln anordnen, deren Mittelpunkte eine gewisse Fläche bilden, welche der von ihren Ebenen umhüllten als reciprok zu betrachten ist. Man kann die Ordnung resp. Classe dieser Flächen angeben. Die Bedingung, unter welcher eine ebene Curve n^{ter} Ordnung einen Undulationspunkt hat, ist eine Invariante, welche die Coefficienten derselben im Grade $6(n-3)(3n-4)$ enthält*). Daraus folgt, dass die Fläche der Complex-

*) Salmon, Höhere Ebene-Curven, p. 425.

kegelspitzen mit Undulationskante vom Grade $4n(n-3)(3n-4)$ ist*). Auf ihr befindet sich eine Doppelcurve mit einer gewissen Zahl von dreifachen Punkten, sie entspricht den Spitzen von Complexkegeln mit zwei resp. drei Undulationskanten, ferner eine Rückkehrcurve, Ort der Spitzen von Kegeln mit fünfkantig berührenden Ebenen. Beide Curven begegnen sich in Punkten, die in zwei Gruppen zerfallen. Die der ersten sind stationäre Punkte der Doppelcurve, der Complexkegel hat eine einfache und eine höhere Undulation, die zweiten stationär für die Rückkehrcurve, der Complexkegel hat eine sechskantig berührende Ebene. Die dualistischen Betrachtungen greifen für die zweite Fläche Platz.

Soll die *Congruenz der Undulationskanten* von Complexkegeln bestimmt werden, so ist aus den Gleichungen (3), denen wir noch die willkürliche

$$(\alpha y) = 0$$

hinzufügen, y zu eliminiren. Dabei muss sich der Factor α_x in einer gewissen Potenz aussondern lassen. Es werden aber die α bei der Elimination im 12^{ten} Grade auftreten. Denn man kann sich die Resultante der Gleichungen (3) dadurch gebildet denken, dass die zwölf Wurzeln der Gleichungen (3) in α_y substituirt werden und nun der Werth der symmetrischen Function

$$V = \Pi(\alpha'_y)\,(\alpha''_y)\cdots(\alpha^{12}_y)$$

als Function der x ausgedrückt wird. Da aber die 12 Wurzeln der genannten Gleichungen sämmtlich gleich x sind, so wird V den Factor $(\alpha_x)^{12}$ enthalten. Andererseits werden die x in der Resultante im Grade

$$12 + 12(n-1) + 6(n-2) + 4(n-3)$$

auftreten. Setzt man also

$$V = (\alpha_x)^{12} M,$$

so ergiebt sich als Bedingungsgleichung

$$M = 0,$$

welches die x im Grade $2(11n-18)$ enthält. Wir ziehen daraus den Schluss:

Die Congruenz der Undulationskanten der Complexkegel eines Complexes n^{ter} Ordnung ist von der Ordnung und Classe

$$2n(11n-18).$$

Die vollständige Darstellung der Resultante erfordert die Elimination aus einer Gleichung dritten Grades, zwei quadratischen und drei linearen Gleichungen. Nun ist es zwar sehr leicht, eine Resul-

*) Vgl. Clebsch, Math. Annalen, Bd. V, p. 441.

tante derselben zu bilden, doch scheint es schwierig, die überflüssigen Factoren aus derselben wirklich auszuscheiden.

Wir gehen weiter zur Betrachtung der *Doppeltangentialebenen* von Complexkegeln.

Es sei x eine Gerade des Complexes. Die Gleichungen

$$(yx) = 0$$
$$(yf) = 0$$

drücken die sämmtlichen Geraden in den Tangentialebenen der Complexkegel längs x aus, welche durch die entsprechende Kegelspitze gezogen sind. Damit eine solche Ebene Doppeltangentialebene des Kegels werde, muss die Discriminante von:

$$f(x + \lambda y) = \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\Delta^2 f + \lambda\Delta^3 f + \cdots \lambda^{n-2}\Delta^n f = \psi(y, x)$$

verschwinden. Dieselbe ist in den x vom Grade $(n-2)(n-3)$, in den y vom Grade $(n+2)(n-3)$.

Die drei Gleichungen

$$(yf) = 0$$
$$(yx) = 0$$
$$\psi = 0$$

bestimmen daher eine Linienfläche vom Grade $2(n+2)(n-3)$, gebildet von den Geraden y. Sie löst sich selbstverständlich in ebenso viel ebene Strahlbüschel auf, deren Mittelpunkte auf x liegen, deren Ebenen durch x gehen. Daraus ergiebt sich:

Unter den Tangentialebenen längs einer Geraden des Complexes befinden sich $2(n+2)(n-3)$ *Doppeltangentialebenen. Unter den Complexcurven, deren Ebenen durch eine Gerade des Complexes gehen, befinden sich* $2(n+2)(n-3)$, *welche in einem Punkte derselben einen Doppelpunkt haben, dessen eine Tangente mit der nämlichen Geraden coincidirt.*

Andererseits ergeben die Gleichungen

$$f = 0, \quad (yf) = 0, \quad (yx) = 0, \quad \psi = 0, \quad (x^2) = 0$$

für einen beliebigen Werth von y $2n(n-1)(n-2)(n-3)$ Lösungen für x. Dieselben beziehen sich paarweise auf die Doppeltangentialebenen, welche man durch y an Complexkegel, deren Spitzen sich auf y befinden, legen kann.

Durch eine beliebige Gerade des Raumes gehen demnach

$$n(n-1)(n-2)(n-3)$$

Ebenen, welche Complexkegel doppelt berühren. Unter den Complexcurven, deren Ebenen eine beliebige Gerade enthalten, befinden sich ebensoviele mit einem auf derselben liegenden Doppelpunkte.

Ist endlich y eine Gerade des Complexes, so ergiebt sich noch: Unter den Complexcurven, die eine Gerade des Complexes berühren, giebt es

$$n(n-1)(n-2)(n-3)-4(n+2)(n-3)=(n-3)(n-4)(n^2+n+2),$$

welche einen auf y liegenden Doppelpunkt haben, dessen Tangenten von y verschieden sind.

Es erübrigt einige Bemerkungen über die weiteren Singularitäten hinzuzufügen.

Es ist eine Bedingung erforderlich, wenn eine Curve n^{ter} Ordnung eine dreifache Tangente haben soll. Die Spitzen der Complexkegel mit einer Tritangentialebene bilden eine Fläche, welcher dualistisch die Enveloppe dieser Ebenen entspricht, in denen sich Complexcurven mit dreifachem Punkte befinden. Die Ordnung derselben ist

$$\tfrac{2}{3}(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2).$$

Sie enthält eine Doppelcurve mit einer gewissen Zahl dreifacher Punkte, entsprechend den Fällen, wo der Complexkegel zwei oder drei dreifache Ebenen besitzt. Ferner befindet sich auf ihr eine Cuspidalcurve höherer Art, deren Punkten Kegel mit einer vierfachen Berührungsebene entsprechen, auf welcher besondere Punkte liegen, welche der Doppelcurve angehören und deren Kegel eine fünffache Ebene haben. Andererseits kann ein Complexkegel auch eine dreifache und eine zweite vierfache Berührungsebene haben, seine Spitze befindet sich dann in einem stationären Punkte der Doppelcurve, welche der Rückkehrcurve angehört.

In gleicher Weise existirt eine Fläche der Ordnung:

$$2n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4).$$

deren Punkten Kegel mit einer unistationären Doppeltangentialebene entsprechen. Die Ebenen einer Fläche gleicher Classe enthalten Complexcurven mit dreifachem Punkte, von dessen Zweigen zwei eine Spitze bilden. Die erstere Fläche enthält eine Doppelcurve mit dreifachen Punkten, gebildet von den Spitzen von Kegeln, die zwei oder drei Berührungsebenen der genannten Art haben, eine Rückkehrcurve, welche dem Falle entspricht, wo von den Berührungskanten einer dreifachen Ebene die eine Wendekante ist, ausserdem noch eine höhere Cuspidalcurve, welche den Doppelwendeebenen zugehört u. s. w.

III.

Der lineare und conische Polarcomplex und die singuläre Fläche des Complexes.

Den drei Wurzeln der cubischen Gleichung (15) II. kann man eine directe geometrische Bedeutung unterlegen, welche mit der Theorie

des linearen Polarcomplexes zusammenhängt. Die einfach unendliche Schaar linearer Polarcomplexe (I) für eine Gerade x ist bekanntlich gegeben durch die Gleichung:

$$(1) \qquad (yf) + \mu(yx) = 0,$$

in welcher μ einen willkürlichen Parameter vorstellt.

Der lineare Polarcomplex für eine benachbarte Gerade $x + dx$, welche durch die Gleichungen

$$(2) \qquad (x\,dx) = 0, \quad (k\,dx) = 0, \quad (f\,dx) = 0,$$

in denen die k willkürliche Coefficienten bedeuten, bestimmt ist, hat daher die Gleichung:

$$(3) \qquad y_i(\delta f_i + \mu dx_i + x_i d\mu) + y_i(f_i + \mu x_i) = 0.$$

Damit derselbe identisch sei mit einem der Polarcomplexe der Geraden x, müssen die 6 Gleichungen

$$(4) \qquad \delta f_i + \mu dx_i + x_i d\mu = dt(f_i + \mu x_i)$$

sammt den Gleichungen (2) bestehen, dt ist als willkürliches Differential eingeführt. Addirt man die Gleichungen (4), nachdem sie der Reihe nach mit $x_1 x_2 \cdots x_6$ multiplicirt wurden, so entsteht

$$x_i \delta f_i + (x\,dx)\mu = 0.$$

Von den Gleichungen (2) ist daher eine, etwa $(f\,dx) = 0$ überflüssig. Setzt man jetzt:

$$\delta f_i = (n-1)[f_{i1}dx_1 + f_{i2}dx_2 + f_{i3}dx_3 + f_{i4}dx_4 + f_{i5}dx_5 + f_{i6}dx_6],$$

so kann man die Differentiale dx, $d\mu$, dt aus den 8 Gleichungen (4) (2) eliminiren und erhält nach Absonderung des Factors (kx)

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} n-1 f_{ik} + \mu & x_i \\ x_i & \end{vmatrix} = 0^*),$$

eine Gleichung, die im Wesentlichen mit II. (8) identisch ist. Ihre drei Wurzeln $\mu_1\,\mu_2\,\mu_3$ beziehen sich auf drei unendlich nahe Geraden $x + dx'$, $x + dx''$, $x + dx'''$ des Complexes, für welche jedesmal einer ihrer linearen Polarcomplexe zugleich linearer Polarcomplex von x ist. Dabei bestehen zwischen den Differentialen $dx'\,dx''\,dx'''$ die Beziehungen, welche aus der Theorie quadratischer Formen bekannt sind:

$$(dx'\ dx'') = 0.$$
$$(dx''\ dx''') = 0.$$
$$(dx'''\ dx'\ ) = 0.$$

Von jeder Geraden des Complexes aus giebt es also drei durch ihr

---

*) Die Grösse μ gehört in dieser und allen folgenden Determinanten analoger Art *nur den Diagonalelementen* f_{ii} *an.*

Verhalten zu einem linearen Polarcomplexe ausgezeichnete Fortschreitungsrichtungen. Sie bestimmen die Elemente von drei Linienflächen, welche sich in der Geraden x schneiden, es sind dieselben, welche von Herrn Klein als *Hauptflächen* des Complexes bezeichnet werden*).

Wenn die Discriminante von (5) verschwindet, so fallen zwei der Fortschreitungsrichtungen zusammen. Zugleich wird dann $(dx^2) = 0$. In diesem Falle berühren sich also zwei Hauptflächen in der betreffenden Geraden x, welche singuläre Erzeugende derselben ist.

Wir betrachten jetzt den wichtigen Fall, wo die linearen Polarcomplexe speciell sind. Die Bedingung dafür ist

$$(f_i^2) = F = 0 .$$

Man kann dann die f_i als Coordinaten einer Geraden ξ_i auffassen, welche wegen

$$(xf) = 0$$

die Gerade x schneidet. Die ganze Schaar der linearen Polarcomplexe ist speciell, ihre Axen bilden das durch die Geraden $x\xi$ bestimmte Strahlbüschel. Die Gerade x heisst eine *singuläre* Linie des Complexes, ξ_i ihre *zugeordnete***), der Punkt $(x\xi)$ der *singuläre Punkt*, die Ebene $(x\xi)$ die *singuläre Ebene*. Jedem Punkte der Geraden x entspricht in Bezug auf den linearen Polarcomplex die Ebene $(x\xi)$. *Alle Complexkegel, deren Spitzen auf x liegen, berühren daher die singuläre Ebene längs der Geraden x.* Nur dem Punkte $(x\xi)$ ist keine bestimmte Ebene des linearen Polarcomplexes mehr zugeordnet. Zieht man nun eine Gerade z, welche x und ξ schneidet, so ist wegen

$$(zx) = 0 , \quad (z\xi) = 0 ,$$

$$f(x+\lambda z) = \frac{\lambda^2}{2} (z_i z_k f_{ik}) + \lambda^3 ( ) + \cdots$$

Diese Gleichung zeigt, dass von den Geraden des Büschels $x+\lambda z$, wie auch z gewählt sein mag, immer nur $n-2$ von x verschiedene dem Complexe angehören. Verstehen wir unter z Gerade durch den singulären Punkt, so folgt:

Der Complexkegel im singulären Punkte hat die singuläre Gerade zur Doppelkante.

Wird z so gewählt, dass ausserdem

$$z_i z_k f_{ik} = 0$$

ist, *so hat der Complexkegel des singulären Punktes mit der Ebene xz*

---

*) Math. Annalen, Bd. V, p. 271.

**) Diese Gerade besitzt übrigens keine weiter ausgezeichnete Lage, sie kann durch jede andere des Büschels $x+\lambda\xi$ ersetzt werden, wenn kein Gewicht auf die Normalform des Complexes gelegt wird. Herr Klein nennt daher alle Geraden dieses Büschels zugeordnete der singulären.

drei consecutive Kanten gemein. Es geschieht dies für zwei Ebenen, die Tangentialebenen des Complexkegels in der Doppelkante. Es sind zugleich die beiden Ebenen, in welche der Complexkegel des conischen Polarcomplexes für diesen Punkt degenerirt.

Wir schliessen daran die dualistische Betrachtung. Da die Gerade x in jeder durch sie gelegten Ebene für zwei unendlich nahe vom singulären Punkte auslaufende Complexgeraden zählt, *so haben alle Complexcurven in solchen Ebenen den singulären Punkt zum Berührungspunkte mit der Geraden x.* Nur für die singuläre Ebene wird der Tangentialpunkt unbestimmt. Verstehen wir jetzt unter z diejenigen Geraden, welche in der singulären Ebene liegen, so entsprechen der Bedingung $z_i z_k f_{ik} = 0$ zwei ebene Strahlbüschel in dieser Ebene, deren Mittelpunkte auf x liegen, es sind die beiden Büschel, in welche die betreffende Complexcurve des conischen Polarcomplexes degenerirt. *In ihnen berührt zugleich die Complexcurve des Complexes $f = 0$ die singuläre Linie, letztere ist daher eine Doppeltangente derselben.*

Man kann sich hiervon auch durch eine directe Untersuchung der Linienfläche

$$(zx) = 0, \qquad (zf) = 0, \qquad z_i z_k f_{ik} = 0$$

überzeugen. Sie besteht, wie im allgemeinen Falle (II.) aus vier ebenen Büscheln mit einer gemeinsamen Geraden, zwei derselben haben eine gemeinschaftliche Ebene, die singuläre Ebene, die beiden anderen einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt, den singulären Punkt.

Wir unterscheiden also auf den Geraden der Congruenz

$$f = 0, \qquad F = 0$$

den singulären Punkt und die singuläre Ebene. Den zweifach unendlich vielen Geraden der Congruenz entsprechend giebt es eine Fläche der singulären Punkte und singulären Ebenen.

Die Fläche der singulären Punkte ist nun, wie Herr Pasch*) zuerst allgemein bewiesen hat, identisch mit der Fläche der singulären Ebenen, *jede singuläre Ebene berührt die Fläche der singulären Punkte im singulären Punkte selbst.* Wir beweisen diesen Satz folgendermassen.

Es seien x, ξ die Elemente einer singulären Ebene und ihres singulären Punktes. Die Elemente einer benachbarten singulären Ebene sind dann gegeben durch:

$$x' = x + dx,$$
$$\xi' = \xi + d\xi,$$

dabei ist

$$(x'\xi) = 0, \qquad (x\xi') = 0.$$

Die vier Geraden $x\,x'\,\xi\,\xi'$ bilden also, da sie sich zu je zweien

*) Pasch, Habilitationsschrift, Giessen 1870.

unter einander schneiden, ein unendlich kleines windschiefes Vierseit, dessen Diagonalen die Verbindungslinien der unendlich nahen singulären Punkte respective der Schnitt der unendlich nahen beiden singulären Ebenen sind. Daraus geht aber hervor, dass die consecutive singuläre Ebene $(x'\xi')$ immer durch den singulären Punkt $(x\xi)$ geht, womit der Beweis des genannten Satzes geliefert ist.

Wir bezeichnen die Fläche der singulären Punkte und Ebenen kurz als *singuläre Fläche des Complexes.*

Im singulären Punkte besteht der Kegel des conischen Polarcomplexes aus den beiden Ebenen $E_1 E_2$, die Complexcurve der singulären Ebene aus den beiden Büscheln $e_1 e_2$. Wir betrachten jetzt den Complex $F = 0$. Sein Complexkegel hat im singulären Punkte längs der Geraden x die Tangentialebene F, es ist diejenige Ebene, welche diesem Punkte durch den linearen Complex

$$(yF) = 0$$

zugeordnet ist. Um die Lage der beiden Ebenen $E_1 E_2$ zu bestimmen, nehmen wir zu der Geraden ξ die beliebig gewählte v hinzu, welche durch den singulären Punkt in der Ebene F gezogen ist. Wir haben dann ein Strahlbüschel $f + \lambda v = \xi + \lambda v$, die beiden Strahlen desselben, welche dem conischen Polarcomplexe angehören, bestimmen die Lage der genannten Ebenen. Es ist nun:

$$z_i z_k f_{ik} = f_i f_k f_{ik} + 2\lambda(v_i F_i) + \lambda^2 v_i v_k f_{ik} = 0$$
$$z_i = f_i + \lambda v_i$$

die quadratische Gleichung, welche die beiden Werthe von λ bestimmt.

Da ferner

$$(vF) = 0$$

so ergiebt sich

$$f_i F_i + \lambda^2 v_i v_k f_{ik} = 0. \tag{6}$$

Wir entnehmen hieraus den Satz:

Die Ebene F, welche den Complexkegel von F im singulären Punkte längs x berührt, ist die vierte harmonische zur singulären Ebene und den beiden Ebenen $E_1 E_2$, in welche der Kegel des conischen Polarcomplexes für den nämlichen Punkt zerfällt (den Tangentialebenen des Complexkegels von f in seiner Doppelkante.

Man kann der angewandten Bezeichnung einen dualistischen Sinn unterlegen. Unter den Complexkegeln von F längs der singulären Geraden giebt es einen, dessen Tangentialebene die singuläre Ebene ist, die Spitze desselben sei f. Alsdann verstehen wir unter v eine Gerade in der singulären Ebene durch den Punkt f und erhalten aus Gleichung (6):

*) Die Betrachtungen über die singuläre Fläche rühren zum Theil schon von Plücker her, die letzteren beiden Sätze sind inzwischen auch von Herrn Pasch

Der Punkt f, für welchen der Complexkegel von F die singuläre Ebene in der singulären Geraden berührt, liegt zum singulären Punkte und den beiden Punkten $e_1 e_2$, in welche die Complexcurve des conischen Polarcomplexes in der singulären Ebene sich auflöst (den Berührungspunkten der Complexcurve von f mit ihrer Doppeltangente x), harmonisch.

Mit der Theorie der singulären Fläche steht nun eine zweite Gruppe von Singularitäten des Complexes in Verbindung, welche wir später genauer untersuchen werden. Zuvor ist es nöthig, die singuläre Fläche von dem allgemeineren Gesichtspunkte aus zu betrachten, den auch Herr Pasch in seiner Arbeit zu Grunde gelegt hat.

IV.

Theorie der Congruenzen und ihrer Brennflächen.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Congruenz $(mn)^{\text{ter}}$ Ordnung und Classe, welche durch zwei Complexe

$$f = 0, \qquad \varphi = 0 \tag{1}$$

vom n^{ten} und m^{ten} Grade bestimmt ist.

Auf jeder Geraden x, welche den Gleichungen genügt, giebt es zwei Punkte $F_1 F_2$, für welche die Tangentialebenen $E_1 E_2$ der zugehörigen Complexkegel coincidiren, entsprechend den beiden Werthen von y, welche die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} (yf) = 0 \\ (y\varphi) = 0 \\ (yx) = 0 \\ (y\alpha) = 0 \\ (y^2) = 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

liefern. $F_1 F_2$ heissen die *Brennpunkte*, $E_1 E_2$ die *Brennebenen* der Geraden x.

Analytisch lassen sich die Brennebenen resp. Brennpunkte folgendermassen bestimmen. Die sämmtlichen unendlich nahen Geraden der Congruenz befriedigen die Gleichungen der beiden Tangentialcomplexe:

$$(yf) = 0, \qquad (y\varphi) = 0.$$

Unter den Complexen des Büschels

$$(yf) + \lambda(y\varphi) = 0$$

giebt es nun zwei specielle mit den Directricen

---

ausgesprochen worden Crelle's Journal, Bd. 76 (vgl. auch Klein, Math. Annalen, Bd. V, p. 275). Die Darstellung des Textes, welche unmittelbar an die Principien der Liniengeometrie anschliessend, die Verhältnisse mit den bekannten Eigenschaften eines Complexes zweiten Grades in Verbindung bringt, dürfte mehrere Punkte erledigen, welche der bisherigen Auffassung weniger zugänglich waren.

$$z_i' = f_i + \lambda_1 \varphi_i,$$
$$z_i'' = f_i + \lambda_2 \varphi_i,$$

wobei $\lambda_1 \lambda_2$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(3) \qquad (f^2) + 2\lambda(f\varphi) + \lambda^2(\varphi^2) = 0$$

sind. Die beiden Punkte, in denen x von $z'z''$ geschnitten wird, sind die Brennpunkte $F_1 F_2$, die Ebenen (xz') (xz') die zugehörigen Brennebenen.

Wir betrachten jetzt eine unendlich nahe Gerade $x' = x + dx$ der Congruenz, für welche demnach

$$(xdx) = 0, \quad (\varphi dx) = 0, \quad (fdx) = 0, \quad (kdx) = 0.$$

Es entsprechen derselben die Directricen:

$$\xi_i' = f_i + \lambda_1 \varphi_i + \delta f_i + \lambda_1 \delta \varphi_i + \varphi_i d\lambda_1.$$
$$\xi_i'' = f_i + \lambda_2 \varphi_i + \delta f_i + \lambda_2 \delta \varphi_i + \varphi_i d\lambda_2.$$

Es ergeben sich daraus die Gleichungen:

$$(x\ \zeta') = 0, \quad (x\ \zeta'') = 0.$$
$$(x\ z') = 0, \quad (x\ z'') = 0.$$
$$(x'\ \zeta') = 0, \quad (x'\zeta'') = 0.$$
$$(x'z') = 0, \quad (x'z'') = 0.$$

Die Geraden $xx'\zeta'z'$, sowie $xx'z''\zeta''$ bilden daher ein unendlich kleines windschiefes Vierseit. Daraus geht hervor, dass die consecutiven Ebenen von (xz'), (xz''), nämlich $(x_1'\zeta')$ $(x'\zeta'')$ durch die Brennpunkte $F_1 F_2$ gehen. Folglich umhüllen die Ebenen die Fläche der Brennpunkte. Es sind aber (xz') (xz'') die Brennebenen der Punkte $F_2 F_1$. Damit ist der bekannte Satz bewiesen, den zuerst Herr Pasch über die doppelte Generation der Brennflächen gegeben hat:

Die sämmtlichen Geraden der Congruenz sind Doppeltangenten ihrer Brennfläche. Jedem der beiden Berührungspunkte $F_1 F_2$ entsprechen als Tangentialebenen der Brennfläche die Brennebenen der Punkte $F_2 F_1$.

Die Coordinaten y einer beliebigen Tangente der Brennfläche sind daher dargestellt durch

$$(4) \qquad \varrho y_i = \mu x_i + f_i + \lambda \varphi_i.$$

Und man erhält die Gleichung der Brennfläche in Liniencoordinaten durch Elimination der x, λ, μ, ϱ aus den Gleichungen (4) (3), sowie

$$(5) \qquad f = 0, \quad \varphi = 0, \quad (x^2) = 0.$$

Die letzteren drei Gleichungen nebst der Gleichung (3) kann man, da $(y^2) = 0$ vorauszusetzen ist, ersetzen durch die Gleichung

$$(xy) = 0$$

und irgend zwei der Gleichungen (5).

Es sei beispielsweise f vom ersten Grade gleich

$$a_x = 0,$$

φ ein Complex zweiten Grades $x_i x_k a_{ik} = 0$. Die Gleichungen (4) lauten dann

$$\varrho y_i = \mu x_i + a_i + \lambda a_{ik} x_k$$

und die Gleichung der Brennfläche ist die Discriminante nach Θ der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{ik} - \Theta & a_i & y_i \\ a_k & 0 & 0 \\ y_k & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

also in den y vom zwölften Grade.

Einer beliebig durch x gelegten Ebene A entsprechen in Bezug auf die Complexe f und φ zwei Punkte als Spitzen der diese Ebene längs x berührenden Complexkegel. *Dieselben bilden mit den beiden Brennpunkten auf x ein bestimmtes Doppelverhältniss, dessen Werth von der Lage der Ebene A unabhängig ist.* Um dasselbe zu bestimmen, ziehen wir in derselben durch die beiden Brennpunkte zwei Gerade r, s, welche sich unter einander schneiden. Es bestehen dann die Gleichungen:

$$(rx) = 0, \quad (sx) = 0,$$
$$(rf) + \lambda_1 (r\varphi) = 0,$$
$$(sf) + \lambda_2 (s\varphi) = 0.$$

Denkt man sich nun die Spitzen der beiden Complexkegel durch die Strahlen $r + \mu_1 s$, $r + \mu_2 s$ bestimmt, so ist ferner:

$$(rf) + \mu_1 (sf) = 0,$$
$$(r\varphi) + \mu_2 (s\varphi) = 0.$$

Das Doppelverhältniss der vier Geraden

$$r, \quad s, \quad r + \mu_1 s, \quad r + \mu_2 s$$

ist aber

$$\delta = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{(rf)}{(r\varphi)} : \frac{(sf)}{(s\varphi)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

also durch die Wurzeln der Gleichung (3) vollkommen bestimmt.

Dabei ist

$$\frac{(\delta + 1)^2}{\delta} = \frac{4(f\varphi)^2}{(f^2)(\varphi^2)}. \tag{6}$$

Es giebt daher eine Linienfläche von Complexgeraden, bestimmt durch die Gleichungen (1) *und* (6), *für welche das Doppelverhältniss den constanten Werth δ besitzt. Ihr Grad ist*

$$4nm(m+n-2),$$

ihr Geschlecht $2mn(m+n-2)(3m+3n-8) + 1$. Ist insbesondere

$(f\varphi) = 0$, so ist das Doppelverhältniss harmonisch, die Lage der Kegelspitzen zu den Brennpunkten eine involutorische. *Die Linienfläche der Involution ist vom Grade*

$$2nm(m+n-2).$$

Es kann der Fall eintreten, dass für alle Congruenzgeraden die Bedingung $(f\varphi) = 0$ erfüllt ist. Die Complexe mögen dann *involutorische* heissen.

Damit ein Complex zweiten Grades $a_{ik}x_ix_k = 0$ mit einem linearen Complexe $\alpha_x = 0$ in Involution liege, müssen die Gleichungen:

$$\alpha_i a_{ik} = \varrho\alpha_k, \quad k = 1, 2, 3 \cdots 6$$

bestehen. Die Determinante derselben, gleich Null gesetzt, ist eine Gleichung sechsten Grades für ϱ, deren Wurzeln sechs lineare Complexe liefern, die mit dem gegebenen in Involution liegen. Bezeichnet man die den sechs Wurzeln entsprechenden Coefficienten derselben durch

$$\alpha_{i1}\ \alpha_{i2}\ \alpha_{i3}\ \alpha_{i4}\ \alpha_{i5}\ \alpha_{i6},$$

so ergiebt sich

$$(\alpha_{ir}\alpha_{is}) = 0,$$

wenn r, s irgend zwei verschiedene Zahlen der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6 sind. Je zwei der linearen Complexe liegen also auch untereinander in Involution. Die Coefficienten derselben geben zugleich die Transformation der Gleichung $a_{ik}x_ix_k = 0$ auf ihre kanonische Form:

$$\varrho_1 y_1^2 + \varrho_2 y_2^2 + \varrho_3 y_3^2 + \varrho_4 y_4^2 + \varrho_5 y_5^2 + \varrho_6 y_6^2 = 0,$$

während (x^2) in (y^2) übergeht. Setzt man nämlich:

$$x_i = \alpha_{i1}y_1 + \alpha_{i2}y_2 + \alpha_{i3}y_3 + \alpha_{i4}y_4 + \alpha_{i5}y_5 + \alpha_{i6}y_6$$

und bestimmt die absoluten Werthe der α_i so, dass

$$(\alpha_{is}^2) = 1, \quad s = 1, 2 \cdots 6,$$

so ist umgekehrt

$$y_i = \alpha_{1i}x_1 + \alpha_{2i}x_2 + \alpha_{3i}x_3 + \alpha_{4i}x_4 + \alpha_{5i}x_5 + \alpha_{6i}x_6,$$

woraus

$$(y_i^2) = (x_i^2)$$

und

$$x_i a_{ik} = y_1\alpha_{k1}\varrho_1 + \cdots y_6\alpha_{k6}\varrho_6,$$

mithin

$$x_i x_k a_{ik} = y_i^2\varrho_i$$

wird.

Die beiden zu einer Congruenzgeraden x gehörenden Brennpunkte werden zusammenfallen, wenn die Discriminante

$$(f\varphi)^2 - (f^2)(\psi^2)$$

von (3) verschwindet. *Dem entsprechend giebt es eine Linienfläche vom Grade* $4mn(m+n-2)$, *deren Erzeugende vierpunktige Tangenten der*

*Brennfläche sind**). Die Berührungspunkte derselben auf der Brennfläche bilden eine Curve, die als Curve vierpunktiger Berührung bezeichnet werden mag. Wir bemerken dabei, dass ausser derselben noch weitere Curven vierpunktiger Berührung auf der Brennfläche vorhanden sind, deren vierpunktige Tangenten nicht Geraden der Congruenz sind.

Die Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, $(f^2) = 0$ bestimmen eine Linienfläche vom Grade $4n(n-1)m$. Die Gerade x ist dann eine singuläre Linie des Complexes, eine der zugehörigen Brennebenen (x, f) coincidirt mit der singulären Ebene der singulären Fläche des Complexes $f = 0$. Daraus ergiebt sich der Satz:

Die Brennfläche von f und φ berührt die singulären Flächen dieser beiden Complexe nach der ganzen Erstreckung von zwei Curven, den Berührungscurven von zwei Linienflächen $4n(n-1)m$, $4m(m-1)n^{ten}$ Grades.

Sind f und φ Complexe gleichen Grades, so kann man jeden der Complexe ersetzen durch einen Complex des Büschels $f + \lambda\varphi = 0$, ohne dass die Brennfläche sich ändert. Es folgt daraus:

Die Brennfläche zweier Complexe gleichen Grades wird umhüllt von einfach unendlich vielen singulären Flächen von Complexen desselben Grades.

Liegen die Complexe f und φ in Involution, so besteht die Curve der vierpunktigen Berührung aus zwei getrennten Theilen, welche den beiden Systemen:

$$f = 0\,, \quad \varphi = 0\,, \quad (f^2) = 0\,,$$
$$f = 0\,, \quad \varphi = 0\,, \quad (\varphi^2) = 0$$

entsprechen. Es sind die beiden Berührungscurven der Brennflächen mit den singulären Flächen. Ausserdem treten aber besondere Geraden der Congruenz auf, bestimmt durch

$$f = 0\,, \quad \varphi = 0\,, \quad (f^2) = 0\,, \quad (\varphi^2) = 0\,.$$

Für dieselben werden die Wurzeln der Gleichung (3) unbestimmt. Dabei liegen dann entweder die Geraden $f_i\, \varphi_i\, x_i$ in einer Ebene, jeder Punkt der Geraden x ist dann als Brennpunkt zu betrachten. Die Gerade x gehört also der Brennfläche ganz an und allen ihren Punkten entspricht die nämliche Ebene als Tangentialebene. Die Brennfläche hat also ein *pinch-plane* nach Cayley's Bezeichnung**). Oder die ge-

---

*) Es mag hier daran erinnert werden, dass die Doppeltangente mit zusammenfallenden Berührungspunkten bei einer *Ordnungscurve* immer *vierpunktige* Tangente ist, bei einer *Classencurve* dagegen *Wendetangente*.

**) Cayley, On reciprocal surfaces, Phil. Transactions 1869. Die ausgezeichnete Gerade der pinch-Singularität, für welche in der deutschen Literatur noch kein Ausdruck eingeführt zu sein scheint, wird im Folgenden als *pinch-line* bezeichnet.

nannten drei Geraden gehen durch einen Punkt, dann ist jede Ebene durch x als Tangentialebene der Brennfläche in diesem Punkte zu betrachten, derselbe ist ein *pinch-point*. Im Allgemeinen wird es dabei wieder eintreten können, dass die Zahl der pinch-points gleich der der pinch-planes ist, wir erhalten also

$$4mn(n-1)(m-1)$$

als Zahl jeder dieser beiden Singularitäten.

Dieselben treten überhaupt auf, sobald das System der Gleichungen

$$f=0,\quad \varphi=0,\quad (f^2)=0,\quad (\varphi^2)=0,\quad (f\varphi)=0,\quad (x^2)=0$$

gemeinschaftliche Lösungen zulässt (wozu im Allgemeinen eine Bedingung erforderlich sein wird), doch lässt sich dann ohne besondere Untersuchung nicht feststellen, auf welche der genannten Singularitäten sich dieselben beziehen. Jene sechs Gleichungen sprechen eine particuläre Lage der beiden Complexe aus, bei welcher ihre singulären Flächen sich in einem Punkte schneiden oder eine gemeinsame Tangentialebene besitzen, für welche ein und dieselbe Gerade singuläre Linie beider Complexe ist. Im ersteren Falle haben die beiden zugehörigen Complexkegel dieselbe Linie zur Doppelkante, ein solcher Punkt gehört in der That der Doppelcurve der Brennfläche an (vgl. § XII.) und ist ein pinch-point derselben.

Für die Brennflächen eines linearen Complexes ($f=a_x$) treten, da $(f^2)=$ const., im Allgemeinen keine pinch-Singularitäten auf. Ist aber der lineare Complex speciell, so entstehen diejenigen Flächen, welche bereits durch Plücker unter dem Namen der *Complexflächen* in die Theorie der Complexe eingeführt sind. Man kann sie definiren als erzeugt durch die Complexcurven von φ in den durch die Axe des speciellen gehenden Ebenen, oder als umhüllt von den Complexkegeln von φ, deren Spitzen sich auf der Axe befinden. Eine Curve vierpunktiger Berührung der obigen Art kommt den Complexflächen nicht zu. *Dagegen treten, den Gleichungen*

$$a_x=0,\quad \varphi=0,\quad (\varphi^2)=0,\quad (a\varphi)=0$$

entsprechend, $2n(n-1)^2$ *auf der Axe a liegende pinch-points und ebenso viel durch sie gehende pinch-planes auf.*

Die Curve, in welcher die Linienfläche

$$\varphi=0,\quad a_x=0,\quad (a\varphi)=0$$

die Complexfläche berührt, ist zugleich die Berührungscurve der letzteren mit der singulären Fläche von φ.

V.

Ordnung und Classe der Brennfläche einer Congruenz.

Die Brennfläche als Punktgebilde betrachtet ist der Ort der Berührungspunkte von Complexcurven, der Spitzen sich berührender Complexkegel der beiden Complexe f und φ. Als Ebenengebilde wird sie umhüllt von den gemeinschaftlichen Berührungsebenen von Complexkegeln, den Ebenen sich berührender Complexcurven. In diesen dualistischen Definitionen liegt der duale Charakter der Brennflächen vollkommen ausgesprochen, man kann sie geradezu als sich selbst reciproke Flächen betrachten (vgl. Einleitung). Eine wirkliche Reciprocität insbesondere kommt der Brennfläche eines linearen Complexes zu.

Es ist daher die Ordnung der Brennfläche identisch mit ihrer Classe.

Wir bestimmen die Summe der Anzahlen der Punkte und Ebenen derselben, welche mit einer willkürlichen Geraden y vereinigt liegen, auf folgende Weise.

Damit y von zwei unendlich nahen Geraden x, $x + dx$ der Congruenz $f = 0$, $\varphi = 0$ geschnitten werde, welche sich untereinander schneiden, müssen die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} (yx) = 0, & f = 0, \quad \varphi = 0, \quad (x^2) = 0, \\ & (y\,dx) = 0, \\ & (f\,dx) = 0, \\ & (\varphi\,dx) = 0, \\ & (x\,dx) = 0, \\ & (k\,dx) = 0, \\ & (dx^2) = 0 \end{cases}$$

bestehen. Die Elimination der dx liefert die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & (yf) & (y\varphi) & 0 & (yk) \\ (yf) & (f^2) & (f\varphi) & 0 & (fk) \\ (y\varphi) & (f\varphi) & (\varphi^2) & 0 & (\varphi k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (kx) \\ (yk) & (fk) & (\varphi k) & (kx) & (k^2) \end{vmatrix}$$

oder nach Entfernung des Factors $(kx)^2$ die Bedingung:

$$(2)\qquad (yf)^2(\varphi^2) - 2(yf)(y\varphi)(f\varphi) + (y\varphi)^2(f^2) = 0.$$

Dieselbe liefert in Verbindung mit den vier ersten Gleichungen (1) $4nm(m+n-2)$ Werthe von x. Es liegt dann entweder der Schnittpunkt von zwei unendlich nahen Geraden der Congruenz und damit ein Punkt der Brennfläche auf y, oder y liegt in der Ebene zweier solcher Geraden, einer Tangentialebene der Fläche. Daraus schliessen wir:

Classe und Ordnung der Brennfläche zweier Complexe vom n^{ten} und m^{ten} Grade ist gleich $2nm(m+n-2)$.

Insbesondere für $m = 1$:

Die Brennfläche eines linearen Complexes und eines Complexes vom n^{ten} Grade ist von der Ordnung und Classe $2n(n-1)$ *).

Für den Fall, dass $f = a_x = 0$ und y dem Complexe $a_x = 0$ angehört, reducirt sich die Gleichung (2) auf

$$(a^2)(y\varphi)^2 = 0.$$

Man erhält also aus den Gleichungen (1), (2) nur $2n(n-1)$ doppeltzählende Lösungen. Jede der Geraden x vermittelt durch ihren Schnitt mit y einen Punkt; durch die Ebene, welche sie mit y bildet, aber gleichzeitig eine Ebene der Brennfläche.

Die Brennfläche kann auch in Theile niederer Ordnung zerfallen. Insbesondere trennen sich die beiden Brennpunkte auf jeder Geraden rational, wenn die Discriminante $(f^2)(\varphi^2) - (f\varphi)^2$ ein Quadrat ist. Das Letztere findet namentlich dann statt, wenn von den Ausdrücken $(f^2)(\varphi^2)$ einer für alle Congruenzgeraden verschwindet.

Es ist dies der Fall für die ausgezeichnete Congruenz

$$f = 0, \quad \varphi = F = 0.$$

Die Gleichung (2) zerlegt sich dann in die folgenden:

$$(yf) = 0,$$
$$(yf)(F^2) - 2(y\varphi)(fF) = 0.$$

Demgemäss zerfällt die Brennfläche in zwei Flächen, von denen die eine die singuläre Fläche des Complexes f ist. Denn die Gleichungen

$$f = 0, \quad F = 0, \quad (xy) = 0, \quad (yf) = 0, \quad (x^2) = 0$$

sagen aus, dass die Gerade y entweder durch einen Punkt der singulären Fläche geht oder in einer Ebene derselben liegt. Aus den $4n(n-1)^2$ Lösungen derselben entnehmen wir den Satz:

---

*) Vgl. eine Bemerkung von Herrn Klein, Math. Annalen Bd. V, S. 436. Die obige Zahl kann man auch auf folgendem Wege ableiten. Die Bedingung, dass zwei ebene Curven n, m^{ter} Ordnung sich berühren, ist vom Grade

$$m(2n+m-3), \quad n(2m+n-3)$$

in den Coefficienten derselben. Schneidet man die beiden Complexkegel eines beliebigen Punktes mit einer Ebene, so entstehen zwei ebene Curven dieser Ordnungen, in deren Coefficienten die Coordinaten der Kegelspitze im n, m^{ten} Grade eingehen. Die Bedingung der Berührung enthält daher diese Coordinaten im Grade

$$k = nm(3n+3m-6),$$

woraus der Grad N der von den Kegelspitzen gebildeten Fläche

$$N = \tfrac{2}{3}k = 2nm(m+n-2).$$

Die singuläre Fläche eines Complexes n^{ten} Grades ist von der Ordnung und Classe

$$2n(n-1)^2 \text{ *)}.$$

Die Lösungen von

$$f=0,\ F=0,\ (xy)=0,\ (x^2)=0,\ (yf)(F^2)-2(y\varphi)(fF)=0$$

beziehen sich dagegen auf den anderen Theil der Brennfläche, welcher als *accessorische Fläche* bezeichnet werden möge.

Die accessorische Fläche ist von der Ordnung und Classe

$$2n(n-1)(5n-7).$$

Die singuläre und accessorische Fläche berühren sich in einer Curve (dieselbe ist die zur Selbstberührungscurve degenerirte Curve vierpunktiger Berührung der totalen Brennfläche), *welche durch die Linienfläche*

$$f=0,\ (fF)=0,\ F=0$$

bestimmt ist.

Die Gleichung (2) lässt sich übrigens auf mannigfachem Wege herleiten, wie wir noch hinzufügen wollen. Wir betrachten die Linienfläche von Congruenzgeraden, welche eine willkürliche Gerade y schneiden:

$$f=0,\ \varphi=0,\ (xy)=0.$$

Ihre Cuspidalpunkte sind gegeben durch die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 0 & (yf) & (y\varphi) \\ (yf) & (f^2) & (f\varphi) \\ (y\varphi) & (f\varphi) & (\varphi^2) \end{vmatrix} = 0,$$

welche mit (2) identisch ist. Diese Cuspidalpunkte liegen entweder auf der Geraden y, sie entsprechen den Schnittpunkten der Brennfläche mit derselben, oder die ihnen zugehörigen parabolischen Ebenen gehen durch die Gerade y, es sind die Tangentialebenen, welche durch y gelegt werden können.

Man kann der Gleichung (2) noch eine andere Deutung geben. Ein beliebiger linearer Complex $a_x=0$ hat mit der Congruenz überhaupt eine Linienfläche $2mn^{ten}$ Grades gemeinsam, welche die Brennfläche in einer Curve $2mn(m+n-2)^{ten}$ Grades berührt. Die Punkte der letzteren, in denen die Tangentialebene der Brennfläche zugleich Ebene des linearen Complexes (in Bezug auf den Berührungspunkt) ist, sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$f=0,\ \varphi=0,\ a_x=0,\ (x^2)=0,$$
$$(a\varphi)^2(f^2)-2(af)(a\varphi)(f\varphi)+(af)^2(\varphi^2)=0,$$

---

*) Clebsch, Math. Annalen Bd. V, S. 440.

aus denen man wieder, wenn $a_x = 0$ ein specieller linearer Complex ist, die Bestimmung des Grades der Brennfläche entnimmt*).

VI.

Der Rang der Brennflächen.

Die Bildung der Resultante aus den Gleichungen § IV. (4), (5), deren Grad in den Liniencoordinaten y den Rang der Brennfläche bestimmt, stösst schon in den einfacheren Fällen auf bedeutende Schwierigkeiten. Wir schlagen daher einen anderen Weg zur Bestimmung des Ranges ein.

Wir bestimmen zunächst den Grad derjenigen Linienfläche, welche von den Tangenten der Brennfläche gebildet wird, die zwei willkürliche Gerade schneiden. Setzt man dann voraus, dass die beiden letzteren in sich schneidende übergehen, so degenerirt diese Fläche in zwei dualistische Gebilde, einen Kegel, den Tangentenkegel der Brennfläche von einer beliebigen Spitze aus genommen, und eine ebene Curve, die Schnittcurve der Brennfläche mit einer beliebigen Ebene. Der Grad der Linienfläche geht dabei über in die Ordnung des Kegels, vermehrt um die Classe der genannten Curve. Die beiden letzteren Zahlen entsprechen sich dualistisch, der Rang der Brennfläche ist daher gleich der Hälfte des Grades jener Linienfläche.

Die letztgenannte Zahl ist aber überhaupt gleich der Zahl der Tangenten der Brennfläche, welche drei beliebigen linearen Complexen:

$$a_x = 0, \quad b_x = 0, \quad c_x = 0,$$

das heisst einem beliebigen Hyperboloid angehören.

Wir haben daher die gemeinschaftlichen Lösungen der Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} a_y = \mu a_x + (af) + \lambda(a\varphi) = 0, \\ b_y = \mu b_x + (bf) + \lambda(b\varphi) = 0, \\ c_y = \mu c_x + (cf) + \lambda(c\varphi) = 0, \\ f = 0, \quad \varphi = 0, \\ \Psi = (f^2) + 2\lambda(f\varphi) + \lambda^2(\varphi^2) = 0, \\ (x^2) = 0 \end{cases}$$

aufzusuchen.

Aus den ersten drei Gleichungen bilden wir zunächst die folgende:

---

*) Ein linearer Complex hat also mit einer Brennfläche $4mn(m+n-2)$ *Tangentenbüschel* gemein. Es ist dies ein specieller Fall des folgenden allgemeineren Satzes:

Ein linearer Complex hat mit einer Fläche n^{ter} Ordnung, m^{ter} Classe $n+m$ Tangentenbüschel gemein.

$$(2)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ (af) & (bf) & (cf) \\ (a\varphi) & (b\varphi) & (c\varphi) \end{vmatrix} = 0,$$

welche einen Complex vom Grade $(n+m-1)$ vorstellt. Man hat ferner, wenn zur Abkürzung die Bezeichnungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} a_x(bf) - b_x(af) + \lambda[a_x(b\varphi) - b_x(a\varphi)] = S_c = 0, \\ b_x(cf) - c_x(bf) + \lambda[b_x(c\varphi) - c_x(b\varphi)] = S_a = 0, \\ c_x(af) - a_x(cf) + \lambda[c_x(a\varphi) - a_x(c\varphi)] = S_b = 0 \end{cases}$$

eingeführt werden:

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta = \frac{1}{b_x}\left([S_c(b_x(c\varphi) - c_x(b\varphi)] + S_a[(a\varphi)b_x - a_x(b\varphi)]\right), \\ \Delta = \frac{1}{a_x}\left([S_c(a_x(c\varphi) - c_x(a\varphi)] + S_b[(a\varphi)b_x - a_x(b\varphi)]\right). \end{cases}$$

Setzt man daher $f=0$, $\varphi=0$, $\Delta=0$, (x^2) und aus $S_c=0$ den Werth von λ

$$\lambda = -\frac{a_x(bf) - b_x(af)}{a_x(b\varphi) - b_x(a\varphi)}$$

in $\Psi=0$ ein, welches dadurch in den Complex $2(n+m-1)^{ten}$ Grades:

$$(5)\quad [a_x(bf) - b_x(af)]^2(\varphi^2) + 2(f\varphi)[a_x(bf) - b_x(af)]\,[a_x(b\varphi) - b_x(a\varphi)] + f^2\,[a_x(b\varphi) - b_x(a\varphi)]^2 = 0$$

übergeht, so ergeben sich

$$4nm(m+n-1)^2$$

Werthe von x aus den Gleichungen

$$f=0,\quad \varphi=0,\quad (x^2)=0,\quad \Delta=0,\quad \Psi=0.$$

Aber diese befriedigen nicht sämmtlich die Gleichungen (1), welche verlangen, dass mit S_c auch S_a, S_b verschwinden. Es ist dies nach den Gleichungen (4) dann nicht der Fall, wenn

$$(6)\qquad a_x(b\varphi) - b_x(a\varphi) = 0,$$

wobei aus $S_c=0$ folgt:

$$(7)\qquad a_x(bf) - b_x(af) = 0.$$

Wiederum sind aber nicht alle Lösungen des Systemes

$f=0$, $\varphi=0$, $(x^2)=0$, $a_x(b\varphi)-b_x(a\varphi)=0$, $a_x(bf)-b_x(af)=0$

als unbrauchbar auszuscheiden. Denn damit Δ verschwinde, muss zugleich

$$(af)(b\varphi) - (bf)(a\varphi) = 0$$

sein. Von den Wurzeln des letzten Systems sind also zuvor abzuscheiden die des folgenden:

$$f=0,\quad \varphi=0,\quad (x^2)=0,\quad a_x=0,\quad b_x=0.$$

Endlich ist zu bemerken, dass die unbrauchbaren Lösungen doppelt zu zählen sind, da die Ausdrücke (6), (7) quadratisch in der Gleichung $\Psi = 0$ auftreten. Wir erhalten daher als *Grad der Linienfläche:*

$$4nm[(m+n-1)^2 - mn + 1]$$

mithin den folgenden Satz:

Der Rang der Brennfläche zweier Complexe n^{ten}, m^{ten} Grades ist gleich

$$2nm[(m+n-1)^2 - mn + 1].$$

Für $m = 1$ ergiebt sich:

Der Rang der Brennfläche eines linearen Complexes und eines Complexes n^{ten} Grades ist gleich

$$2n[n^2 - n + 1].$$

Wir bestimmen ferner den *Rang der singulären Fläche* eines Complexes: $f = 0$. An Stelle der Gleichungen (1) treten die folgenden:

$$(8) \quad \begin{cases} a_y = \mu a_x + (af) = 0, \\ b_y = \mu b_x + (bf) = 0, \\ c_y = \mu c_x + (cf) = 0, \\ f = 0, \quad F = 0, \quad (x^2) = 0. \end{cases}$$

Setzt man also

$$f = 0, \quad F = 0, \quad a_x(bf) - b_x(af) = 0, \quad a_x(cf) - c_x(af) = 0, \quad (x^2) = 0,$$

so ist das System der Lösungen von:

$$f = 0, \quad F = 0, \quad a_x = 0, \quad (af) = 0, \quad (x^2) = 0$$

als unbrauchbar einfachzählend auszuscheiden.

Der Rang der singulären Fläche eines Complexes n^{ten} Grades ist daher gleich:

$$2n(n-1)(n^2 - n + 1).$$

Der *Rang der accessorischen Fläche* ist dagegen durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_y &= \mu a_x + (af) + \lambda(aF) = 0, \\ b_y &= \mu b_x + (bf) + \lambda(bF) = 0, \\ c_y &= \mu c_x + (cf) + \lambda(cF) = 0, \\ f &= 0, \quad F = 0, \quad (x^2) = 0 \end{aligned}$$

bestimmt, λ ist dabei durch die Gleichung:

$$2(fF) + \lambda(F^2) = 0$$

gegeben.

Der Rang der accessorischen Fläche ist daher

$$2n(n-1)(13n^2 - 31n + 19).$$

Wir bestimmen endlich den *Rang der Complexfläche*

$$\alpha_x = 0, \quad f = 0$$

aus den Gleichungen (1), indem an Stelle von φ a_x gesetzt wird. Die Gleichung $\Psi = 0$ reducirt sich auf

$$(f^2) + 2\lambda(af) = 0 .$$

Werden demgemäss die unbrauchbaren Lösungen des Systems

$$f = 0 , \quad a_x = 0 , \quad (x^2) = 0 , \quad \Delta = 0 , \quad \Psi = 0$$

einfachzählend ausgeschieden, so bleibt als Rang der Complexfläche

$$n(2n^2 - 2n + 1) .$$

Wir haben die obige etwas umständliche Bestimmung des Ranges der Brennflächen vorgezogen, weil sie unabhängig ist von bereits früher gegebenen Abzählungen. Setzt man indessen den Grad der Brennfläche bereits als bekannt voraus, so kann man auch folgendermassen verfahren.

Wir suchen die Linienfläche von Tangenten, welche zwei willkürliche Gerade α, β schneiden, setzen also:

$$(9) \qquad \begin{cases} f = 0 , \quad \varphi = 0 , \quad \Psi = 0 , \quad (x^2) = 0 , \\ \mu a_x + (af) + \lambda(a\varphi) = 0 , \\ \mu \beta_x + (\beta f) + \lambda(\beta\varphi) = 0 . \end{cases}$$

Um den Grad der Berührungscurve der Linienfläche mit der Brennfläche zu bestimmen*), setzen wir ferner:

$$(10) \qquad \begin{cases} \mu' a_x + (af) + \lambda(a\varphi) = 0 , \\ \mu' b_x + (bf) + \lambda(b\varphi) = 0 . \end{cases}$$

Setzt man nun aus (9) den Werth von λ in $\Psi = 0$ und (10) ein, so erhält man fünf Gleichungen

$$f = 0 , \quad \varphi = 0 , \quad \Psi = 0 , \quad (x^2) = 0 , \quad [10]$$

von den Geraden

$$n , \quad m , \quad 2(n+m-1) , \quad 2 , \quad n + m ,$$

aus deren Lösungen aber die des Systems:

$f=0$, $\varphi=0$, $(x^2)=0$, $\alpha_x(\beta f) - \beta_x(\alpha f)=0$, $\alpha_x(\beta\varphi) - \beta_x(\alpha\varphi)=0$

doppeltzählend auszuscheiden sind. Demnach bleibt als *Grad der Berührungscurve:*

$$2nm[(m+n)(m+n-1) - mn] .$$

Letztere stellt zugleich die Punkte dar, in denen sämmtliche Tangenten der Brennfläche je einem Complexe des Büschels

$$a_x + \varrho b_x = 0$$

angehören.

Degeneriren a, b in zwei sich schneidende Gerade, so zerfällt diese Curve *undualistisch* in zwei Theile, die ebene Schnittcurve der Fläche

*) Vgl. hierüber § IX.

und die Berührungscurve des Tangentenkegels mit derselben. Die Ordnung des letzteren, d. h. die Ordnung des Tangentenkegels ist daher, wenn man die genannte erstere Curve ausscheidet:

$$2nm[(m+n)(m+n-1)-mn-(m+n-2)]=2mn[(m+n-1)^2-mn+1],$$

wie zuvor gefunden wurde.

VII.

Die Haupttangenten der Brennflächen.

Wir kennen jetzt Classe und Ordnung der ebenen Schnittcurve Brennfläche respective ihres Tangentenkegels. Um noch eine weitere der Plücker'schen Zahlen zu finden, wenden wir uns zur Betrachtung der Haupttangenten der Brennflächen. Dieselben bilden eine Congruenz, welche in Folge des dualistischen Charakters der Brennfläche von gleicher Ordnung und Classe ist. Wir stellen uns die Aufgabe, die letzteren beiden Zahlen zu bestimmen.

Nach § IV. ist jeder Punkt A der Brennfläche bestimmt durch den Schnitt der Congruenzgeraden x mit der Directrix

$$z_i = f_i + \lambda \varphi_i,$$

während die sämmtlichen Tangenten der Brennfläche im Punkte A gegeben sind durch die Coordinaten:

$$y_i = \mu x_i + f_i + \lambda \varphi_i. \tag{1}$$

Allen zu A benachbarten Punkten A' der Fläche entsprechen analoge Tangentenbüschel. Unter den Geraden des Büschels (1) giebt es nur zwei, welche ebenfalls einem Büschel für einen benachbarten Flächenpunkt angehören, es sind die beiden Haupttangenten des Punktes A. Es muss sich demnach eine in μ quadratische Gleichung angeben lassen, welche für jeden Punkt der Brennfläche die Richtung der zugehörigen Haupttangenten bestimmt.

Die Coordinaten y_i' einer Tangente des benachbarten Punktes, durch welchen die Gerade $x + dx$ der Congruenz, die Directrix $z + dz$ geht, kann man darstellen in der Form:

$$y_i' = f_i + \lambda\varphi_i + \mu x_i + \delta f_i + \lambda\delta\varphi_i + \varphi_i\delta\lambda + \mu\, dx_i + x_i d\mu. \tag{2}$$

Damit dieselben identisch seien mit einer der Tangenten (1), müssen die sechs Gleichungen:

$$\delta f_i + \lambda\delta\varphi_i + \varphi_i\delta\lambda + \mu\, dx_i + x_i d\mu + dt(f_i + \lambda\varphi_i + \mu x_i) = 0 \tag{3}$$

bestehen. Dieselben enthalten die sechs Differentiale dx_i, zwischen denen die Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} (k\,dx) = 0, \\ (f\,dx) = 0, \\ (\varphi\,dx) = 0, \\ (x\,dx) = 0 \end{cases}$$

bestehen, die Differentiale dt, $d\mu$ endlich $d\lambda$, welches die Gleichung:

$$(5)\qquad \delta(f^2) + 2\lambda\delta(f\varphi) + \lambda^2\delta(\varphi^2) + 2\,d\lambda[(f\varphi) + \lambda(\varphi^2)] = 0$$

befriedigen muss.

Ausserdem bestehen die Gleichungen:

$$(6)\qquad f = 0, \quad \varphi = 0, \quad (x^2) = 0, \quad \Psi = 0.$$

Man hat ferner:

$$(7)\qquad \begin{cases} \delta f_i = n-1\, f_{ik}\, dx_k, \\ \delta\varphi_i = m-1\, \varphi_{ik}\, dx_k, \\ 0 = (f\,dx) + (x_i\delta f_i), \\ 0 = (\varphi\,dx) + (x_i\delta\varphi_i). \end{cases}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (3) mit $x_1 \cdots x_6$ und addirt, so ergiebt sich vermöge (6):

$$(x_i\delta f_i) + \lambda(x_i\delta\varphi_i) = 0.$$

Die Gleichungen (7) zeigen daher, dass von den Gleichungen (4) eine, etwa $(\varphi\,dx)=0$ als in den übrigen schon enthalten, weggelassen werden kann. Ferner multipliciren wir der Reihe nach die Gleichungen (3) mit $f_1 f_2 \cdots f_6$, ebenso mit $\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_6$ und addiren, so kommt:

$$(f_i\delta f_i) + \lambda(f_i\delta\varphi_i) + (f\varphi)\,d\lambda + dt[(f^2) + \lambda(f\varphi)] = 0,$$
$$(\varphi_i\delta f_i) + \lambda(\varphi_i\delta\varphi_i) + (\varphi^2)\,d\lambda + dt[(f\varphi) + \lambda(\varphi^2)] = 0.$$

Multiplicirt man jetzt die zweite Gleichung mit λ, so entsteht durch Addition der ersten, indem man bemerkt, dass:

$$\delta(f^2) = 2(f_i\delta f_i),$$
$$\delta(f\varphi) = (f_i\delta\varphi_i) + (\varphi_i\delta f_i),$$
$$\delta(\varphi^2) = 2(\varphi_i\delta\varphi_i),$$
$$\tfrac{1}{2}\left[\delta(f^2) + 2\lambda\delta(f\varphi) + \lambda^2\delta(\varphi^2) + 2\,d\lambda\big((f\varphi) + \lambda(\varphi^2)\big)\right] = 0,$$

also die Gleichung (5).

Man hat daher einfach aus den Gleichungen (3) und den folgenden:

$$(k\,dx) = 0,$$
$$(f\,dx) = 0,$$
$$(x\,dx) = 0$$

die neun Differentiale dt, $d\lambda$, $d\mu$, dx zu eliminiren.

Dadurch entsteht, wenn statt $(n-1)f_{ik} + \lambda(m-1)\varphi_{ik}$ Ψ_{ik} gesetzt wird, die Determinante:

$$(8)\quad \begin{vmatrix} \Psi_{11}+\mu & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} & \Psi_{15} & \Psi_{16} & \varphi_1 & x_1 & f_1+\lambda\varphi_1+\mu x_1 \\ \Psi_{21} & \Psi_{22}+\mu & \Psi_{23} & \Psi_{24} & \Psi_{25} & \Psi_{26} & \varphi_2 & x_2 & f_2+\lambda\varphi_2+\mu x_2 \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33}+\mu & \Psi_{34} & \Psi_{35} & \Psi_{36} & \varphi_3 & x_3 & f_3+\lambda\varphi_3+\mu x_3 \\ \Psi_{41} & \Psi_{42} & \Psi_{43} & \Psi_{44}+\mu & \Psi_{45} & \Psi_{46} & \varphi_4 & x_4 & f_4+\lambda\varphi_4+\mu x_4 \\ \Psi_{51} & \Psi_{52} & \Psi_{53} & \Psi_{54} & \Psi_{55}+\mu & \Psi_{56} & \varphi_5 & x_5 & f_5+\lambda\varphi_5+\mu x_5 \\ \Psi_{61} & \Psi_{62} & \Psi_{63} & \Psi_{64} & \Psi_{65} & \Psi_{66}+\mu & \varphi_6 & x_6 & f_6+\lambda\varphi_6+\mu x_6 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Reducirt man die letzte Verticalreihe vermöge der beiden vorhergehenden, setzt man ferner $-\mu$ statt μ, multiplicirt man dann die ersten sechs Verticalreihen mit $x_1 \cdots x_6$ und addirt zur vorletzten, nachdem man sie mit μ multiplicirt hat, so entsteht nach Absonderung von (kx):

$$(9)\quad \frac{1}{\mu}\begin{vmatrix} \Psi_{ik}-\mu & f_i & \varphi_i \\ f_i & 0 & 0 \\ x_i & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung (9) ist quadratisch in Bezug auf μ, wir schreiben sie in der Form:

$$(10)\quad \Omega = A\mu^2 + B\mu + C = 0$$

und bestimmen ihre Coefficienten auf folgende Weise:

Wir bezeichnen die Determinante der Grössen

$$\Psi_{ik} - \mu$$

mit Δ, dieselbe horizontal mit $a'b'$, vertical mit $a\ b$ gerändert durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}.$$

Darnach geht (9) über in

$$(11)\quad \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} f_i & \varphi_i \\ f_i & x_i \end{pmatrix} = 0.$$

Multiplicirt man die 6 ersten Horizontalreihen mit den x und addirt zur mit μ multiplicirten letzten, so wird aus (11)

$$(12)\quad \frac{(m-1)\lambda}{\mu^2}\begin{pmatrix} f_i & \varphi_i \\ f_i & \varphi_i \end{pmatrix} = 0.$$

Daher ist der Coefficient von μ^2 gleich dem von μ^4 in der Determinante (12), also:

$$(13)\quad A = (f^2)(\varphi^2) - (f\varphi)^2 \text{ *}).$$

*) Der Werth von A zeigt, was beiläufig bemerkt werden mag, dass diejenigen Geraden der Congruenz, welche Haupttangenten der Brennfläche sind, zugleich vierpunktige Tangenten derselben bilden.

Der Einfachheit halber lassen wir in den Ausdrücken von A, B, C den Factor $(m-1)\lambda$ fort. Man erhält weiter an Stelle von (12):

$$\frac{1}{\mu^3}\begin{pmatrix} f_i & n-1\, f_{ik}\varphi_i + m-1\,\lambda\varphi_{ik}\varphi_i \\ f_i & \varphi_i \end{pmatrix} - \frac{(f\varphi)}{\mu^3}\begin{pmatrix} f_i \\ \varphi_i \end{pmatrix} + \frac{(\varphi^2)}{\mu^3}\begin{pmatrix} f_i \\ f_i \end{pmatrix} = 0,$$

oder

$$(14)\quad \frac{1}{\mu^3}\begin{pmatrix} f_i & n-1\, f_{ik}\varphi_i + m-1\,\lambda\varphi_{ik}\varphi_i \\ f_i & \varphi_i \end{pmatrix} + \frac{\Delta}{\mu^4}\left((f^2)(\varphi^2) - (f\varphi)^2\right)$$
$$= \frac{(f\varphi)}{\mu^4}\begin{pmatrix} n-1\, f_{ik}f_i + m-1\,\lambda\varphi_{ik}f_i \\ \varphi_i \end{pmatrix} + \frac{(\varphi^2)}{\mu^4}\begin{pmatrix} n-1\, f_{ik}f_i + m-1\,\lambda\varphi_{ik}f_i \\ f_i \end{pmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man nun die Determinante Δ durch

$$\mu^6 + \mu^5\Delta_5 + \mu^4\Delta_4 + \mu^3\Delta_3 + \mu^2\Delta_2 + \mu\Delta_1 + \Delta_0,$$

so ist

$$B = \begin{vmatrix} (f^2) & n-1\, f_{ik}\varphi_i f_k + m-1\,\lambda\varphi_{ik}\varphi_i f_k \\ f\varphi & n-1\, f_{ik}\varphi_i\varphi_k + m-1\,\lambda\varphi_{ik}\varphi_i\varphi_k \end{vmatrix}$$
$$- (f\varphi)\,[n-1\, f_{ik}f_i\varphi_k + m-1\,\lambda\varphi_{ik}\varphi_i f_k]$$
$$+ (\varphi^2)\,[n-1\, f_{ik}f_i f_k + m-1\,\lambda\varphi_{ik}f_i f_k] + A\Delta_5,$$

oder

$$(15)\quad B = (f^2)\,[n-1\, f_{ik}\varphi_i\varphi_k + m-1\,\lambda\varphi_{ik}\varphi_i\varphi_k]$$
$$-2(f\varphi)\,[n-1\, f_{ik}\varphi_i f_k + m-1\,\lambda\varphi_{ik}\varphi_i f_k]$$
$$+ (\varphi^2)\,[n-1\, f_{ik}f_i f_k + m-1\,\lambda\varphi_{ik}f_i f_k] + A\Delta_5.$$

Δ_5 kann als identisch gleich Null vorausgesetzt werden, wenn die beiden Complexe vollständig von einander unabhängig sind. Denn man hat

$$\Delta_5 = (n-1)\,\Sigma f_{ii} + (m-1)\lambda\,\Sigma\varphi_{ii}.$$

Um endlich C zu finden, ist die obige Entwickelung fortzusetzen. Man erhält aus (14):

$$\frac{1}{\mu^4}\begin{pmatrix} f_i & n-1\, f_{ik}\varphi_i + m-1\,\lambda\varphi_{ik}\varphi_i \\ f_i & n-1\, f_{ik}\varphi_i + m-1\,\lambda\varphi_{ik}\varphi_i \end{pmatrix} - 2\frac{f\varphi}{\mu^5}\begin{pmatrix} n-1\, f_{ik}\varphi_i + m-1\,\lambda\varphi_{ik}\varphi_i \\ n-1\, f_{ik}f_i + m-1\,\lambda\varphi_{ik}f_i \end{pmatrix}$$
$$-2\frac{f\varphi}{\mu^5}\left(n-1\, f_{ik}f_i\varphi_k + m-1\,\lambda\varphi_{ik}\varphi_i\varphi_k\right)\Delta$$
$$+\frac{(\varphi^2)}{\mu^5}\begin{pmatrix} n-1\, f_{ik}f_k + m-1\,\lambda\varphi_{ik}f_i \\ n-1\, f_{ik}f_k + m-1\,\lambda\varphi_{ik}f_k \end{pmatrix} + \frac{(\varphi^2)}{\mu^5}\left[n-1\, f_{ik}f_k f_i + m-1\,\lambda\varphi_{ik}f_i f_k\right]\Delta$$
$$+\frac{(f^2)}{\mu^5}\left[\varphi_i\varphi_k f_{ik} + m-1\,\lambda\varphi_{ik}\varphi_i\varphi_k\right]\Delta + \frac{A\Delta}{\mu^4}$$
$$+\left[n-1\, f_{ik}\varphi_i\varphi_k + m-1\,\lambda\varphi_{ik}\varphi_i\varphi_k\right]\begin{pmatrix} n-1\, f_{ik}f_i + m-1\,\varphi_{ik}f_i \\ f_i \end{pmatrix}\frac{1}{\mu^5} = 0,$$

und hieraus endlich:

$$16)\quad C=(f^2)\Sigma(n-1f_{ik}\varphi_i+m-1\lambda\varphi_{ik}\varphi_i)^2+(\varphi^2)\Sigma(n-1f_{ik}f_i+m-1\lambda\varphi_{ik}f_i)^2$$
$$-2(f\varphi)\Sigma(n-1f_{ik}\varphi_i+m-1\lambda\varphi_{ik}\varphi_i)(n-1f_{ik}f_i+m-1\lambda\varphi_{ik}f_i)$$
$$+(f_{ik}\varphi_i\varphi_k n-1+m-1\lambda\varphi_{ik}\varphi_i\varphi_k)(n-1f_{ik}f_if_k+m-1\lambda\varphi_{ik}f_if_k)$$
$$-(n-1f_{ik}f_i\varphi_i+m-1\lambda\varphi_{ik}f_i\varphi_k)^2+B\Delta_5+A\Delta_4.$$

Das Summenzeichen der drei ersten Glieder bezieht sich auf den Index k, die Summen in Bezug auf i sind dabei innerhalb jedes Terms auszuführen.

Bezeichnet man in C die drei ersten Glieder mit M, setzt man ferner:

$$r=n-1f_{ik}f_if_k+m-1\lambda\varphi_{ik}f_if_k,$$
$$s=n-1f_{ik}f_i\varphi_k+m-1\lambda\varphi_{ik}\varphi_if_k,$$
$$t=n-1f_{ik}\varphi_i\varphi_k+m-1\lambda\varphi_{ik}\varphi_i\varphi_k,$$

so kann man den drei Coefficienten die folgende Form geben:

$$(17)\qquad \begin{cases} A=(f^2)(\varphi^2)-(f\varphi)^2, \\ B=t(f^2)-2s(f\varphi)+r(\varphi^2)+A\Delta_5, \\ C=M+rt-s^2+B\Delta_5+A\Delta_4. \end{cases}$$

Schreibt man sie in der Gestalt:

$$A=A,$$
$$B=\alpha+\lambda\beta,$$
$$C=a+\lambda b+\lambda^2 c,$$

so sind die Functionen

$$A\ \alpha\ \beta\ a\ b\ c$$

von den Graden:

$$2(m+n-2),\quad 3n+2m-6,\quad 2n+3m-6,$$
$$4n+2m-8,\quad 3n+3m-8,\quad 4m+2n-8$$

in den Variabeln x.

Die Gleichung $\Omega=0$, welche die beiden Haupttangenten bestimmt, sobald der Werth von λ aus $\Psi=0$ eingesetzt ist, wird illusorisch, wenn ihre sämmtlichen Coefficienten verschwinden. Dieser Fall wird im Allgemeinen nicht eintreten, da er das Verschwinden der Resultante von

$$f=0,\quad \varphi=0,\quad (x^2)=0,\quad A=0,\quad B=0,\quad C=0$$

erfordert.

Insbesondere findet derselbe statt, wenn die beiden Brennpunkte auf jeder Geraden der Congruenz coincidiren, d. h. wenn

$$(18)\qquad A=(f^2)(\varphi^2)-(f\varphi)^2=\tfrac{p}{n}f+\tfrac{q}{m}\varphi+hX.$$

Solche Congruenzen heissen nach Herrn Klein specielle, ihre sämmtlichen Geraden sind Haupttangenten der Brennfläche. Man kann

auf folgende Weise das Verschwinden sämmtlicher Coefficienten nachweisen.

Durch Differentiation der identischen Gleichung (18) entsteht:

$$(19)\quad (n-1)(\varphi^2)(f_k f_{ki}) + (m-1)(f^2)\varphi_{ik}\varphi_k - f\varphi)[m-1 f_k \varphi_{ik} + n-1 f_{ik}\varphi_k] = \frac{\partial A}{\partial x_i} = pf_i + q\varphi_i + 2hx_i .$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit f_i, φ_i und summirt nach i, so entsteht:

$$(n-1)(\varphi^2) f_{ki} f_i f_k + (m-1)(f^2)\varphi_{ki}\varphi_k f_i - (f\varphi)[m-1\varphi_{ik} f_i f_k + n-1 f_{ik}\varphi_i f_k] = p(f^2) + q(f\varphi),$$

$$(n-1)(\varphi^2) f_{ki} f_i \varphi_k + (m-1)(f^2)\varphi_{ki}\varphi_k \varphi_i - (f\varphi)[m-1\varphi_{ik} f_i \varphi_k + n-1 f_{ik}\varphi_i \varphi_k] = p(f\varphi) + q(f\varphi^2),$$

also, wenn man die zweite Gleichung mit λ multiplicirt, zur letzten addirt:

$$B = \frac{\partial A}{\partial x_i}(f_i + \lambda\varphi_i) = 0 .$$

Man kann ferner die Gleichung (19) in der Form:

$$(\varphi^2)[n-1 f_{ik} f_k + m-1\lambda\varphi_{ik} f_k] - (f\varphi)[m-1\lambda\varphi_k\varphi_{ik} + n-1 f_{ik}\varphi_k] = pf_i + q\varphi_i + 2hx_i$$

schreiben. Erhebt man sie ins Quadrat, so entsteht:

$$M(\varphi^2) = p^2(f^2) + q^2(\varphi^2) + 2pq(f\varphi)$$

und ferner:

$$r(\varphi^2) - s(f\varphi) = p(f^2) + q(f\varphi),$$
$$s(\varphi^2) - t(f\varphi) = p(f\varphi) + q(\varphi^2),$$

also:

$$(\varphi^2)(rt - s^2) = -[p^2(f^2) + q^2(\varphi^2) + 2pq(f\varphi)],$$

daher nach (17):

$$C = 0 ,$$

wie gezeigt werden sollte.

Die beiden Wurzeln μ_1 μ_2 der Gleichung $\Omega = 0$ bestimmen das Doppelverhältniss der Haupttangenten zu der Geraden x_i und der zugehörigen Directrix $f_i + \lambda\varphi_i$. Sie liegen daher harmonisch zu denselben Geraden, wenn $B = 0$. Die Ordnung der Curve auf der Brennfläche, für deren Punkte das Doppelverhältniss ein harmonisches ist, bestimmt man durch Elimination von λ aus den Gleichungen:

$$a_x(bf) - b_x(af) + \lambda[a_x(b\varphi) - b_x(a\varphi)] = 0 ,$$
$$B = \alpha + \lambda\beta = 0 ,$$
$$f = 0 , \quad \varphi = 0 , \quad \Psi = 0 , \quad (x^2) = 0 .$$

Die Ordnung der fraglichen Curve ist daher:

$$2nm[3(m+n-1)(m+n-2) - mn].$$

Die Haupttangenten der Brennfläche in den Punkten der Berüh-

rungscurven der letzteren mit den singulären Flächen von f und φ sind gegeben durch die Gleichungen:

$$A\mu^2 + \alpha\mu + a = 0,$$
$$A\mu^2 + \beta\mu + c = 0.$$

Es ergiebt sich hieraus die geometrische Bedeutung der Gleichungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$, die wir folgendermassen aussprechen können:

Auf der Berührungscurve der singulären Flächen von f, φ mit der Brennfläche liegen

$$4n(n-1)m(3n+2m-6),$$
$$4m(m-1)n(2n+3m-6)$$

Punkte, für welche die Haupttangenten harmonisch liegen zur Geraden x_i und den zugeordneten Linien f_i, φ_i.

Wir untersuchen noch in Rücksicht auf das Folgende die Gestalt der Coefficienten A, B, C für den Fall, dass einer der Complexe, etwa f, linear, gleich α_x ist. A bleibt dann unverändert, dagegen erhält man, wenn

$$\Phi = (\varphi^2)$$

gesetzt wird:

$$(20)\quad \begin{cases} B = m-1\,\lambda\,[(\alpha^2)(\varphi_k\Phi_k) - 2(\alpha\varphi)(\alpha_k\Phi_k) + \Phi(\varphi_{ik}\alpha_i\alpha_k)] + A\Delta_5, \\ C = m-1\,\lambda^2[(\alpha^2)(\Phi_k^2) - 2(\alpha\varphi)(\Phi_k\varphi_{ik}\alpha_i) + \Phi\Sigma(\alpha_i\varphi_{ik})^2 + (\varphi_k\Phi_k)(\alpha_i\alpha_k\varphi_{ik}) - (\alpha_k\Phi_k)^2 \\ \qquad + B\Delta_5 + A\Delta_4. \end{cases}$$

Die Gleichung $\Omega = 0$ wird darnach homogen für λ, μ. Daraus folgt:

Das Doppelverhältniss der Haupttangenten zu der Geraden x und der Directrix in den beiden Brennpunkten von x ist ein und dasselbe.

Diese Bemerkung ergiebt sich übrigens a priori. Mit jedem linearen Complexe ist eine dualistische Raumtransformation verbunden, welche denselben in sich überführt und damit auch jede Congruenz, die demselben angehört. Dabei geht jeder Punkt der Brennfläche in die Tangentialebene des correspondirenden Brennpunktes über, wonach von selbst erhellt, dass das Doppelverhältniss von irgend vier Geraden durch diesen Punkt sich nicht ändert.

Wir kehren jetzt wieder zu dem allgemeineren Falle zweier Complexe n^{ten} und m^{ten} Grades zurück. Um die Zahl der Haupttangenten zu bestimmen, welche zwei willkührliche Geraden a, b schneiden, suchen wir die gemeinschaftlichen Lösungen der Gleichungen:

$$(21)\quad \begin{cases} \mu a_x + (af) + \lambda(a\varphi) = 0, \\ \mu b_x + (bf) + \lambda(b\varphi) = 0, \\ \Psi = 0, \\ f = 0, \quad \varphi = 0, \quad (x^2) = 0, \\ A\mu^2 + B\mu + C = 0. \end{cases}$$

Setzt man aus den Gleichungen

$$\mu(a_x(b\varphi) - b_x(a\varphi)) + (af)(b\varphi) - (bf)(a\varphi) = 0,$$
$$\lambda(a_x(b\varphi) - b_x(a\varphi)) + (bf)\,a_x \quad - b_x(af) \quad = 0$$

die Werthe von λ, μ in die Gleichungen (21) ein, so entstehen die Gleichungen von vier Complexen, welche von den Graden

$$2(n+m-1),\quad n,\quad m,\quad 4(n+m-2)$$

sind; von den $16\,nm(n+m-2)(n+m-1)$ Lösungen sind aber diejenigen *vierfachzählend* abzuscheiden, welche den Gleichungen:

$$f=0,\ \varphi=0,\ (x^2)=0,\ a_x(b\varphi)-b_x(a\varphi)=0,\ (af)(b\varphi)-(bf)(a\varphi)=0,$$
$$(bf)\,a_x - b_x(af) = 0$$

gleichzeitig zukommen.

Die Zahl der Haupttangenten, welche zwei willkührliche Geraden schneiden (d. h. einer beliebigen linearen Congruenz angehören), ist daher:

$$8\,nm[2(n+m-1)(n+m-2)-nm+1].$$

Unter der Voraussetzung, dass a, b sich schneiden, zerfallen diese Lösungen in zwei sich dualistisch entsprechende Gruppen, die Haupttangenten der ersten Gruppe gehen durch den Punkt (ab), die der zweiten liegen in der gleichnamigen Ebene. Wir haben daher den Satz:

Die Zahl der Inflexionspunkte der ebenen Schnittcurve, respective die der Rückkehrkanten des Tangentenkegels der Brennfläche zweier Complexe n^{ten} und m^{ten} Grades, oder, was dasselbe ist, die Ordnung und Classe der Haupttangentencongruenz der Brennfläche ist gleich:

$$4\,mn[2(m+n-1)(m+n-2)-mn+1].$$

Diese Zahl gilt auch noch für den Fall $n=1$, da die Gleichungen $\Omega=0$, $\Psi=0$ hier keine besondere Form erhalten. Eine solche tritt erst dann ein, wenn der lineare Complex f ein specieller $\alpha_x=0$ ist, wo $(\alpha^2)=0$. Man hat dann:

$$A = -(\alpha\psi)^2,$$
$$B = (\alpha\varphi)L + (\varphi^2)M,$$

und die Gleichungen (21) werden, da

$$(22)\quad \begin{cases} \mu[a_x(b\varphi)-b_x(a\varphi)] + a_\alpha(b\varphi)-b_x(a\varphi)=0, \\ \lambda[a_x(b\varphi)-b_x(a\varphi)] + a_\alpha b_x \quad - b_\alpha a_x \quad = 0, \\ \alpha_x = 0,\quad \varphi = 0,\quad (x^2) = 0, \\ -2(\alpha\varphi)[a_x(b\varphi)-b_x(a\varphi)] + (\varphi^2)[a_\alpha b_x - b_\alpha a_x] = 0, \\ A(a_x(b\varphi)-b_x(a\varphi))^2 + B(a_\alpha b_x - b_\alpha a_x)(a_\alpha(b\varphi)-b_\alpha(a\varphi)) \\ \qquad + C[a_\alpha b_x - b_\alpha a_x]^2 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (22) sind respective von den Graden:

$$1,\ n,\ 2,\ 2n-1,\ 4(n-1).$$

Auszuscheiden ist aber aus ihren Lösungen erstens das doppeltzählende System

$$\alpha_x=0,\quad \varphi=0,\quad (x^2)=0,\quad a_x(b\varphi)-b_x(a\varphi)=0,\quad a_\alpha b_x-b_\alpha a_x=0,$$
$$a_\alpha(b\varphi)-b_\alpha(a\varphi)=0$$

mit $4n(n-1)$ Lösungen, ferner das folgende

$$\alpha_x=0,\quad \varphi=0,\quad a_\alpha b_x-b_\alpha a_x=0,\quad (\alpha\varphi)=0,\quad (x^2)=0$$

mit $2n(n-1)$.

Demnach bleibt

$$8n(n-1)(2n-1)-4n(n-1)-2n(n-1)=2n(n-1)(8n-7).$$

Die Ordnung und Classe der Haupttangentencongruenz der Complexfläche ist daher gleich

$$n(n-1)(8n-7).$$

VIII.

Fortsetzung. Die Haupttangenten der singulären und der accessorischen Fläche eines Complexes.

Die singuläre Fläche eines Complexes $f=0$ besitzt gleichfalls die Eigenschaft einer vollständigen Reciprocität. Da sie als reducibeler Theil der Brennfläche der Congruenz der singulären Linien betrachtet werden kann, so ist die Bestimmung ihrer Haupttangenten in den Formeln des vorigen § enthalten, und es hat keine Schwierigkeit, sie ohne Weiteres aus denselben abzuleiten. Wir ziehen eine directe Betrachtung der Verhältnisse jedoch vor.

Wir haben auszudrücken, dass die Tangenten in zwei unendlich nahen Punkten der singulären Fläche coincidiren. Damit die Tangente der singulären Fläche im singulären Punkte der Geraden x

$$y_i=\mu x_i+f_i$$

identisch sei mit der unendlich nahe liegenden

$$y_i'=\mu dx_i+x_i d\mu+\delta f_i,$$

welche durch den auf der singulären Geraden $x+dx$ liegenden singulären Punkt geht, müssen die Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} {}_{n-1}f_{ik}dx_k+\mu dx_i+x_i d\mu+dt(\mu x_i+f_i)=0, \\ (kdx)=0, \\ (fdx)=0, \\ (Fdx)=0, \\ (xdx)=0 \end{cases}$$

bestehen, unter der Voraussetzung:

$$f = 0, \quad F = 0, \quad (x^2) = 0.$$

Multiplicirt man die 6 ersten Gleichungen (1) mit $x_1 \cdots x_6$ und addirt, so entsteht:

$$(n-1)(fdx) + \mu(xdx) = 0,$$

wird dagegen mit $f_1 \cdots f_6$ multiplicirt, so erhält man:

$$(2) \qquad (n-1)(Fdx) + \mu(fdx) = 0.$$

Man hat also aus den 8 ersten Gleichungen (1) die Differentiale dx_i, $d\mu$, dt zu eliminiren. Dies giebt die Determinante:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} n-1 f_{ik} + \mu & x_i \\ x_i & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

mithin die Gleichung (5) des § III. Dies war übrigens zu erwarten. Die drei Wurzeln der cubischen Gleichung (3) bestimmen im allgemeinen Falle, der in § III. behandelt wurde, drei lineare Polarcomplexe der Geraden x, welche, wie wir uns kurz ausdrücken wollen, *stationär* sind. Für $F = 0$ sind sämmtliche Polarcomplexe speciell, *die Axe des einen fällt mit der Geraden x zusammen, die Axen der beiden anderen sind die Haupttangenten der singulären Fläche*, wie leicht zu übersehen ist. Im Anschluss an den von Herrn Klein eingeführten Begriff der Hauptflächen eines Complexes kann man daher sagen:

Das System der Hauptflächen eines Complexes, welches zur Congruenz der singulären Linien gehört, umhüllt die singuläre Fläche desselben in ihren Haupttangentencurven.

Da die Gleichung $(fdx)=0$ nach (2) $(Fdx)=0$ bedingt, so kann man diesem Satze noch den folgenden hinzufügen:

Die Congruenz der singulären Linien eines Complexes lässt sich in zwei Systeme von einfach unendlich vielen Linienflächen zerfällen, welche Hauptflächen sind. Durch jeden Punkt der singulären Fläche geht je eine Fläche aus beiden Systemen hindurch und berührt dieselbe in der Richtung der einen respective anderen Haupttangente.

Setzt man an Stelle von $\frac{\mu}{n-1}$ in (3) $-\mu$ ein, so ergiebt sich wieder die Gleichung

$$(4) \qquad \mu^2(f_i F_i) + \mu(F_i)^2 + f_{ik} F_i F_k + \alpha_i(f_i F_i) = 0.$$

Aus derselben entnehmen wir als Ordnung und Classe der Haupttangentencongruenz der singulären Fläche:

$$2n(n-1)(5n^2-8n+2).$$

Für die accessorische Fläche ist endlich in den Entwickelungen des vorigen § zu setzen:

$$\varphi = F = 0, \quad m = 2(n-1),$$
$$\Psi = 2(f_i F_i) + \lambda(F^2) = 0.$$

Demnach wird

$$A = -(fF)^2,$$
$$F_{ik}\varphi_i f_k = (F_i^2), \quad f_{ik}f_i f_k = (f_i F_i),$$

also

$$B = -(f_iF_i)(F_i^2)n - 1 + m - 1\left[(F_i^2)(f_if_kF_{ik}) - 2(f_iF_i)(F_{ik}f_if_k)\right] + A\Delta^5,$$
$$C = -(f_iF_i)(n-1)^2(f_{ik}F_iF_k)$$
$$+\lambda(m-1)(n-1)\left[(f_{ik}F_iF_k)\Sigma F_{ik}f_if_k - (f_iF_i)\left\{2\Sigma(f_{ik}F_i)(F_{ik}f_i) + F_{ik}F_iF_k\right\}\right]$$
$$+(m-1)^2\lambda^2\left[(F_{ik}F_iF_k)(F_{ik}f_if_k) - (F_{ik}f_iF_k)^2 - 2(f_iF_i)\Sigma(F_{ik}F_i)(F_{ik}f_i)\right]$$
$$+A\Delta_4 + B\Delta_5.$$

Werden nun in die Gleichungen:

$$f = 0, \quad F = 0, \quad \Psi = 0, \quad (x^2) = 0, \quad \Omega = 0$$

die Werthe von λ aus

$$(af)b_x - a_x(bf) + \lambda\left(b_x(aF) - a_x(bF)\right) = 0,$$
$$(bf)(aF) - (af)(bF) + \mu\left(b_x(aF) - a_x(bF)\right) = 0$$

eingesetzt, so entstehen fünf Gleichungen von den Graden:

$$n, \quad 2(n-1), \quad (5n-6), \quad 2, \quad 2(6n-8).$$

Aus den Lösungen desselben sind aber auszusondern erstens doppeltzählend die des Systems:

$$f=0, \quad F=0, \quad (x^2)=0, \quad (af)b_x - a_x(bf)=0, \quad (aF)b_x - a_x(bF)=0,$$
$$(af)(bF) - (aF)(bf) = 0,$$

also im Ganzen:

$$8n(n-1)\left[2n(n-1)-1\right],$$

ferner die gemeinschaftlichen Lösungen von

$$(f_iF_i) = 0, \quad a_x(bf) - b_x(af) = 0, \quad f = 0, \quad F = 0, \quad (x^2) = 0$$

einfachzählend. Ihre Zahl beträgt:

$$4n^2(n-1)(3n-4).$$

Man erhält daher als Ordnung und Classe der Haupttangentencongruenz der accessorischen Fläche:

$$2n(n-1)\left[4(5n-6)(3n-4) - 4n(n-1) + 2 - n(3n-4)\right]$$
$$= 2n(n-1)(53n^2 - 144n + 98).$$

IX.

Ueber Curven auf den Brennflächen und singulären Flächen von Complexen.

Wird den Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ der Congruenz zweier Complexe eine Gleichung $\psi = 0$ vom p^{ten} Grade hinzugefügt, so ist damit

eine Linienfläche $2mnp^{ten}$ Grades aus den Geraden der Congruenz ausgesondert, auf deren Erzeugenden die Berührungspunkte derselben mit der Brennfläche eine gewisse Curve bilden, die im Allgemeinen zweideutig auf die Linienfläche bezogen ist. Ein eindeutiges Entsprechen tritt nur ein, wenn durch die Gleichung $\psi = 0$ die Brennpunkte rational getrennt werden, also beispielsweise für Gleichungen von der Form

$$\psi = M^2\Theta + N^2 = 0,$$

wo

$$\Theta = (f^2)(\varphi^2) - (f\varphi)^2.$$

Die Curve steht in einem dualistischen Zusammenhange mit den betrachteten Complexen. Indessen entspricht sie sich nicht selbst dualistisch, sondern der Cuspidalcurve der längs ihr der Brennfläche umschriebenen Developpabeln. In der That ist es leicht zu sehen, dass die Ordnung der Curve gleich der Classe jener Cuspidalcurve ist und umgekehrt, während der Rang beider Curven gleich ist.

Wir bestimmen zunächst die *Ordnung* der Curve. Jeder Punkt der Brennfläche ist als Schnittpunkt der Directrix $f_i + \lambda\varphi_i$ mit x_i anzusehen. Eine beliebige Tangente der Brennfläche hat die Coordinaten

$$y_i = \mu x_i + f_i + \lambda\varphi_i.$$

Damit dieselbe zwei willkührliche Geraden a, b schneide, müssen die Gleichungen

$$\mu a_x + (af) + \lambda(a\varphi) = 0,$$
$$\mu b_x + (bf) + \lambda(b\varphi) = 0$$

bestehen. Daraus ergiebt sich:

$$a_x(bf) - b_x(af) + \lambda[a_x(b\varphi) - b_x(a\varphi)] = 0.$$

Aus den Gleichungen

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0,$$

$$(f^2)(a_xb_\varphi - b_xa_\varphi)^2 - 2(f\varphi)[(a_xb_\varphi - b_xa_\varphi)(a_xb_f - b_xa_f)] + (\varphi^2)(a_xb_f - b_xa_f)^2 = 0$$

erhält man $4mnp(m+n+p-1)$ Werthe von x. Schneiden sich a und b, so liegt entweder ein Punkt der fraglichen Curve in der Ebene (ab), oder die Ebene der Brennfläche für einen Punkt der Curve geht durch den Punkt (ab). Aus dem dualistischen Entsprechen beider Fälle folgt daher:

Die Ordnung der Curve, in welcher die Linienfläche $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *die Brennfläche* $f = 0$, $\varphi = 0$ *berührt, ist gleich:*

$$2mnp(m+n+p-1).$$

Es wurden nun in § IV. die folgenden Curven betrachtet:

1) die Curve des constanten Doppelverhältnisses,
2) die Curve der Involution,

3) die Curve vierpunktiger Berührung. Sie ist eindeutig auf die Linienfläche $f = 0$, $\varphi = 0$, $\Theta = 0$ bezogen,

4) die Berührungscurven der Brennfläche mit den singulären Flächen von f und φ, welche eindeutig auf die Linienflächen $f = 0$ $\varphi = 0$ $F = 0$, $f = 0$ $\varphi = 0$ $\Phi = 0$ bezogen sind.

Wir erhalten daher sofort:

Die Ordnung der Curve des constanten Doppelverhältnisses ist gleich $4mn(m+n-1)(m+n-2)$, *die der Curve der Involution*

$$2mn(m+n-1)(m+n-2).$$

Die Ordnungen der Berührungscurven mit den singulären Flächen von f *und* φ *sind* $2n^2m(n-1)$, $2m^2n(m-1)$, *ihre Geschlechter die der correspondirenden Linienflächen, also* $2nm(n-1)(3n+m-6)+1$, $2nm(m-1)(3m+n-6)+1$. *Die Curve der vierpunktigen Berührung ist endlich von der Ordnung* $2mn(m+n-1)(m+n-2)$ *vom Geschlechte* $2mn(m+n-1)(3m+3n-8)+1$.

Die Singularitäten der letzteren Curven lassen sich daher bestimmen, sobald man etwa noch eine ihrer Plücker'schen Zahlen bestimmt hat.

Wir betrachten zunächst die *Curve vierpunktiger Berührung auf den Brennflächen eines linearen Complexes.*

Die Tangentialebene der Brennfläche in den Punkten der Curve vierpunktiger Berührung sind zugleich die durch den linearen Complex den nämlichen Punkten zugeordneten Ebenen.

Soll nämlich im Falle $\varphi = a_x = 0$ die Directrix

$$a_i + \lambda f_i$$

dem linearen Complexe selbst angehören, so muss

$$(a^2) + \lambda(af) = 0$$

sein, mithin die Discriminante von $\Psi = 0$ verschwinden.

Die Curve der vierpunktigen Berührung ist mithin Curve eines linearen Complexes, d. h. eine *Haupttangentencurve* der Brennfläche*).

Da die Zahl ihrer Spitzen und stationären Ebenen gleich Null ist, so hat man für ihre Singularitäten die folgenden Werthe:

$$N = M = 2n^2(n-1)\text{**}).$$
$$P = 2n(n-1)(3n-5)+1.$$
$$R = 4n(n-1)(4n-5).$$
$$\nu = 20n(n-1)(2n-3).$$

*) Vgl. Lie, Math. Annalen Bd. V, S. 178. Liegt der lineare Complex φ mit f in Involution, so ist sie zugleich eine Haupttangentencurve der singulären Fläche von f.

**) Aus der Zahl N ergiebt sich leicht eine Bestätigung des Werthes, den wir oben für den Rang der Brennfläche erhalten haben. Wenn eine Gerade des linearen Complexes, dem die Brennfläche angehört, die letztere berührt, so ist sie

Diese Haupttangentencurve ist zugleich für die Linienfläche der vierpunktigen Berührung eine von denjenigen, die ich schon an einer anderen Stelle betrachtet habe. Man kann, wie jetzt gezeigt werden soll, die analytische Untersuchung dieser Curven so führen. Unter den Haupttangenten y der Erzeugenden x einer durch drei Complexe

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0$$

bestimmten Linienfläche giebt es zwei von solcher Lage, dass die Ebene (xy) zugleich Tangentialebene des dem Punkte (xy) entsprechenden Complexkegels von φ ist. Wir bestimmen die Coordinaten dieser beiden Geraden. Aus den Gleichungen:

(1) $(y\varphi) = 0, \quad (yx) = 0, \quad (y\,dx) = 0, \quad (y\,dx) = 0, \quad (y^2) = 0,$

welche eine Haupttangente der verlangten Eigenschaft charakterisiren, folgt:

(2) $$\mu y_i = \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_i},$$

wenn Ω gleich der Determinante $(\varphi_i\, x_i\, dx_i\, d^2x_i\, y_i\, \varrho_i)$ gesetzt wird. Dabei ist ferner:

(3) $$\begin{cases} (f\,dx)=0, \quad (\varphi\,dx)=0, \quad (\psi\,dx)=0, \quad (x\,dx)=0, \quad (k\,dx)=0. \\ (f\,d^2x) + (n-1)\, f_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0. \\ (\varphi\,d^2x) + (m-1)\, \varphi_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0. \\ (\psi\,d^2x) + (p-1)\, \psi_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man nun Ω mit der Determinante:

(4) $$\Delta = (\varphi_i\, f_i\, \psi_i\, x_i\, dx_i\, k_i) = (dx_i^2),$$

so entsteht:

$$\Omega = -\begin{vmatrix} (\varphi^2) & (\varrho f) & (\varphi\psi) & 0 \\ U_2 & U_1 & U_3 & (x\,d^2x) \\ 0 & yf & y\psi & 0 \\ (\varrho\varphi) & (\varrho f) & (\varrho\psi) & \varrho x \end{vmatrix},$$

wobei für $(f\,d^2x)$, $(\varphi\,d^2x)$, $(\psi\,d^2x)$, bezüglich U_1, U_2, U_3, gesetzt worden ist. Führt man weiter die Gleichung:

(5) $$(yf) - \lambda(y\varphi) = 0$$

ein, so ist

---

entweder Congruenzgerade, d. h. Doppeltangente der Brennfläche, oder sie gehört dem Tangentenbüschel eines Punktes der Curve vierpunktiger Berührung an. Unter den Strahlen des ebenen Büschels in einer beliebigen Ebene, welches dem linearen Complexe angehört, befinden sich also n doppeltzählende und $2n^2(n-1) = N$ einfache Tangenten der Brennfläche. Mithin ist die Classe der ebenen Schnittcurve:

$$2n + 2n^2(n-1) = 2n(n^2 - n + 1)$$

wie oben.

$$(6)\qquad \mu y_i = -(x d^2 x)\begin{vmatrix} (\varphi^2) & (f\varphi) & (\varphi\psi) \\ 0 & \lambda & 1 \\ \varphi_i & f_i & \psi_i \end{vmatrix} - x_i \begin{vmatrix} \varphi^2 & f\varphi & \varphi\psi \\ U_2 & U_1 & U_3 \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

Um endlich λ zu bestimmen, eliminiren wir die y aus den Gleichungen (1) und (5). Wird die dabei auftretende geränderte Determinante der Form (x^2)

$$(: \varphi_i,\ x_i,\ dx_i,\ d^2x_i,\ f_i - \lambda\psi_i) = 0$$

mit dem Quadrate von Δ multiplicirt, so erhält man sofort die von den Differentialen befreite Bedingungsgleichung:

$$(7)\qquad (\varphi^2)\,[(f^2) - 2\lambda(f\psi) + \lambda^2(\psi^2)] - [(f\varphi) - \lambda(\varphi\psi)]^2 = 0.$$

Die Formeln (6) stellen auf die einfachste Weise die Coordinaten der beiden Haupttangenten vor, ausgedrückt durch die Wurzeln $\lambda_1\,\lambda_2$ der Gleichung (7). Für die Linienfläche $f = 0,\ \varphi = 0,\ \psi = \Theta = 0$ wird die Gleichung (7) rational in λ.

Dieser letztere Fall liegt insbesondere vor für die Linienfläche

$$f = 0,\quad \varphi = a_x = 0,\quad \psi = (a^2)(f^2) - (af)^2 = 0.$$

Die Geraden (6) bilden dann die Tangenten von zwei Haupttangentencurven dieser Fläche. Zur Bestimmung derselben hat man aus (7):

$$\lambda_1 = 0,$$
$$\lambda_2 = \frac{2R}{(a^2)(\psi^2) - (a\psi)^2},$$

wo

$$R = (a^2)(f\psi) - (af)(a\psi).$$

Für $\lambda = \lambda_1$ erhält man aus (6):

$$(8)\qquad y_i = -(x d^2 x)\,[(af) f_i - a_i (f^2)] + x_i (a^2) U_1,$$

oder wenn man setzt:

$$\mu = \frac{(af) U_1}{(f^2)(x d^2 x)},\qquad \lambda = -\frac{(af)}{(f^2)},$$
$$y_i \equiv a_i + \mu x_i + \lambda f_i,$$

also die Coordinaten derjenigen Haupttangentencurve, welche zugleich Curve vierpunktiger Berührung der Brennfläche von $f = 0,\ a_x = 0$ ist.

Wir bemerken dabei, dass

$$-\Delta = (x d^2 x) = -(dx^2) = (kx)^2 V,$$

wo

$$V = \begin{vmatrix} (a^2) & (af) & (a\psi) \\ (af) & (f^2) & (f\psi) \\ (a\psi) & (f\psi) & (\psi^2) \end{vmatrix} = -\frac{R^2}{a^2},$$

sowie

$$U_1 = -(n-1) f_{ik}\, dx_i\, dx_k = (kx^2)(n-1)\begin{pmatrix} a_i\,\psi_i\,x_i \\ a_i\,\psi_i\,x_i \end{pmatrix},$$

oder weil

$$\psi_i = (a^2) f_k f_{ik} - (af)(a_k f_{ik})$$

$$U_1 = -(n-1)(kx)^2 R \begin{pmatrix} a_i & x_i \\ a_i & x_i \end{pmatrix}$$

ist. Der Kern der Determinante U_1 ist dabei aus den f_{ik} gebildet. Setzt man

$$(yz) = 0,$$

so erhält man die Zahl der Tangenten der Haupttangentencurve, welche eine willkührliche Gerade z schneiden, d. h. den Rang R derselben, welcher aus den Cayley'schen Formeln zuvor schon bestimmt wurde.

Auch die Zahl der stationären Tangenten lässt sich direct bestimmen. Die letzteren entsprechen solchen Haupttangenten (8), welche zugleich vierpunktige Tangenten der Linienfläche sind. Die Bedingung

$$(yd^3x) = 0$$

liefert aber den Complex:

$$K = U_1(xd^3x) - (xd^2x)(fd^3x) = 0.$$

Er enthält, wenn man den Factor R quadratisch aussondert, die Variabelen x im Grade $5(2n-3)$, woraus sich die Zahl der stationären Tangenten gleich der der Lösungen des Systems

$$f = 0, \quad a_x = 0, \quad \psi = 0, \quad K = 0, \quad (x^2) = 0$$

ergiebt, welche in der That $20n(n-1)(2n-3)$ ist.

Für $\lambda = \lambda_2$ erhält man dagegen die andere Haupttangentencurve in der folgenden Form:

$$y_i = -(xd^2x)\{a_i(af) - f_i(a^2) + \lambda_2[\psi_i(a^2) - a_i(a\psi)]\} - x_i(U_1 - \lambda_2 U_3)(a^2).$$

Sondert man aus der rechten Seite noch den Factor R aus, so stellt die Gleichung $(yz) = 0$ einen Complex vom Grade $8n-11$ vor. Der Rang dieser zweiten Haupttangentencurve ist daher

$$4n(n-1)(8n-11).$$

Dieselbe Zahl hätte man übrigens auch auf folgendem Wege erhalten, wie zur Controle bemerkt werden mag. Die vollständige algebraische Haupttangentencurve der Linienfläche ist von der Ordnung und Classe $12n(n-1)^2$. Sondert man also den auf der Brennfläche liegenden Theil von der Ordnung und Classe $2n^2(n-1)$ aus, so bleibt eine Raumcurve von der Ordnung und Classe $2n(n-1)(5n-6)$ übrig, deren Geschlecht $2n(n-1)(3n-5)+1$ ist. Die Charakteristiken der zweiten Haupttangentencurve sind daher:

$$M = N = 2n(n-1)(5n-6),$$
$$R = 4n(n-1)(8n-11),$$
$$P = 2n(n-1)(3n-5)+1,$$
$$\nu = 28n(n-1)(2n-3).$$

Die stationären Tangenten sind übrigens hier durch den Complex:

$$K' = (xd^2x)\,[\lambda_2(\psi d^3x) - (fd^3x)] - (xd^3x)\,(U_1 - \lambda_2 U_3) = 0$$

bestimmt, welcher nach Entfernung des Factors R^2 in der That vom Grade

$$7\,(2n-3)$$

ist, also die Zahl ν liefert. Es hat keine Schwierigkeit, die Gleichungen der Complexe K, K' von den zweiten und dritten Differentialen vollständig zu befreien.

Die Gleichung

$$R = 0$$

bestimmt die Cuspidalpunkte der Linienfläche. In ihnen berühren sich die beiden Haupttangentencurven, wie sich unmittelbar aus $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ergiebt.

Die Brennfläche eines linearen Complexes enthält dreifache Tangenten, welche zugleich der Congruenz angehören. In diesem Falle sind zwei der Berührungspunkte die zugehörigen Brennpunkte, während der dritte auf der Curve vierpunktiger Berührung liegt. Die dreifachen Tangenten dieser Art bilden eine Linienfläche, welche diese letztere Curve zur $n-2$-fachen hat. Um die Ordnung dieser Fläche zu bestimmen, suchen wir die Zahl ihrer Erzeugenden, welche eine Gerade ε schneiden. Die Coordinaten sämmtlicher Erzeugenden lassen sich in der Form

$$y_i = \mu x_i + a_i + \lambda f_i$$

geben, wo μ so zu bestimmen ist, dass die Gleichung:

$$f(\mu x_i + a_i + \lambda f_i) = 0$$

erfüllt ist. Sie ist vom $n-2^{\text{ten}}$ Grade in μ. Setzt man ferner:

$$\mu(x\varepsilon) + (\varepsilon a) + \lambda(f\varepsilon) = 0$$

und eliminirt die Grösse λ aus der Gleichung

$$a^2 + \lambda(af) = 0\,,$$

so entsteht die Gleichung eines Complexes $n^2 - 2$ Grades, welcher mit $f = 0$, $a_x = 0$, $\psi = 0$ verbunden,

$$4\,n(n-1)\,(n^2-2)$$

als Ordnung der Linienfläche der dreifachen Tangenten liefert. Für den Complex zweiten Grades degenerirt dieselbe übrigens in 16 ebene Büschel, deren Centra auf der Curve vierpunktiger Berührung liegen und die den Doppelpunkten und Doppelebenen der Kummer'schen Fläche entsprechen.

Im allgemeinen Falle zweier Complexe n^{ten} und m^{ten} Grades ist die Curve vierpunktiger Berührung keine Haupttangentencurve der Brennfläche. *Wir werden jetzt zeigen, dass längs derselben die Linienfläche*

$$f = 0\,,\quad \varphi = 0\,,\quad \Theta = (f^2)\,(\varphi^2) - (f\varphi)^2$$

und die Brennfläche sich osculiren, d. h. sich mit gemeinsamen Haupttangenten berühren.

Die eine Haupttangente der Brennfläche ist die Gerade x selbst, sie coincidirt also mit der Erzeugenden der Linienfläche. Die andere ist gegeben durch die Coordinaten

$$y_i = -\mu x_i + f_i + \lambda \varphi_i ,$$

wo μ aus der Gleichung

$$\mu B + C = 0$$

zu entnehmen ist. Es ist zu zeigen, dass dieselbe übereinstimmt mit der Haupttangente der Linienfläche in dem nämlichen Punkte. Dabei ist

$$R = B(\varphi^2) ,$$

wenn zur Abkürzung $R = (f\Theta)(\varphi^2) - (\varphi\Theta)(f\varphi)$ gesetzt wird

$$C = \frac{1}{m-1}\lambda^2 \begin{pmatrix} f_i & x_i \\ f_i & x_i \end{pmatrix} ,$$

der Kern der letzteren Determinante wird von den

$$\psi_{ik} = (n-1) f_{ik} + (m-1)\lambda \varphi_{ik}$$

gebildet.

Nun ist die Haupttangente der Linienfläche bestimmt durch die Coordinaten

$$y_i = \varrho x_i + f_i + \lambda \varphi_i ,$$

wo der Werth von ϱ aus der Gleichung:

$$(y d^2 x) = \varrho (x d^2 x) + (f_i + \lambda \varphi_i) d^2 x_i = 0 ,$$

oder

$$\varrho (dx)^2 + \psi_{ik} dx_i dx_k = 0$$

zu bestimmen ist.

Unter Voraussetzung der Gleichungen

$$(f dx) = 0 , \quad (\varphi dx) = 0 , \quad (\Theta dx) = 0 , \quad (x dx) = 0 , \quad (k dx) = 0$$

hat man aber:

$$(dx)^2 = -(kx)^2 V$$

$$V = -\frac{1}{(\varphi^2)}[(f\Theta)(\varphi^2) - (\varphi\Theta)(f\varphi)]^2 = -\frac{1}{(\varphi^2)} R^2 .$$

Es ist ferner

$$\psi_{ik} dx_i dx_k = -\begin{pmatrix} f_i & \varphi_i & \Theta_i & x_i & k_i \\ f_i & \varphi_i & \Theta_i & x_i & k_i \end{pmatrix} ,$$

also wenn in

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x_k} = \Theta_k = n-1(\varphi^2)(f_i f_{ik}) + m-1(f^2)(\varphi_i \varphi_{ik}) - (f\varphi)[m-1(f_i \varphi_{ik}) + n-1(\varphi_i f_{ik})]$$

vermöge der Gleichungen

$$\lambda = \frac{-(f\varphi)}{(\varphi^2)} = \frac{-(f^2)}{(f\varphi)}$$

λ eingeführt wird

$$\Theta_k = \psi_{ik}[f_i(\varphi^2) - \varphi_i(f\varphi)],$$

demnach

$$\psi_{ik} dx_i dx_k = \frac{-(kx)^2}{(m-1)^2\lambda^2} R \begin{pmatrix} f_i\, x_i \\ f_i\, x_i \end{pmatrix} = -(kx)^2 RC.$$

Die Gleichung für ϱ reducirt sich also auf:

$$-\varrho B + C = 0,$$

womit der Satz erwiesen ist.

Die *Durchschnittspunkte der Curve vierpunktiger Berührung und die Berührungscurve der Brennfläche mit der singulären Fläche von* $f = 0$ sind gegeben durch die Gleichungen

$$f = 0, \quad F = 0, \quad \varphi = 0, \quad (f\varphi) = 0, \quad (x^2) = 0.$$

Diese $4n(n-1)m(n+m-2)$ Punkte sind aber *Berührungspunkte der beiden Curven.* Man überzeugt sich davon durch den Nachweis, dass die Linienfläche $f = 0$, $\varphi = 0$, $\Theta = 0$ der vierpunktigen Berührung und die Linienfläche der Berührungscurve $f = 0$, $F = 0$, $\varphi = 0$ unter Voraussetzung der genannten Gleichungen jedesmal zwei consecutive Erzeugende gemein haben. In der That ist die consecutive Erzeugende der ersten Fläche bestimmt durch:

$$\delta f = 0, \quad \delta\varphi = 0, \quad \varphi^2 \delta F = 0 = \delta\Theta,$$

die der zweiten durch die nämlichen Gleichungen.

Es hat keine Schwierigkeit, die Zahl der Punkte zu bestimmen, in denen diese Curven den weiteren singulären Curven auf der Brenn- oder singulären Fläche begegnen.

Wir schliessen hieran endlich den Beweis des Satzes:

Die singuläre und accessorische Fläche eines Complexes osculiren sich längs der ihnen gemeinsamen Berührungscurve:

$$f = 0, \quad F = 0, \quad (f_i F_i) = 0.$$

Die Haupttangenten der singulären Fläche in den Punkten derselben sind gegeben durch die Gleichung:

$$(fF)\mu^2 + \mu(n-1)(F_k^2) + (n-1)^2 f_{ik} F_i F_k = 0,$$

die eine ist die Gerade x_i, die andere bestimmt durch die Gleichung

$$(n-1)(f_{ik} F_i F_k) + \mu(F_k^2) = 0.$$

Für die accessorische Fläche denken wir aus

$$\Psi = 2(f_i F_i) + \lambda(F_k^2) = 0$$

den Werth von λ in die Gleichung $\mu^2 A + \mu B + C = 0$ eingetragen. Dabei sondert sich der Factor $(f_i F_i)$ aus. Wird dann $(f_i F_i) = 0$ gesetzt, so ist $A = 0$, $\Delta_5 = 0$, so dass:

$$B = -(n-1)(F_i^2) - 2(m-1)F_{ik}f_if_k,$$
$$C = -(n-1)^2F_iF_kf_{ik} - 2(n-1)\cdot(m-1)\frac{(f_{ik}F_iF_k)(F_{ik}f_if_k)}{(F_i^2)}.$$

Darnach ist die eine Haupttangente derselben wieder x, während die andere durch die mit der für die singuläre Fläche gegebenen wesentlich identische Gleichung

$$\mu B + C = [\mu(F_i^2)+n-1f_{ik}F_iF_k][n-1(F_i^2)+2(m-1)F_{ik}f_if_k] = 0$$

bestimmt ist.

X.

Fortsetzung. Der Rang von Curven auf den Brennflächen.

Wir stellen uns im Folgenden die Aufgabe, die Richtung der Curve zu bestimmen, in welcher die Linienfläche

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0$$

die Brennfläche von $f = 0$, $\varphi = 0$ berührt.

Es seien A, A' zwei consecutive Punkte der Curve, denen die Tangentialebenen E, E' entsprechen. Die sämmtlichen Tangenten von A sind gegeben durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad y_i = \mu x_i + f_i + \lambda\varphi_i,$$

die ihnen unendlich nahen Tangenten in A' haben daher die Coordinaten:

$$(2) \quad y_i + dy_i = \mu dx_i + x_i d\mu + \delta f_i + \lambda\delta\varphi_i + \varphi_i d\lambda + \mu x_i + f_i + \lambda\varphi_i.$$

Sollen die unendlich nahen Tangenten (1) und (2) sich schneiden, so muss der Ausdruck:

$$(3) \quad (dy^2) = \mu^2(dx^2) + 2\mu[dx_i\delta f_i + \lambda dx_i\delta\varphi_i] + 2[(\delta f_i\delta\varphi_i)\lambda + d\lambda(\varphi_i\delta f_i)] + \delta(f_i^2) + \lambda^2\delta(\varphi_i^2) + 2\lambda d\lambda(\varphi_i\delta\varphi_i) + (\varphi^2)d\lambda^2$$

verschwinden.

Der eine Wurzelwerth der in μ quadratischen Gleichung (3) entspricht der Tangente der Brennfläche, welche die unendlich nahen Punkte A und A' verbindet, d. h. dem Elemente der Berührungscurve, der andere dem Schnitt der Ebenen E, E_1, d. h. der Generatrix der längs der Berührungscurve umschriebenen developpabelen Fläche.

Aus der Gleichung (3) sind mit Hülfe der Gleichungen:

$$(xdx) = 0, \quad (kdx) = 0, \quad (\varphi dx) = 0, \quad (fdx) = 0, \quad (\psi dx) = 0$$

die dx_i zu eliminiren, während $d\lambda$ aus der Gleichung:

$$(f\delta f) + \delta(f\varphi)\lambda + (f\varphi)d\lambda + \lambda^2(\varphi\delta\varphi) + \lambda d\lambda(\varphi^2) = 0$$

zu entnehmen ist. Eliminirt man endlich mit Hülfe der Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{cases} \mu a_x + (af) + \lambda(a\varphi) = 0 \\ (f^2) + 2\lambda(f\varphi) + \lambda^2(\varphi^2) = 0 \end{cases}$$

λ, μ aus der Gleichung (3), so erhält man die Gleichung eines Complexes, welcher mit

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad (x^2) = 0$$

verbunden, durch die Zahl der Lösungen dieser fünf Gleichungen die Summe des Ranges der Berührungscurve und der Ordnung der von den Tangentialebenen der Brennfläche längs derselben gebildeten Developpabelen, d. h. den doppelten Rang der Berührungscurve angiebt.

Um die Gleichung (3) von den Differentialen zu befreien, bedienen wir uns der folgenden Transformationen. Wir bezeichnen die Gleichung (3) durch:

(5) $$A'\mu^2 + 2\mu B' + C' = 0.$$

Man hat dann zunächst:

$$B'^2 = (\delta f_i + \lambda \delta \varphi_i \; f_i \; \varphi_i \; \psi_i \; x_i \; k_i)^2 \; *)$$

$$= -(kx)^2 \begin{vmatrix} (\delta f^2)+2\lambda(\delta f \delta\varphi)+\lambda^2(\delta\varphi^2) & (f\delta f)+\lambda(f\delta\varphi) & (\varphi\delta f)+\lambda(\varphi\delta\varphi) & (\psi\delta f)+\lambda(\psi\delta\varphi) \\ (f\delta f)+\lambda(f\delta\varphi) & (f^2) & (f\varphi) & (f\psi) \\ (\varphi\delta f)+\lambda(\varphi\delta\varphi) & (f\varphi) & (\varphi^2) & (\varphi\psi) \\ (\psi\delta f)+\lambda(\psi\varrho\varphi) & (f\psi) & (\varphi\psi) & (\psi^2) \end{vmatrix}$$

in der Determinante linker Hand ist nur eine Verticalreihe hingeschrieben. Multiplicirt man die dritte Horizontalreihe der Determinante rechts mit λ und addirt sie zur zweiten etc. und beachtet man dabei die zweite Gleichung (4), so gelingt es leicht die folgende Gleichung:

(5) $$B_1^2 = C'(dx^2) - (kx)^2\left[R((f\psi)+\lambda(\varphi\psi)) - S((f\varphi)+\lambda(\varphi^2))\right]^2$$

zu erhalten, wo:

$$R = (\varphi\delta f) + \lambda(\varphi\delta\varphi) + d\lambda(\varphi^2),$$
$$S = (\psi\delta f) + \lambda(\psi\delta\varphi) + d\lambda(\varphi\psi).$$

Die Discriminante der Gleichung (3) hat daher den Werth:

(6) $$B'^2 - A'C' = (kx)^2\Delta^2,$$

(7) $$\Delta = R[(f\psi)+\lambda(\varphi\psi)] - S[(f\varphi)+\lambda(\varphi^2)].$$

Verschwindet die Discriminante, so hat die Gleichung (3) zwei gleiche Wurzeln, d. h. *die Brennfläche und die berührende Linienfläche haben zur gemeinsamen Haupttangente die Tangente der Berührungscurve.*

---

*) Der Kürze halber sind im Folgenden die Incremente der ersten Differentialquotienten durch δ bezeichnet. Es ist also

$$\delta f_i = (n-1)\Sigma f_{ik}dx_k,$$
$$(\varphi\delta f) = \Sigma\varphi_i\delta f_i = (n-1)\Sigma\varphi_i f_{ik}dx_k,$$
$$(\delta f^2) = (n-1)^2\Sigma(\Sigma f_{ik}dx_k)^2,$$
$$(dx\,\delta f) = \Sigma dx_i\delta f_i = (n-1)\Sigma dx_i dx_k f_{ik}, \text{ etc.}$$

Wenn daher Δ für alle Punkte der Berührungscurve verschwindet, so ist dieselbe eine gemeinsame Haupttangentencurve der beiden Flächen. *Man kann* $\Delta \equiv 0$ *als Differentialgleichung von Haupttangentencurven auf der Brennfläche bezeichnen, welche vollständiger Berührungsschnitt einer durch* $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *bestimmten Linienfläche sind.*

Um den Ausdruck Δ von den Differentialen, welche er noch enthält, zu befreien, schreiben wir

$$[(f\varphi) + \lambda(\varphi^2)]\Delta = \begin{vmatrix} (f^2) & (f\delta f) + \lambda(f\delta\varphi) & (f\varphi) \\ (f\varphi) & (\varphi\delta f) + \lambda(\varphi\delta\varphi) & (\varphi^2) \\ (f\psi) & (\psi\delta f) + \lambda(\psi\delta\varphi) & (\varphi\psi) \end{vmatrix}$$

$$= (f\varphi)[(\varphi f)(\psi\delta f) - (\varphi\delta f)(\psi f)] - (\varphi^2)[(f^2)(\psi\delta f) - (\psi f)(f\delta f)] + (\varphi\psi)[(f^2)(\varphi\delta f) - (\varphi f)(f\delta f)]$$

$$+ \lambda\{(f^2)[(\varphi\delta\varphi)(\varphi\psi) - (\varphi^2)(\psi\delta\varphi)] - (\varphi f)[(f\delta\varphi)(\varphi\psi) - (\psi\delta\varphi)(f\psi)] + (\psi f)[(f\delta\varphi)(\varphi^2) - (\varphi\delta\varphi)(f\varphi)]\}.$$

Vermöge der Formel

$$(a_i b_i f_i \varphi_i \psi_i x_i) = + (kx)[(a\,dx)b_x - (b\,dx)a_x]$$

hat man also

$$(8)\quad [(f\varphi)+\lambda(\varphi^2)]\Delta = (n-1)\begin{vmatrix} (f_i f_{ik}) & (f\varphi) \\ (\varphi_i f_{ik}) & (\varphi^2) \\ (\psi_i f_{ik}) & (\varphi\psi) \\ f_k & 0 \\ \varphi_k & 0 \\ \psi_k & 0 \end{vmatrix} + (m-1)\cdot\lambda \begin{vmatrix} (f_i\varphi_{ik}) & (f^2) \\ (\varphi_i\varphi_{ik}) & (f\varphi) \\ (\psi_i\varphi_{ik}) & (f\psi) \\ f_k & 0 \\ \varphi_k & 0 \\ \psi_k & 0 \end{vmatrix},$$

ausserdem ist

$$[(f\varphi)+\lambda(\varphi^2)]^2 = -[(f^2)(\varphi^2)-(f\varphi)^2] = -\Theta.$$

Die Transformation, welche zur Gleichung (8) führte, ist daher ungültig für $\Theta = 0$, da dann auch $(f\varphi) + \lambda(\varphi^2) = (f^2) + \lambda(f\varphi) = 0$. Man hat in diesem Falle

$$\Delta = R[(f\psi)+\lambda(\varphi\psi)],$$

ferner

$$(f\delta\varphi) + (\varphi\delta f) + 2\lambda(\varphi\delta\varphi) + (\varphi^2)d\lambda = 0,$$

also

$$R = -[(f\delta\varphi)+\lambda(\varphi\delta\varphi)] = -\frac{m-1}{(\varphi^2)}\begin{vmatrix} (f_i\varphi_{ik}) \\ (\varphi_i\varphi_{ik}) \\ f_k \\ \varphi_k \\ \psi_k \\ x_k \end{vmatrix},$$

insbesondere also für

$$(9)\quad \begin{cases} \psi = \Theta \\ \psi_k = n-1(\varphi^2)(f_i f_{ik}) + m-1(f^2)(\varphi_i \varphi_{ik}) - (f\varphi)[n-1(\varphi_i f_{ik}) + m-1(f_i \varphi_{ik})] \\ R \equiv \begin{vmatrix} (f_i \varphi_{ik}) & 0 \\ (\varphi_i \varphi_{ik}) & 0 \\ f_k & 0 \\ \varphi_k & 0 \\ (f_i f_{ik}) & 1 \\ (\varphi_i f_{ik}) & \lambda \\ x_k & 0 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Das Element der Curve vierpunktiger Berührung ist daher Element einer Haupttangentencurve der Brennfläche in den Punkten $(f\psi) + \lambda(\varphi\psi) = 0$, d. h. den Cuspidalpunkten der Linienfläche $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, sowie in den Punkten $R = 0$. Aus dem Umstande, dass R immer verschwindet, sobald einer der Complexe f oder φ linear ist, entnehmen wir zugleich einen analytischen Beweis des Satzes, dass für Brennflächen eines linearen Complexes die Curve vierpunktiger Berührung eine Haupttangentencurve ist.

Wir werden jetzt eine andere Determinantenrelation angeben, welche die quadratische Gleichung (3) mit der Gleichung

$$A\mu^2 + B\mu + C = 0$$

in Verbindung setzt, welche die Haupttangenten der Brennfläche bestimmt.

Multiplicirt man die Determinante:

$$\begin{vmatrix} n-1 f_{ik} + m-1 \lambda \varphi_{ik} + \varrho & \varphi_i & x_i \\ \varphi_i & 0 & 0 \\ x_i & 0 & 0 \end{vmatrix} = (n-1)^2 (A\varrho^2 - B\varrho + C)$$

mit dem Quadrat der Determinante:

$$(f\ \varphi\ \psi\ x\ k\ dx) = -(dx^2),$$

so entsteht:

$$(10)\qquad -(n-1)^2 (kx)^2 \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & (f^2) & t_1 & (f\varphi) \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & (f\varphi) & t_2 & (\varphi^2) \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & (f\psi) & t_3 & (\varphi\psi) \\ (f^2) & (f\varphi) & (f\psi) & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & 0 & N & 0 \\ (f\varphi) & (\varphi^2) & (\varphi\psi) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

wo

$$\begin{aligned} t_1 &= (f\delta f) + \lambda(f\delta\varphi) \\ t_2 &= (\varphi\delta f) + \lambda(\varphi\delta\varphi) \\ t_3 &= (\psi\delta f) + \lambda(\psi\delta\varphi) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= a_{11} + \varrho(f^2) &&= n-1(f_i f_k f_{ik}) + \lambda m - 1(f_i f_k \varphi_{ik}) + \varrho(f^2),\\
A_{12} = A_{21} &= a_{12} + \varrho(f\varphi) &&= n-1(f_i \varphi_k f_{ik}) + \lambda m - 1(\varphi_i f_k \varphi_{ik}) + \varrho(f\varphi),\\
A_{13} = A_{31} &= a_{13} + \varrho(f\psi) &&= n-1(\varphi_i f_k f_{ik}) + \lambda m - 1(f_i \psi_k \varphi_{ik}) + \varrho(f\psi),\\
A_{22} &= a_{22} + \varrho(\varphi^2) &&= n-1(\varphi_i \varphi_k f_{ik}) + \lambda m - 1(\varphi_i \varphi_k \varphi_{ik}) + \varrho(\varphi^2),\\
A_{23} = A_{32} &= a_{32} + \varrho(\varphi\psi) &&= n-1(\varphi_i \psi_k f_{ik}) + \lambda m - 1(\varphi_i \psi_k \varphi_{ik}) + \varrho(\varphi\psi),\\
A_{33} &= a_{33} + \varrho(\psi^2) &&= n-1(\psi_i \psi_k f_{ik}) + \lambda m - 1(\psi_i \psi_k \varphi_{ik}) + \varrho(\psi^2),
\end{aligned}
$$

$$N = (df_i dx_i) + \lambda(d\varphi_i dx_i) + \varrho(dx^2).$$

Man hat daher

$$(11) \qquad A\varrho^2 - B\varrho + C = -\{N\Sigma - \Delta^2\Theta\}(kx)^2,$$

wo

$$\Theta = (f^2)(\varphi^2) - (f\varphi)^2$$

$$(kx)^2\,\Sigma = (kx)^2 \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & (f^2) & (f\varphi) & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & (f\varphi) & (\varphi^2) & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & (f\psi) & (\varphi\psi) & 0 \\ f^2 & f\varphi & f\psi & 0 & 0 & 0 \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & 0 & 0 & 0 \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (kx)^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & (f^2) & f\varphi \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & f\varphi & \varphi^2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & f\psi & \varphi\psi \\ f^2 & f\varphi & f\psi & 0 & 0 \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & 0 & 0 \end{vmatrix} - \varrho(dx^2)\Theta$$

$$= (kx)^2 T - \varrho(dx^2)\Theta.$$

Aus der identischen Gleichung (11) oder

$$(12) \quad (A\varrho^2 - B\varrho + C)(dx^2)(dx^2) = -\{N((kx)^2 T - \varrho(dx^2)\Theta) - \Delta^2\Theta\}(kx)^2$$

ergiebt sich daher:

$$B(dx^2) = (kx)^2 T - A[(dx\,\delta f) + \lambda(dx\,\delta\varphi)],$$

$$C(dx^2)(dx^2) = -(kx)^2 T[(dx\,\delta f) + \lambda(dx\,\delta\varphi)] + (kx)^2\Delta^2 A,$$

oder

$$(13) \quad B(dx^2)[(\delta f\,dx) + \lambda(dx\,\delta\varphi)] + C(dx^2)(dx^2) = (kx)^2\Delta^2 A - A((dx\,\delta f) + \lambda(dx\,\delta\varphi))^2.$$

Es ist nun die Haupttangente der windschiefen Fläche bestimmt durch den Parameter ν in

$$y_i = \nu x_i + f_i + \lambda\varphi_i,$$

wo

$$\nu = -\frac{(dx_i df_i) + \lambda(dx_i d\varphi_i)}{(dx^2)}.$$

Nennt man die beiden Wurzeln der Gleichung $\mu^2 A + \mu B + C = 0$ μ_1 und μ_2, so giebt die Gleichung (13):

$$\frac{(kx)^2\Delta^2}{(dx^2)(dx^2)} = \nu^2 - \frac{B}{A}\nu + \frac{C}{A},$$

mithin hat man als Wurzeln der Gleichung (3):

$$\mu = \nu \pm \sqrt{(\nu-\mu_1)(\nu-\mu_2)}. \tag{14}$$

Der letztere Ausdruck hätte sich ohne Weiteres aus einem bekannten geometrischen Theoreme herleiten lassen. Wenn sich nämlich zwei Flächen längs einer Curve berühren, so bilden die Tangente der Berührungscurve und der Schnitt der consecutiven Tangentialebenen die beiden Richtungen, welche zu den Haupttangenten der beiden Flächen gleichzeitig harmonisch liegen. Die Haupttangenten der windschiefen Fläche sind aber:

$$x_i, \quad \nu x_i + f_i + \lambda\varphi_i$$

die der Brennfläche

$$\mu_1 x_i + f_i + \lambda\varphi_i, \qquad \mu_2 x_i + f_i + \lambda\varphi_i,$$

woraus man für den Parameter μ der beiden Strahlen, welche gleichzeitig zu diesen Richtungen harmonisch liegen, die quadratische Gleichung:

$$\mu^2 - 2\mu\nu = \mu_1\mu_2 - (\mu_1+\mu_2)\nu$$

findet, deren Wurzeln mit (14) übereinstimmen.

Wir haben die liniengeometrische Betrachtung vorgezogen, weil durch sie die Tangente der Berührungscurve unzweideutig festgestellt wird auch in den Fällen, wo die Gleichung (14) ihre Bedeutung verliert.

Es findet dies insbesondere statt, wenn $A = \Theta = 0$. Alsdann zeigt die Gleichung (12), dass:

$$(-B\varrho + C)(dx^2)(dx^2) = -NT(kx)^2,$$

während die Tangente der Berührungscurve, resp. die ihr dualistisch entsprechende Generatrix bestimmt ist durch

$$\mu = \varrho \pm \frac{\Delta(kx)}{(dx^2)}.$$

Wir ziehen daraus den Schluss:

Jede umschriebene Linienfläche $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ osculirt die Brennfläche $f = 0$, $\varphi = 0$ in denjenigen Punkten, in denen ihre gemeinsame Berührungscurve der Curve vierpunktiger Berührung begegnet.

Ist dagegen $\Delta = 0$, so hat die Gleichung (3) zwei gleiche Wurzeln und die Gleichung (12)

$$(A\varrho^2 - B\varrho + C)(dx^2)(dx^2) = -N\big((kx)^2 T - \varrho(dx^2)\Theta\big)$$

zeigt dann, dass die Haupttangente der Linienfläche mit einer der Haupttangenten der Brennfläche coincidirt, d. h. dass das Element der

Berührungscurve einer Haupttangentencurve der Flächen angehört, wie schon oben bemerkt wurde.

Soll nun der Rang der Berührungscurve bestimmt werden, so ist zu setzen:

$$\mu(xz) + (fz) + \lambda(\varphi^2) = 0,$$
$$(f^2) + 2(f\varphi)\lambda + \lambda^2(\varphi^2) = 0,$$
$$\mu(dx^2) = -[(dx\,\delta f) + \lambda(dx\,\delta\varphi)] \pm (kx)\Delta,$$

Die Elimination von μ und λ aus diesen Gleichungen liefert einen Complex vom Grade

$$4(3n+3m+p-7),$$

welcher mit den Gleichungen

$$f=0, \quad \varphi=0, \quad \psi=0, \quad (x^2)=0$$

$8mnp(3n+3m+p-7)$ Lösungen liefert.

Der Rang der Berührungscurve ist daher

$$4mnp(3n+3m+p-7).$$

Spitzen werden im allgemeinen bei der Berührungscurve nicht auftreten. Ebenso ist die Zahl der stationären Tangenten gleich Null zu setzen. Denn die Tangente der Berührungscurve ist nur dann Haupttangente der Linienfläche, wenn die Gleichungen

$$f=0, \quad \varphi=0, \quad \psi=0, \quad \Delta=0$$

bestehen, woraus ersichtlich ist, dass einer weiteren Bedingung, durch welche eine gemeinsame Haupttangente der Brennfläche und der Linienfläche zur stationären Tangente ihrer Berührungscurve wird, im allgemeinen nicht genügt werden kann*). Aus den Zahlen:

$$N = 2mnp(m+n+p-1)$$
$$R = 4mnp(3m+3n+p-7)$$
$$\beta = 0$$
$$\nu = 0$$

lassen sich daher die Charakteristiken der Berührungscurve berechnen.

Insbesondere erhält man als Rang der Curve vierpunktiger Berührung:

$$4mn(4m+4n-9)(m+n-2).$$

Aus den Zahlen, welche oben für Geschlecht und Ordnung dieser Curve gegeben sind, ergiebt sich weiter $\beta = 0$. Stationäre Tangenten sind auch hier nicht vorhanden.

Wir bemerken endlich noch, dass in den Cuspidalpunkten der Linienfläche vierpunktiger Berührung, welche durch die Gleichung:

*) Verschwindet dagegen Δ, so ist die Berührungscurve Haupttangentencurve, daher von gleicher Ordnung und Klasse und enthält eine in jedem Falle leicht zu bestimmende Anzahl von Spitzen und stationären Tangenten.

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = \Theta = 0, \quad (f\psi) + \lambda(\varphi\psi) = 0$$

gegeben sind, die Curve der vierpunktigen Berührung die singuläre Erzeugende der genannten Linienfläche berührt.

XI.

Fortsetzung. Der Rang von Curven auf der singulären Fläche eines Complexes.

Die Formeln des vorigen § vereinfachen sich bedeutend für die Berührungscurve der Linienfläche

$$f = 0, \quad F = 0, \quad \psi = 0$$

mit der singulären Fläche des Complexes $f = 0$.

An Stelle der Gleichung (1) tritt dann

$$y_i = \mu x_i + f_i, \tag{1}$$

mithin an Stelle von (3)

$$\mu^2(dx^2) + 2\mu(dx_i df_i) + (df_i^2) = 0. \tag{2}$$

Wird diese Gleichung wieder durch

$$A'\mu^2 + 2B'\mu + C' = 0$$

bezeichnet, so ergiebt sich wie vorhin

$$B'^2 = (dx^2)C' - (kx)^2\Delta^2$$

wo

$$\Delta = (F_i df_i)(\psi f) - (f_i F_i)(\psi_i df_i),$$

oder

$$\Delta \equiv (F_i f_{ik},\ \psi_i f_{ik},\ f_k, F_k, \psi_k, x_k)(kx). \tag{3}$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung (2) sind hiernach immer *rational* ausgedrückt durch:

$$\mu = -\frac{B'}{A'} \pm \frac{\Delta(kx)}{A'}.$$

$\Delta \equiv 0$ *ist die Differentialgleichung der Haupttangentencurven auf der singulären Fläche.*

Man erhält hiernach als Charakteristiken der Berührungscurve der Linienfläche mit der singulären Fläche:

$$R = 4n(n-1)p(4n+p-6)\ ^*),$$
$$P = 2n(n-1)p(3n+p-6)+1,$$
$$N = 2n^2(n-1)p,$$

*) Für $n = 2$ sind dies dieselben Werthe, welche den Charakteristiken der Berührungscurve, die gegen Ende des vorigen § gegeben wurden, für $n = 2$, $m = 1$ zukommen. Es entspricht dies dem Umstande, dass die Brennfläche [2 1] zugleich singuläre Fläche eines Complexes zweiten Grades ist.

$$\beta = 0,$$
$$\nu = 0,$$
$$\alpha = 8n(n-1)p(10n+3p-18),$$
$$M = 6n(n-1)p(7n+2p-12).$$

Diese Zahlen sind zugleich die Charakteristiken der Berührungscurve der Brennfläche von $f = 0$, $\psi = 0$ mit der singulären Fläche von f.

Für den Fall der Kummer'schen Fläche, die als Brennfläche zweier Complexe vom ersten und zweiten Grade gedacht wird, erhält man daher als Charakteristiken ihrer Berührungscurve mit der singulären Fläche des Complexes zweiten Grades ($n = 2$, $p = 1$).

$$N = 8, \quad \beta = 0, \quad \nu = 0, \quad P = 5, \quad R = 24, \quad M = 48, \quad \alpha = 80,$$

ein Resultat, welches auch noch für den Fall seine Gültigkeit behält, wo der Complex ψ ein specieller linearer ist.

Für die Berührungscurve der Brennfläche [2 2] ($n = 2$, $p = 2$) mit der singulären Fläche eines der erzeugenden Complexe hat man:

$$N = 16, \quad M = 144, \quad R = 64, \quad \beta = 0, \quad \nu = 0, \quad \alpha = 256.$$

Dies sind die Charaktere der Schnittcurve von zwei Flächen vierten Grades, welche sich in einer Curve mit 16 wirklichen Doppelpunkten schneiden. In der That lässt sich leicht zeigen, dass die Berührungscurve 16 wirkliche Doppelpunkte besitzt, die den 16 Knotenpunkten der singulären Fläche entsprechen*).

Wir betrachten endlich die *Berührungscurve der singulären und accessorischen Fläche eines Complexes.*

Wird demgemäss $\psi = (fF) = 0$ gesetzt, so ist:

$$\Delta = (f\psi)(F_i df_i).$$

Nun ist

$$\psi_k = 2n-1(f_{ik}F_k) + n-2(f_if_{ik}f_{ikl}),$$

mithin

$$\Delta \equiv [(F_if_{ik}), (\psi_if_{ik}), f_k, F_k, (f_if_{ik}f_{ikl}), x_k].$$

Diese Curve ist daher auch hier im Allgemeinen keine Haupttangentencurve der singulären Fläche. Ihre Charakteristiken sind:

$$N = 2n^2(n-1)(3n-4),$$
$$\beta = 0, \quad \nu = 0,$$
$$P = 2n(n-1)(3n-4)(6n-10)+1,$$
$$R = 4n(n-1)(3n-4)(7n-10),$$
$$M = 6n(n-1)(3n-4)(13n-20),$$
$$\alpha = 8n(n-1)(3n-4)(19n-30).$$

*) Vgl. § XVI.

Für den Fall $n = 2$ verschwinden die dritten Differentialquotienten von f auch in Δ identisch. Es ergiebt sich daraus:

Die singuläre und accessorische Fläche eines Complexes zweiten Grades berühren sich in einer gemeinsamen Haupttangentencurve.

Es ist keine Schwierigkeit, diese Curve genauer zu untersuchen, insbesondere die Gleichungen anzugeben, von denen die Bestimmung ihrer stationären Tangenten abhängt. Man findet dann:

$$N = M = 16, \quad P = 17, \quad R = 48, \quad \nu = 96, \quad \beta = 16, \quad \alpha = 16.$$

Es mag noch darauf hingewiesen werden, dass die Gleichungen X. (8), XI. (3) in manchen Fällen unmittelbar zur Bestimmung von Haupttangenten führen.

So z. B. hat man für die drei gegenseitig in Involution liegenden Complexe zweiten Grades:

$$(4)\quad \begin{cases} f = \dfrac{x_i^2}{k_i - \varrho_1} = 0, \quad \varphi = \dfrac{x_i^2}{k_i - \varrho_2} = 0, \quad \psi = \dfrac{x_i^2}{k_i - \varrho_3} = 0, \\ (f\varphi) = 0, \quad (f\psi) = 0, \quad (\varphi\psi) = 0, \\ \psi_i f_{ik} = \psi_i - f_i, \\ \psi_i \varphi_{ik} = \psi_i - \varphi_i, \end{cases}$$

also $\Delta = 0$ und damit den Satz:

Die Linienfläche der drei Complexe (4) *berührt die Brennfläche je zweier derselben nach einer Haupttangentencurve.*

Ebenso verschwindet die Discriminante Δ für

$$(5)\qquad f = \frac{x_i^2}{k_i - \varrho_1} = 0, \quad F = \frac{x_i^2}{(k_i - \varrho_1)^2} = 0, \quad \psi = \frac{x_i^2}{k_i - \varrho_2},$$

woraus ohne Weiteres die Bestimmung der Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche sich ergiebt.

XII.

Die Singularitäten der Congruenzen.

Die beiden einem beliebigen Punkte des Raumes zugeordneten Complexkegel von $f = 0$, $\varphi = 0$ haben im Allgemeinen keine irgendwie ausgezeichnete Beziehung zu einander. Solche Beziehungen, die wir als *Singularitäten der Congruenz* bezeichnen, treten daher erst für bestimmte Flächen und Curven auf.

Wenn die beiden einem Punkte A entsprechenden Kegel sich berühren, so ist A ein Punkt der Brennfläche der Congruenz, die gemeinschaftliche Tangentialebene aber nicht die Ebene der Brennfläche im Punkte A, sondern die des correspondirenden Punktes auf der Berührungskante. Von diesem Gesichtspunkte aus ist die Brennfläche

als *singuläre Fläche der Congruenz* zu bezeichnen. Berühren sich die beiden Kegel in zwei verschiedenen Kanten, so existiren für den nämlichen Punkt der Brennfläche zwei verschiedene Tangentialebenen, derselbe ist daher ein Punkt ihrer *Doppelcurve*. Es würde eine zweifache Bedingung erforderlich sein, wenn diese beiden Ebenen zusammenrücken sollen, im Allgemeinen sind daher auf der Doppelcurve keine Punkte mit zusammenfallenden Tangentialebenen — *pinch-points* — vorhanden. Die Ebene, für welche die beiden Complexcurven von f und φ sich doppelt berühren, ist umgekehrt eine *Doppeltangentenebene* der Brennfläche.

Osculiren sich die beiden Kegel des Punktes A, so besitzt die Brennfläche in ihm zwei unendlich nahe Tangentialebenen. Ein solcher Punkt gehört daher der *Rückkehrcurve* der Brennfläche an. Umgekehrt sind die *parabolischen Ebenen* derselben dadurch ausgezeichnet, dass sich die in ihnen liegenden Complexcurven osculiren. Von einer Congruenzgeraden ausgehend, gelangt man bekanntlich zu zwei unendlich nahen, welche sie schneiden und durch Fortsetzung dieser Construction zu den Kummer'schen Developpabeln, in welche sich die sämmtlichen Geraden der Congruenz anordnen lassen. Die Rückkehrkanten der Kummer'schen Developpabeln haben daher in den Punkten der parabolischen oder Rückkehrcurve der Brennfläche stationäre Ebenen oder Punkte. In den Punkten der Doppelcurve würden sich dagegen die Rückkehrkanten von zwei verschiedenen Developpabeln schneiden.

Es werden ferner einzelne Punkte der Brennfläche existiren, deren Kegel sich dreifach berühren, es sind die *dreifachen Punkte der Doppelcurve*. Ihnen entsprechen die *dreifachen Tangentenebenen* der Brennfläche, für welche dreifache Berührung von Complexcurven stattfindet. Ferner werden die beiden Complexkegel in einer bestimmten Zahl von Punkten sich osculiren und ausserdem in einer anderen Kante berühren. Solche Punkte der Rückkehrcurve gehören zugleich der Doppelcurve an, und sind *stationäre Punkte der letzteren*. Wenn sich dagegen die Complexkegel eines Punktes überosculiren, so ist derselbe ein Punkt der Doppelcurve, der *stationär für die Rückkehrcurve* ist. Findet nämlich die Osculation in der Kante b, die Berührung in a statt, so vermittelt (a, b) zwei zusammenfallende Paare von Tangentialebenen der Doppelcurve, einer Ueberosculation entsprechen dagegen zwei zusammenfallende Rückkehrtangentialebenen.

Weitere der Doppel- und Rückkehrcurve gemeinsame Punkte treten im Allgemeinen nicht auf.

In speciellen Fällen können natürlich weit höhere Singularitäten auftreten, deren Aufzählung wir hier unterlassen. Insbesondere kann es geschehen, dass die Complexcurven in einer Ebene einen reducibeln Theil gemeinsam haben. Derselbe gehört dann der Brennfläche an,

zugleich ist aber diese Ebene eine solche, welche die Brennfläche nach der ganzen Erstreckung einer Curve berührt, die von der vorigen verschieden ist. Das dualistische Verhalten findet statt, wenn zwei Complexkegel einen Theil gemein haben. Derselbe bildet einen Tangentialkegel der Brennfläche, dessen Spitze vielfacher Punkt derselben ist.

Wir erwähnen noch besonders den Fall, wo einer der Complexe linear ist. Die Doppeltangentenebenen der Brennfläche sind dann eindeutig durch den linearen Complex auf die Punkte der Doppelcurve bezogen. Die Doppelcurve ist der Ort der Spitzen von Complexkegeln, für welche die durch den linearen Complex zugeordnete Ebene Doppeltangentenebene des Kegels (mithin auch der Brennfläche) ist. In derselben Weise gehören Rückkehr- und parabolische Curve zueinander. Wenn die Ebene des linearen Complexes den Kegel ihres zugeordneten Punktes osculirt, so ist sie parabolische Ebene, der Punkt Rückkehrpunkt der Brennfläche. Die stationären Punkte der Rückkehrcurve entsprechen den Kegeln, welche von der zugehörigen Ebene des linearen Complexes überosculirt werden, die stationären Punkte der Doppelcurve Ebenen, welche osculiren und an einer anderen Stelle berühren, endlich die dreifachen Punkte der Doppelcurve dreifachen Tangentialebenen der Complexkegel, welche durch den linearen Complex ihren Spitzen zugeordnet sind.

Von diesen Betrachtungen ausgehend, welche einen anschaulichen *Zusammenhang der Singularitäten der Brennflächen mit denen der Congruenz* begründen, gelangt man zu einer *zweiten rein liniengeometrischen Definition dieser ersteren Singularitäten*, deren Verfolgung die bisherigen Untersuchungen zugleich in einigen Punkten ergänzen wird. Die allgemeine Aufgabe ist hier die *liniengeometrische Bestimmung derjenigen Linienflächen und Linienconfigurationen, welche mit jenen Singularitäten verknüpft sind.* Wir werden dieselbe insbesondere für die parabolische und Rückkehrcurve behandeln.

Wir betrachten zunächst die Brennfläche eines linearen Complexes $a_x = 0$ und $f = 0$.

Damit die Gerade x der Congruenz durch einen Punkt der Rückkehr- oder parabolischen Curve gehe, müssen die Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} (yf) = 0, \\ (yx) = 0, \\ (y\alpha) = 0, \\ (ya) = 0, \\ (y^2) = 0, \\ y_i y_k f_{ik} = 0 \end{cases}$$

erfüllt sein, in denen die α die Coordinaten einer beliebigen Geraden

(oder auch eines linearen Complexes) bedeuten. Die Resultante derselben ist die Gleichung eines Complexes, welcher mit $a_x = 0$, $f = 0$ die gesuchte Linienfläche bestimmt. Man kann sie auf dem Wege einer Discriminantenbildung erhalten, es ergeben sich dann die nämlichen Determinanten, mit deren Reduction wir uns schon früher beschäftigt haben. In einer vollständig entwickelten Form erhält man diese Discriminante mittelst der symbolischen Methoden.

Wir denken also (y^2) mit Hülfe der drei ersten Gleichungen (1) durch das Product zweier linearer Ausdrücke

$$(p_y)\,(q_y)$$

ersetzt und $y_i y_k f_{ik}$ durch den symbolischen Ausdruck

(2) $$(A_y)^2 = (B_y)^2 = 0$$

dargestellt. Dabei ist $A_i A_k = B_i B_k = f_{ik}$, ferner:

$$(A_i^2) = (B_i^2) = 0,$$

da der Complex in der Normalform vorausgesetzt wird. Das Resultat der Elimination ist daher:

(3) $$(pafA\alpha x)^2\,(qafB\alpha x)^2 + (pafB\alpha x)^2\,(qafA\alpha x)^2 = 0.$$

Setzt man nun:

$$F = (pafA\alpha x)\,(qafB\alpha x),$$
$$G = (pafB\alpha x)\,(qafA\alpha x),$$

so kommt an Stelle von (3):

(4) $$F^2 + G^2 = (F+G)^2 - 2FG = 0.$$

Bezeichnet man wieder die Determinante der Coefficienten von (y^2) horizontal und vertical mit den Grössen $\beta\,\gamma\,\delta\cdots\beta'\,\gamma'\,\delta'\cdots$ gerändert durch

$$\begin{pmatrix}\beta & \gamma & \delta & \cdots\\ \beta' & \gamma' & \delta' & \cdots\end{pmatrix},$$

so ist

$$\tfrac{1}{2}(F+G) = -\begin{pmatrix}afA\alpha x\\ afB\alpha x\end{pmatrix},$$

woraus, wenn man die sechs ersten Horizontal- und Verticalreihen mit den x multiplicirt und von der letzten subtrahirt, vermöge

$$f = 0,\quad a_x = 0,\ (x^2) = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}(F+G) = (\alpha_x^2)\begin{pmatrix}afA\\ afB\end{pmatrix} - 2\alpha_x A_x\begin{pmatrix}af\alpha\\ afB\end{pmatrix} + A_x B_x\begin{pmatrix}af\alpha\\ af\alpha\end{pmatrix}.$$

Man hat ferner:

$$A_x^2 = B_x^2 = 0,$$
$$B_x B_i = A_x A_i = f_i,$$

also:

$$(5) \qquad \tfrac{1}{4}(F+G)^2 = (\alpha_x)^4 \begin{pmatrix} afA \\ afB \end{pmatrix}^2,$$

In derselben Weise ergiebt sich:

$$(6) \qquad FG = \begin{pmatrix} afA\alpha x \\ afA\alpha x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} afB\alpha x \\ afB\alpha x \end{pmatrix} = (\alpha_x^4) \begin{pmatrix} afA \\ afA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} afB \\ afB \end{pmatrix}.$$

Die Resultante ist daher:

$$2 \begin{pmatrix} afA \\ afB \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} afA \\ afA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} afB \\ afB \end{pmatrix} = 0,$$

oder mit Benutzung eines bekannten Determinantensatzes:

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} afA \\ afA \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} afAB \\ afAB \end{pmatrix} ((f^2)(a^2) - (af^2)) = 0,$$

wir schreiben sie in der Form:

$$(8) \qquad \Phi^2 - 2\Theta\Psi = 0,$$

wo

$$\Phi = \begin{pmatrix} afA \\ afA \end{pmatrix}, \quad \Theta = (a^2)(f^2) - (af)^2, \quad \Psi = \begin{pmatrix} afAB \\ afAB \end{pmatrix}.$$

Es ist leicht, die symbolischen Werthe durch ihre wirklichen auszudrücken. Insbesondere hat man:

$$\Phi = (f_i^2)(a_i a_k f_{ik}) - 2(a_i f_i)(a_k a_i f_{ik}) + (a_i^2)(f_i f_k f_{ik}),$$

$$\tfrac{1}{2}\Psi = (f_i F_i)(a_i a_k f_{ik}) - (a_i F_i)^2 - \Theta\Sigma(f_{ik})^2 + (a^2)(F_i^2) - (af)(a_i f_{ik} F_k) + F(a_i a_k f_{ii} f_{kl}),$$

wobei wieder $F = (f_i^2)$ gesetzt ist.

Der Complex (8) ist vom Grade $2(3n-4)$. Daraus folgt:

Die Linienfläche, deren Erzeugende sich auf die parabolische und Rückkehrcurve stützen, ist vom Grade $4n(3n-4)$.

Diese Fläche steht in einer nicht uninteressanten Beziehung zur Linienfläche vierpunktiger Berührung, welche durch:

$$a_x = 0, \quad f = 0, \quad \Theta = 0$$

gegeben ist. Die singulären Erzeugenden der letzteren sind gegeben durch das Verschwinden von

$$V = [(af)(a\Theta) - (a^2)(f\Theta)]^2 = R^2.$$

Die Cuspidalpunkte, deren Zahl demgemäss

$$4n(n-1)(3n-4)$$

beträgt, liegen dabei auf der Curve vierpunktiger Berührung. Man findet ferner leicht, dass

$$-(a^2)\Phi = (af)(a\Theta) - (a^2)f\Theta = R.$$

Berücksichtigt man schliesslich die Form der Gleichung (8), so ergiebt sich:

Auf der Curve der vierpunktigen Berührung liegen $4n(3n-4)(n-1)$ *ausgezeichnete Punkte. Sie gehören gleichzeitig der parabolischen und der Rückkehrcurve der Brennfläche an, und sind Cuspidalpunkte der Linienfläche der vierpunktigen Berührung, sowie der der parabolischen und Rückkehrcurve. Die letzteren beiden Flächen berühren sich in den entsprechenden Congruenzgeraden, ihren gemeinsamen singulären Erzeugenden.*

Wir schliessen hieran die Bestimmung derjenigen Linienfläche, welche aus den Geraden der Congruenz gebildet wird, auf denen Punkte der Doppelcurve liegen und die ersichtlich diese Curve selbst zur Doppelcurve hat. Wir haben also die Bedingung auszudrücken, dass die Tangentialebene

$$y_i f_i = 0$$

eines Complexkegels Doppeltangentialebene ist und gleichzeitig dem linearen Complexe angehört, also unter Voraussetzung der Gleichungen:

$$(yx) = 0, \quad a_x = 0, \quad f = 0, \quad a_y = 0.$$

Die Bedingung der doppelten Berührung führt zunächst auf die Discriminante:

$$\Psi = 0,$$

welche am Schlusse des § II. betrachtet wurde. Erwägt man, dass, wie schon dort bemerkt wurde, die Gleichungen

$$a_y = 0, \quad (yf) = 0, \quad (yx) = 0, \quad (y^2) = 0, \quad \Psi = 0$$

$2(n+4)(n-3)$ gleiche Wurzeln $y = x$ besitzen, so muss die Resultante derselben, welche entsteht, wenn man aus den letzten fünf Gleichungen und der willkührlichen Bedingung:

$$\alpha_y = 0$$

die y eliminirt, den Factor

$$(\alpha_x)^{2(n+2)(n-3)}$$

enthalten. Unter Absonderung desselben wird die Resultante daher vom Grade

$$2(n+2)(n-3)+2(n-1)(n+2)(n-3)+2(n-2)(n-3)-2(n+2)(n-3)$$

in den x, oder:

$$2(n-3)(n^2+2n-4).$$

Wir erhalten daher eine Linienfläche vom Grade

$$4n(n-3)(n^2+2n-4),$$

deren Erzeugende paarweise einen Punkt der Doppelcurve der Brennfläche enthalten. Ihre Doppelcurve zerfällt also in zwei Theile, von denen einer die Doppelcurve der Brennfläche selbst ist.

Man kann die letztgefundene Zahl verificiren, indem man die Zahl der Schnittpunkte der Curve vierpunktiger Berührung mit der Doppelcurve bestimmt.

Diese letzteren Punkte sind gegeben durch

$$a_x = 0, \quad f = 0, \quad (x^2) = 0, \quad \Theta = 0$$

und

$$\Psi = 0,$$

falls in Ψ an Stelle von y_i $a_i + \lambda f_i$ substituirt wird, wo $\lambda = -\frac{(a^2)}{(af)}$. Ψ enthält dann die Coordinaten x im Grade:

$$(n-1)(n+2)(n-3) + (n-2)(n-3) = (n-3)(n^2+2n-4),$$

woraus sich ergiebt:

Auf der Curve vierpunktiger Berührung liegen

$$4n(n-1)(n-3)(n^2+2n-4)$$

*Punkte der Doppelcurve**). Die gleiche Zahl von Punkten ergiebt sich aber durch den Schnitt der vorhin betrachteten Linienfläche mit dem Complexe $\Theta = 0$.

Wir gehen nun zu dem allgemeinen Falle zweier Complexe $f = 0$, $\varphi = 0$ über und bestimmen auch hier die Linienfläche von Congruenzgeraden, in denen sich Complexkegel oder Complexcurven der beiden Complexe osculiren. Durch die Gleichungen:

$$(9) \qquad (yf) = 0, \quad (y\varphi) = 0, \quad (yx) = 0, \quad (y^2) = 0, \quad (\alpha y) = 0$$

drücken wir zunächst eine Gerade y aus, welche durch einen der auf x liegenden Brennpunkte in der zugehörigen Brennebene gelegen ist und die willkührliche Gerade α schneidet (dem Complexe $\alpha_x = 0$ angehört). Die Complexkegel, welche von diesem Brennpunkte auslaufen, haben dann die Gerade x und die ihr benachbarte gemeinsam, welche wir in der Form $x + y d\lambda$ darstellen können. Setzt man in den Gleichungen (9) an Stelle von y z, an Stelle von x $x + y d\lambda$, so resultirt eine zu y unendlich nahe Gerade z aus den Gleichungen:

$$(z(f+\delta f)) = 0, \quad (z(\varphi+\delta\varphi)) = 0, \quad (z(x+yd\lambda)) = 0, \quad (z^2) = 0, \quad (\alpha z) = 0,$$

welche wir durch $y + dy$ bezeichnen; sie bestimmt die gemeinschaftliche Tangentialebene der beiden Complexkegel, welche von dem unendlich nahen Brennpunkte auf der Geraden $x + y d\lambda$ auslaufen. Durch die Bedingung, dass die Gerade $z = y + dy$ sowohl x als y schneidet, wird nun ausgedrückt, dass entweder x, z, y in einer Ebene liegen, und dann findet Osculation der Complexcurven in dieser Ebene statt, oder dass x, z, y durch einen Punkt gehen, welcher Spitze von zwei sich osculirenden Complexkegeln ist.

---

*) Diese Punkte gehören der Curve vierpunktiger Berührung als einfache Punkte an.

Die dazu erforderlichen Gleichungen sind:

$$(10)\quad \begin{cases} (y_i+dy_i)(f_i+d\lambda\,\Sigma y_k\delta f_i)=0, \\ (y_i+dy_i)(\varphi_i+d\lambda\,\Sigma y_k\delta\varphi_i)=0, \\ (y\,dy)=0, \\ (x\,dy)=0, \\ (\alpha\,dy)=0, \\ (k\,dy)=0, \\ (dy^2)=0. \end{cases}$$

Sie geben, wenn aus ihnen die y und dy mit Hülfe der Gleichungen (9) und

$$f=0,\quad \varphi=0,\quad (x^2)=0$$

eliminirt werden, *die Gleichung eines Complexes, welcher diejenigen Geraden der Congruenz bestimmt, welche entweder den Punkten der parabolischen oder denen der Rückkehrcurve entsprechen. Diese Geraden müssen sich daher in zwei getrennte Linienflächen sondern, welche von gleichem Grade sind.*

An Stelle der beiden ersten Gleichungen (10) tritt sofort, wenn

$$\delta f_i = n-1\, f_{ik}\, dx_k,$$
$$\delta\varphi_i = m-1\,\varphi_{ik}\, dx_k,$$

und für die beiden Polarcomplexe die Bezeichnungen

$$y_i y_k f_{ik} = \Delta_1,$$
$$y_i y_k \varphi_{ik} = \Delta_2$$

eingeführt werden,

$$(f_i\, dy_i) + n-1\, d\lambda\Delta_1 = 0,$$
$$(\varphi_i dy_i) + m-1\, d\lambda\,\Delta_2 = 0,$$

also nach Elimination von $d\lambda$

$$(11)\qquad (dy_i[m-1\, f_i\Delta_2 - n-1\,\varphi_i\Delta_1]) = 0.$$

Eliminirt man jetzt aus den 5 letzten Gleichungen (10) und (11) die Differentiale dy, so ergiebt sich:

$$(\Omega : (m-1\, f_i\Delta_2 - n-1\,\varphi_i\Delta_1)\, x_i y_i k_i\, \alpha_i) = 0.$$

Aus dieser Determinante entfernt man durch Multiplication der 6 ersten Horizontal- oder Verticalreihen mit y und Subtraction von der drittletzten vermöge der Gleichungen (9) den Factor $(ky)^2$ und durch die analoge Operation in den x den Factor $(\alpha_x)^2$. Die Determinante nimmt dadurch die einfache Form:

$$(12)\quad (n-1)^2\Delta_2^2(f_i^2) - 2(n-1)(m-1)\Delta_1\Delta_2(f\varphi) + (m-1)^2\Delta_1^2(\varphi^2) = 0$$

an. Aus den Gleichungen (12) und (9) sind jetzt die y zu eliminiren.

Wir zerlegen zu diesem Zwecke die Gleichung vierten Grades (12) in zwei quadratische Factoren:

$$(\Delta_2\gamma_1-\gamma_2\Delta_1)\,(\Delta_2\beta_1-\beta_2\Delta_1)=0,$$

wo

$$\gamma_1\beta_1=(n-1)^2\,(f^2),$$
$$\gamma_2\beta_2=(m-1)^2(\varphi^2),$$
$$\gamma_2\beta_1+\gamma_1\beta_2=2\,(f\varphi)\,(n-1)(m-1).$$

Setzt man jetzt für

$$\Delta_2\gamma_1-\Delta_1\gamma_2=y_iy_k[\gamma_1\varphi_{ik}-\gamma_2f_{ik}]$$

den symbolischen Ausdruck:

$$A_y^2=B_y^2,$$

so dass:

$$A_iA_k=\gamma_1\varphi_{ik}-\gamma_2f_{ik},$$

wobei wiederum:

$$(A^2)=(B^2)=0$$

sein wird, wenn die Formen $f=0$, $\varphi=0$ vollständig von einander unabhängig sind, so ist die Resultante der Gleichungen in y

$$\Phi^2-2\,\Theta\Psi, \tag{13}$$

wo

$$\Theta=(f^2)\,(\varphi^2)-(f\varphi)^2,$$
$$\Phi=(\Omega:f\varphi A),$$
$$\Psi=(\Omega:f\varphi AB).$$

Sie enthält in dieser Form noch die Irrationalitäten γ_1, γ_2. Man entfernt dieselben, indem man den Ausdruck (13) mit dem analog gebildeten multiplicirt, welcher durch Vertauschung der β mit den γ entsteht. So ergiebt sich schliesslich:

$$4\Theta^2\Psi_1\Psi_2-2\Theta(\Psi\Phi'^2+\Psi_1'\Phi^2)+\Phi^2\Phi_1^2=0, \tag{14}$$

welche Gleichung einen Complex $4(3m+3n-7)^{\text{ten}}$ Grades vorstellt. Der Grad der totalen Linienfläche, deren Erzeugende den beiden singulären Curven der Brennfläche zugeordnet sind, ist daher:

$$8nm(3m+3n-7).$$

Es hat keine Schwierigkeit, die wirklichen Ausdrücke statt der symbolischen einzuführen, doch ist es unnöthig, hierauf weiter einzugehen. Die Cuspidalpunkte der Linienfläche vierpunktiger Berührung sind auch hier bestimmt durch die Gleichungen:

$$f=0,\quad \varphi=0,\quad \Theta=0,$$
$$[(\varphi^2)\,(f\Theta)-(f\varphi)\,(\varphi\Theta)]^2=0.$$

Die Zahl derselben ist daher $4mn(m+n-2)(3m+3n-7)$.

Man findet dann ferner, dass die genannten Linienflächen der parabolischen etc. Curve die nämlichen Cuspidalpunkte besitzen. *Die Zahl*

der Punkte, in denen die Rückkehr- beziehungsweise parabolische Curve der Curve vierpunktiger Berührung begegnen, ist daher gleich:

$$4mn(m+n-2)(3m+3n-7).$$

Die Tangente der Curve vierpunktiger Berührung ist dabei jedesmal die betreffende Congruenzgerade und man übersieht leicht, dass dasselbe der Fall sein wird mit den beiden genannten Curven. Es stimmt diese Bemerkung, die in der That aus den Formeln, welche wir früher für die Tangenten von Berührungscurven gegeben haben, ohne Weiteres hervorgeht, überein mit dem bekannten Satze, dass die Curve vierpunktiger Berührung auf jeder Fläche eine Berührungscurve der genannten beiden singulären Curven ist*).

Setzt man in Gleichung (12)

$$\frac{(f^2)}{(\varphi^2)} = \lambda_1\lambda_2, \quad \frac{2(f\varphi)}{(\varphi^2)} = -(\lambda_1+\lambda_2),$$

so sind λ_1 λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(f^2) + 2\lambda(f\varphi) + \lambda^2(\varphi^2) = 0$$

und (12) reducirt sich auf:

$$n-1\Delta_1 + m-1\lambda\Delta_2 = 0.$$

Man erkennt in den beiden letzteren Gleichungen die völlige Identität der hier vorliegenden Frage mit dem bereits früher gelösten Hauptangentenproblem. Die Discriminante der Gleichung

$$\mu^2 A + \mu B + C = 0$$

ist hiernach identisch mit der linken Seite der Gleichung (14).. Es ist damit zugleich ein rein liniengeometrischer Beweis der geometrisch ohne Weiteres einleuchtenden Behauptung gegeben, dass die Osculation von Complexkegeln oder Curven Punkten oder Ebenen der Rückkehr- resp. parabolischen Curve entspricht**).

XIII.

Die Singularitäten der Brennflächen.

Wir bezeichnen nun mit

1) N die Ordnung = Classe der Brennfläche,
2) S den Rang derselben (Classe der ebenen Schnittcurve, Ordnung des Tangentenkegels),

*) Salmon, Anal. Geom. d. Raumes, § 334.

**) Wenn die Discriminante $B^2 - 4AC$ für alle Geraden der Congruenz verschwindet, so enthält die Brennfläche nur parabolische Punkte. *Man kann daher die Gleichung*

$$B^2 - 4AC = 0$$

als Differentialgleichung der developpabeln Brennflächen bezeichnen.

3) J Ordnung = Classe der Haupttangentencongruenz = Zahl der Wendetangenten des ebenen Schnittes = Zahl der Rückkehrkanten des Tangentialkegels,

4) P die Ordnung der parabolischen Curve = der Classe der Developpabeln der Rückkehrtangentialebenen*) = der Zahl der Punkte, in denen die Berührungscurve des Tangentenkegels der Rückkehrcurve begegnet,

5) D die Ordnung der Doppelcurve = Zahl der Doppelpunkte des ebenen Schnittes = Zahl der Doppeltangenten des Tangentenkegels,

6) R die Ordnung der Rückkehrcurve = Classe der parabolischen Ebenen = Zahl der Inflexionskanten des Tangentenkegels = Zahl der Rückkehrpunkte des ebenen Schnittes,

7) Δ die Zahl der Doppeltangenten des ebenen Schnittes = Zahl der Doppelkanten des Tangentenkegels,

8) K dep Rang der Rückkehrcurve = dem Rang der parabolischen Curve**).

Nach den Formeln von Plücker ist zunächst:

$$(1)\qquad \begin{cases} S = N(N-1) - 2D - 3R, \\ J = 3N(N-2) - 6D - 8R, \\ N = S(S-1) - 2\Delta - 3J, \\ R = 3S(S-2) - 6\Delta - 8J. \end{cases}$$

Aus den bereits gefundenen Werthen

$$N = 2mn(m+n-2),$$
$$S = 2mn[(m+n-1)^2 - mn + 1],$$
$$J = 4mn[2(m+n-1)(m+n-2) - mn + 1]$$

ergeben sich daher mit Hülfe der Gleichungen (1) die Werthe von R, Δ, D.

Bestimmung der Zahl P.

Wir betrachten die Tangente der Fläche in einem parabolischen oder Rückkehrpunkte. Ihre Coordinaten sind

$$(2)\qquad y_i = \mu x_i + f_i + \lambda\varphi_i,$$

wo μ ein willkührlicher Parameter, λ die gemeinsame Wurzel der Gleichungen:

$$(3)\qquad B^2 - 4AC = 0,$$

$$(4)\qquad (f^2) + 2\lambda(f\varphi) + \lambda^2(\varphi^2) = 0.$$

*) Unter der Rückkehrtangentialebene verstehen wir diejenige Ebene, in welcher der osculirende Kegel zweiten Grades für einen Punkt der Rückkehrcurve degenerirt.

**) Vgl. Seite 135.

Damit die Gerade (2) zwei willkührliche Geraden a, b schneide, müssen die Gleichungen

$$\mu a_x + (af) + \lambda(a\varphi) = 0,$$
$$\mu b_x + (bf) + \lambda(b\varphi) = 0$$

bestehen. Setzt man den hieraus entspringenden Werth von λ in die Gleichungen (3), (4) ein, so entstehen die Gleichungen zweier Complexe von den Graden

$$6(n+m-2), \quad 2(n+m-1).$$

Sie bestimmen mit

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad (x^2) = 0$$
$$24\,nm(m+n-2)(n+m-1)$$

Lösungen, aus denen aber die des Systems

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad a_x(b\varphi) - b_x(a\varphi) = 0, \quad a_x(bf) - b_x(af) = 0$$

vierfachzählend auszuscheiden sind. Es bleibt daher die Zahl

$$4mn[6(m+n-2)(m+n-1) - 2mn],$$

welche sich gleichzeitig auf die parabolische und Rückkehrcurve bezieht. Wenn a, b sich schneiden, so haben wir entweder einen in der Ebene (ab) liegenden Punkt dieser beiden Curven, oder es geht durch den Punkt (ab) eine Tangente der Fläche, d. h. eine parabolische oder Rückkehrtangentialebene. Beide Gruppen entsprechen sich dualistisch. Es stellt demnach die Zahl

$$2mn[6(m+n-2)(m+n-1) - 2mn]$$

die Zahl $P + R$ vor. Daraus ergiebt sich:

$$P = 2mn[5(m+n-2)(m+n-1) - 3mn + 4].$$

Die bis jetzt gefundenen Zahlen bestätigen eine merkwürdige Gleichung, welche zuerst von Cayley aufgestellt ist*). Cayley hat gezeigt, dass eine Rückkehr- resp. Doppelcurve im Schnitte der Hesse'schen Determinantenfläche mit der Originalfläche 11- beziehungsweise 8-fachzählend auftritt und dies an einer gewissen Rotationsfläche verificirt. Eine einfache Rechnung zeigt nun in der That, dass die Gleichung:

$$4N(N-2) - 8D - 11R - P = 0$$

eine Identität ist. Und man hätte die Zahl P direct aus der letzteren Gleichung, die wir die Cayley'sche nennen, bestimmen mögen, doch

*) On Reciprocal Surfaces. Phil. Trans. of the year 1869. Durch eine Betrachtung der totalen Curve vierpunktiger Berührung auf der Brennfläche, auf welche ich hier nicht eingehe, kann man übrigens auch die daselbst für die Multiplicität, mit welcher die Salmon'sche Fläche Rückkehr- und Doppelcurve einer Fläche ausschneidet, gegebene Formel verificiren.

schien es vortheilhaft, zu zeigen, wie die liniengeometrischen Untertersuchungen selbst diese Gleichung bestätigen.

Bestimmung der Zahl K.

Wir schicken hier zunächst eine etwas genauere Betrachtung der Rückkehr- und parabolischen Curven überhaupt vorauf. Die parabolische Curve einer allgemeinen Ordnungsfläche wird gebildet von Punkten, welche zusammengefallene Haupttangentenpaare besitzen, ihre Ebenen sind Doppelebenen der Fläche mit zusammenfallenden Berührungspunkten. Der der Fläche umschriebene Kegel, dessen Spitze ein parabolischer Punkt ist, hat die parabolische Ebene zur Doppeltangentenebene mit zusammenfallenden Berührungskanten, d. h. zur Undulationsebene, Undulationskante ist die entsprechende Haupttangente. Die Haupttangenten längs der parabolischen Curve, die parabolischen Haupttangenten, bilden eine developpable Fläche, deren Cuspidalcurve als Cuspidalcurve der parabolischen Ebenen bezeichnet werden mag.

Der parabolischen Curve entspricht die Rückkehrcurve einer allgemeinen Classenfläche. Diese Curve ist der Ort von Punkten, denen zusammenfallende Tangentialebenen oder Haupttangenten zukommen. Die Rückkehrtangentialebenen bilden eine Developpable, deren Classe der Ordnung der parabolischen Curve entspricht. Die Erzeugenden derselben sind die Rückkehr-Haupttangenten, diese letzteren entsprechen mithin den Tangenten der parabolischen Curve. Der Schnitt der Fläche mit der Rückkehrtangentialebene ist eine Curve mit dreifachem Punkt, dessen drei Zweige zusammenfallen*), und deren gemeinsame Tangente die Tangente der Rückkehrcurve bildet. Die Tangenten der Rückkehrcurve entsprechen den parabolischen Haupttangenten.

Es ist daher bei zwei reciproken Flächen

die Ordnung der Rückkehrcurve gleich der Classe der parabolischen Ebenen,

die Ordnung der Developpabeln der parabolischen Haupttangenten gleich dem Range der Rückkehrcurve,

die Ordnung der Developpabeln der Rückkehr-Haupttangenten gleich dem Range der parabolischen Curve,

die Ordnung der parabolischen Curve gleich der Classe der Rückkehrtangentialebenen,

die Ordnung der Cuspidalcurve der Rückkehrtangentialebenen gleich der Classe der parabolischen Curve,

die Ordnung der Cuspidalcurve der parabolischen Ebenen gleich der Classe der Rückkehrcurve**).

*) Vgl. II, p. 64.

**) Zu der etwas ausführlicheren Darlegung im Texte bin ich veranlasst worden durch eine Bemerkung des Herrn Klein (diese Annalen V, S. 300), welche

Diese Beziehungen werden nun auch bei der Rückkehr- und parabolischen Curve der Brennfläche obwalten. Liniengeometrisch sind aber beide Curven definirt als Berührungspunkte zusammenfallender Haupttangenten. Diese Haupttangenten bilden die Erzeugenden von zwei developpabeln Flächen und die Dualität der Brennfläche erfordert dann, dass die Zahl der Erzeugenden, welche eine willkührliche Gerade z schneiden, für beide dieselbe sei. Daraus folgt, dass der Rang der parabolischen Curve gleich dem der Rückkehrcurve ist.

Wir bestimmen zunächst K für die Brennfläche eines linearen Complexes $f = a_x = 0$.

Die Gerade

$$y_i = \mu x_i + f_i + \lambda \varphi_i$$

ist Haupttangente in einem parabolischen oder Rückkehrpunkte, wenn

$$\mu^2 A + \mu B + C = 0, \tag{5}$$

während

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Wir suchen nun die Zahl der Linien y, welche eine Gerade z schneiden, setzen daher:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(xz) + (fz) + \lambda(\varphi z) = 0, \\ \Psi = (f^2) + 2\lambda(f\varphi) + \lambda^2(\varphi^2) = 0. \end{array} \right. \tag{6}$$

Da $B^2 - 4AC = 0$ einen Complex vom Grade $6n - 8$ vorstellt, so hat man μ, λ aus den Gleichungen (4), (5), (6) zu eliminiren. Dies liefert einen Complex vom Grade $8(n-1)$. Die Gesammtzahl der Haupttangenten ist daher $8n(n-1)(6n-8)$, mithin:

$$K = 4n(n-1)(6n-8).$$

Für die Brennfläche zweier Complexe n^{ten} und m^{ten} Grades enthält die Discriminante (3) die Grössen μ, λ selbst quadratisch. Insbesondere ist $B = \alpha + \lambda\beta$, wo α β die x in den Graden $3n + 2m - 6$, $2n + 3m - 6$ enthalten. Setzt man nun

$$\mu A + B = 0,$$
$$\mu(xz) + (fz) + \lambda(\varphi z) = 0,$$

so ist

$$\lambda = \frac{A(fz) - \alpha(xz)}{-A(\varphi z) + (xz)\beta} = \frac{a}{b},$$

a, b sind von den Graden $2m + 3n - 5$, $2n + 3m - 5$.

sich auf die parabolischen Tangenten der Integralflächen eines Complexes zweiten Grades bezog. Ich nehme dabei Gelegenheit, dieselbe dahin zu modificiren, *dass die daselbst entwickelte Formel eben nur ein Ausdruck des Theorems ist, dass parabolische Tangenten immer eine Developpable bilden*, wie mir Herr Klein auf eine gelegentliche Mittheilung über reciproke Flächen bemerkte.

Setzt man die Werthe von λ in die Discriminante und (4) ein, so erhält man die Gleichungen zweier Complexe von den Graden:

$$2[5(m+n)-11], \quad 6(m+n-2).$$

Aber aus den Lösungen, welche diese Complexe mit $f=0$, $\varphi=0$ bestimmen würden, sind zu entfernen die des Systems:

$$f=0, \quad \varphi=0, \quad a=0, \quad b=0, \quad (x^2)=0,$$

und zwar vierfachzählend, also im Ganzen

$$8mn(2m+3n-5)(2n+3m-5).$$

Endlich ist noch das System

$$A=0, \quad B=0, \quad f=0, \quad \varphi=0, \quad \Psi=0, \quad (x^2)=0,$$

oder

$$A=0, \quad f=0, \quad \varphi=0, \quad (x^2)=0, \quad (f^2)\beta^2-2(f\varphi)\alpha\beta+\alpha^2(\varphi^2)=0$$

mit $8mn(3m+3n-7)(m+n-2)$ Lösungen zu entfernen.

Man hat daher als Zahl der Haupttangenten

$$24mn[5(m+n)-11](m+n-2)-8mn[2m+3n-5][2n+3m-5]$$
$$-8mn(3m+3n-7)(m+n-2),$$

mithin

$$K=4mn[6(m+n-2)^2-2(m+n-2)-(m-1)(n-1)].$$

Wir bezeichnen jetzt die folgenden weiteren Singularitäten der Brennfläche. Es sei

9) t die Zahl der dreifachen Punkte der Doppelcurve = der Zahl der dreifachen Ebenen der Fläche,

10) γ die Zahl der stationären Punkte der Doppelcurve = der Zahl der Ebenen der Doppeldeveloppabeln, welche zugleich parabolische Ebenen sind,

11) β die Zahl der stationären Punkte der Rückkehrcurve = der der stationären parabolischen Ebenen (Berührungspunkte der parabolischen Curve mit der totalen Curve vierpunktiger Berührung),

12) k die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der Doppelcurve,

13) h die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der Rückkehrcurve.

14) ϱ die Zahl der Schnittpunkte der Berührungscurve des Tangentenkegels mit der Doppelcurve.

Zwischen den letzteren Zahlen besteht die Gleichung:

$$K=R(R-1)-2h-3\beta; \tag{7}$$

sowie die 6 Salmon'schen Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} S(N-2) &= J + \varrho + 2P, \\ D(N-2) &= \varrho + 2\beta + 3\gamma + 3t, \\ R(N-2) &= 2P + 4\beta + \gamma, \\ S(N-2)(N-3) &= 2\Delta + 2SD + 3SR - 4\varrho - 9P, \\ D(N-2)(N-3) &= 4k + SD + 3DR - 9\beta - 6\gamma - 2\varrho, \\ R(N-2)(N-3) &= 6h + SR + 2DR - 6\beta - 4\gamma - 3P. \end{cases}$$

Die vierte der Salmon'schen Gleichungen wird eine Identität, wenn man den Werth von ϱ aus der ersten in sie einträgt. Es bleiben also gerade sechs Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Singularitäten

$$h,\ k,\ \varrho,\ \beta,\ \gamma,\ t.$$

Man erhält zunächst für die Brennfläche eines linearen Complexes mit einem Complexe n^{ten} Grades:

$$(9)\quad \begin{cases} N = 2n(n-1), \\ S = 2n(n^2-n+1), \\ J = 4n(n-1)(2n-1), \\ R = 2n(n^2-4), \\ \Delta = 2n^6 - 4n^5 + 6n^4 - 17n^3 + 20n^2 - 6n, \\ P = 2n(5n^2 - 8n + 4), \\ D = 2n(n+1)(n-2)(n-3), \\ K = 8n(n-1)(3n-4), \\ \beta = 8n(n-3)(3n-2), \\ \gamma = 4n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4), \\ t = \tfrac{1}{3}n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2), \\ k = (n-3)[2n^6 - 10n^5 + 2n^4 + 42n^3 + 5n^2 - 155n + 58], \\ h = 2n^6 - 16n^4 - 13n^3 + 60n^2 - 12n - \tfrac{3}{2}\beta, \\ \varrho = 4n^5 - 8n^4 - 24n^3 + 44n^2 - 24n, \\ Q = 4n(n-1)(n-3)(n^2+2n-4)\ ^*), \end{cases}$$

also z. B. für

n =	2	3	4	5
N	4	12	24	40
S	12	42	104	210
J	24	120	336	720
R	0	30	96	210
Δ	28	680	4840	0
P	32	150	416	890

*) Q ist der Rang der Doppelcurve.

K	32	240	768	1760
D	0	0	80	360
β	—	0	320	1040
γ	—	0	0	2040
t	—	0	0	0
k	—	0	2680	
h	—	315	3696	
ϱ	—	0	1120	

Für die Brennfläche zweier Complexe $f = 0$, $\varphi = 0$ von den Graden n, m hat man dagegen:

$$(10)\quad \begin{cases} N = 2nm(m+n-2), \\ R = 2mn[(m+n-1)(m+n-2)+mn-4], \\ S = 2mn[(m+n-1)^2-mn+1], \\ D = 2m^2n^2(m+n-2)^2 \quad 4mn(m+n \quad 1)(m+n-2)-2mn(m+n-3), \\ P = 2mn[5(m+n-1)(m+n-2)-3mn+4], \\ J = 4mn[2(m+n-1)(m+n-2)-mn+1], \\ K = 4mn[6(m+n-2)^2-2(m+n-2)-(m-1)(n-1)], \\ 2\Delta = S\cdot S-1-N-3R, \end{cases}$$

aus denen sich die Werthe der übrigen Singularitäten in jedem Falle berechnen lassen. So z. B. ist für $n = m = 2$

$$N = 16,\ S = 48,\ D = 24,\ R = 48,\ P = 176,\ J = 144,\ \Delta = 904,$$
$$\varrho = 176,\ \beta = 80,\ h = 856,\ K = 304,\ \gamma = 0,\ t = 0.$$

XIV.

Die Singularitäten der Complexflächen.

Für die Plücker'schen Complexflächen als Brennflächen eines speciellen linearen Complexes sind die Zahlwerthe des vorigen § nicht mehr gültig. Es entstehen hier weitere Reductionen, die wir im Folgenden darlegen und durch directe geometrische Betrachtungen bestätigen werden.

Wenn

$$f = \alpha_x = 0, \quad (\alpha^2) = 0,$$

so wird

$$A = -(\alpha\varphi)^2,$$
$$B = (\alpha\varphi)L + (\varphi^2)H, \quad \text{vgl. § VII.}$$

Da die Axe α der Complexfläche eine $n(n-1)$-fache Gerade der Fläche ist, so ergiebt sich zunächst aus den Gleichungen:

$$J = n(n-1)(8n-7),$$
$$N = 2n(n-1),$$
$$S = n(2n^2-2n+1),$$

und den Plücker'schen Formeln:

$$S = N(N-1) - 2D - 3R - n(n-1)[n(n-1)-1],$$
$$J = 3N(N-2) - 6D - 8R - 3n(n-1)[n(n-1)-1],$$
$$R = n(n-2)(2n+1),$$
$$D = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n-3)(3n+1).$$

Bei der Bestimmung von $R+P$ ist zu beachten, dass die Discriminante

$$B^2 - AC = 0$$

die Grössen $(\alpha\varphi)$ und (φ^2) homogen im zweiten Grade enthält. Setzt man daher:

$$\alpha_x = 0, \quad \varphi = 0, \quad (x^2) = 0,$$
$$\lambda = \frac{a_\alpha b_x - b_\alpha a_x}{(a\varphi)b_x - (b\varphi)a_x} = -\frac{2(\alpha\varphi)}{(\varphi^2)},$$

so hat man 4 Gleichungen von den Graden:

$$1, \quad n, \quad 2, \quad 2n-1,$$

welche mit $B^2 - 4AC = 0$, welcher Ausdruck die x im Grade $2(3n-4)$ enthält, $4n(2n-1)(3n-4)$ Lösungen geben, aus denen doppeltzählend die des Systems

$$\alpha_x = 0, \quad \varphi = 0, \quad (\varphi^2) = 0, \quad (\alpha\varphi) = 0, \quad (x^2) = 0$$

auszuscheiden sind. Es ergiebt sich daher

$$R + P = 2n(4n^2-7n+2),$$

mithin

$$P = n(6n^2-11n+6).$$

Die gefundenen Zahlen befriedigen wieder die Cayley'sche Gleichung, wenn man bedenkt, dass die Schnittcurve der Hesse'schen Fläche mit der Complexfläche, welche die parabolische Curve darstellt, wegen der vielfachen Geraden eine Reduction um $4n(n-1)[n(n-1)-1]$, wegen der $2n(n-1)^2$ pinch-planes um $4n(n-1)^2$ verlangt*), so dass:

$$4N(N-2) - 8D - 11R - P - 4n(n-1)(n^2-2) = 0.$$

Endlich ergiebt sich auf dem nämlichen Wege wie im vorigen §:

$$K = 2n(n-1)(7n-10).$$

Es wird nicht überflüssig erscheinen, wenn wir zeigen, wie diese Zahlen durch geometrische Betrachtungen gefunden werden können, die von den analytischsn Untersuchungen der früheren § gänzlich unabhängig sind.

*) Die Hesse'sche Fläche hat pinch-plane und pinch-line mit der Originalfläche gemeinsam.

1) *Axe der Complexfläche.* Jedem Punkte der Axe α entspricht ein Kegel n^{ter} Ordnung, der Tangentenkegel der Complexfläche. Die $n(n-1)$ Ebenen, welche man durch die Axe an den Kegel legen kann, sind ebenso viele Ebenen, welche die Complexfläche in diesem Punkte berühren, jeder Punkt der Axe ist daher $n(n-1)$-facher Punkt der Fläche. Ebenso liegt in jeder Ebene durch die Axe die Complexcurve n^{ter} Classe, deren $n(n-1)$ Schnitte mit derselben Berührungspunkte der Ebene mit der Fläche sind. Die Axe ist daher $n(n-1)$-fach sowohl ihrer Ebenen- als Punkterzeugung nach.

Diese Ebenen und Punkte bilden eine Involution $[n(n-1), n(n-1)]$ mit $2[n(n-1)-1]n(n-1)$ Doppelelementen. Auf der Axe liegen daher ebensoviel Cuspidalpunkte. Diese sind zusammengesetzt aus drei verschiedenen Classen von Punkten, nämlich

1) aus den dreifachzählenden λ Spitzen derjenigen Complexkegel, welche eine durch die Axe gehende Ebene zur Wendeebene haben,
2) aus den Schnittpunkten der singulären Fläche des Complexes mit der Axe, den μ pinch-points der Complexfläche,
3) aus den doppeltzählenden ν Spitzen von Complexkegeln, welche eine durch die Axe gehende Ebene zur Doppelebene haben.

In der That hat man:

$$\lambda = 2n(n-1)(n-2),$$
$$\mu = 2n(n-1)^2,$$
$$\nu = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

und

$$2n(n-1)[n(n-1)-1] = 6n(n-1)(n-2) + 2n(n-1)^2 + 2n(n-1)(n-2)(n-3)\ *).$$

2) *Classe und Ordnung der Complexfläche* sind bereits durch Plücker bestimmt worden**), sie ergeben sich ohne Weiteres, wenn man den Schnitt der Fläche mit einer Ebene durch die Axe betrachtet. In der That trifft jede Gerade, welche die Axe schneidet, die Complexfläche in $n(n-1)$ weiteren Punkten, während durch jede solche Gerade $n(n-1)$ Ebenen sich an die Fläche legen lassen (Tangentialebenen an den Complexkegel, der von dem Schnittpunkte der Geraden mit der Axe ausgeht). Es ist also $N = 2n(n-1)$.

3) *Rang der Complexfläche.* Die $2n(n-1)^2$ pinch-planes der Fläche gehen durch die Axe derselben. Ein ebener Schnitt, welcher der Axe in A

*) Ueber die Multiplicität, in welcher die verschiedenen Punkte in den Grad der Discriminante eingehen, vgl. Zeuthen, Sur les droites multiples des surfaces, Math. Annalen Bd. IV, S. 13.

**) Neue Geom. S. 208.

begegnet, enthält demnach ebensoviel Tangenten, welche durch A gehen, ausserdem noch n weitere, die von A auslaufenden Geraden des Complexkegels. Von A lassen sich also

$$n[2n^2-4n+3]$$

Tangenten an die Schnittcurve legen. Da aber A selbst ein $n(n-1)$-facher Punkt der Curve ist, so ist für die Zahl S eine Verminderung von $2n(n-1)$ eingetreten, woraus:

$$S = n(2n^2-4n+3+2n-2) = n(2n^2-2n+1).$$

4) *Rückkehrcurve der Complexfläche.* In jeder Ebene durch die Axe liegen $3n(n-2)$ Spitzen der Complexcurve, sie sind zugleich Spitzen der Schnittcurve der Complexfläche in dieser Ebene, d. h. Punkte ihrer Rückkehrcurve. Ausserdem liegen aber auf der Axe die $\lambda = 2n(n-1)(n-2)$ Punkte, welche ebenfalls Spitzen von Complexcurven sind, deren Ebenen durch die Axe gehen. Die Rückkehrcurve besitzt daher in einer solchen Ebene

$$R = 2n(n-1)(n-2) + 3n(n-2) = n(n-2)(2n+1)$$

Punkte.

5) *Doppelcurve der Complexfläche.* In jeder Ebene durch die Axe liegen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppelpunkte der Complexcurve, also Punkte der Doppelcurve der Complexfläche. Weiter liegen auf der Axe $\nu = n(n-1)(n-2)(n-3)$ Doppelpunkte von Complexcurven, woraus:

$$D = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)+n(n-1)(n-2)(n-3) = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n-3)(3n+1).$$

6) *Stationäre Punkte der Rückkehrcurve.* Von der Axe gehen $4n(n-3)(3n-2)$ Kegel mit Undulationsebene aus, sie entsprechen den Punkten, in denen die parabolische Curve die totale Curve vierpunktiger Berührung berührt, ihnen entsprechen ebensoviel stationäre Punkte der Rückkehrcurve. Es ist demnach:

$$\beta = 4n(n-3)(3n-2).$$

7) *Stationäre Punkte der Doppelcurve.* Ihre Zahl entspricht dualistisch der Zahl der Complexkegel, deren Spitzen auf der Axe liegen, welche eine Inflexionsebene haben, die zugleich einfache Tangentialebene ist. Hieraus ergiebt sich:

$$\gamma = 2n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)$$

8) *Dreifache Punkte der Doppelcurve.* Ihre Zahl ist

$$t = \tfrac{2}{3}n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2).$$

9) *Berührungscurve der Complexfläche mit der singulären Fläche von $\varphi = 0$.* Die Complexfläche berührt nach § IV. die singuläre Fläche in einer Curve, welche durch die Linienfläche

$$\alpha_x = 0, \quad \varphi = 0, \quad (\varphi^2) = 0$$

bestimmt ist. Ihr Grad ist daher $2n^2(n-1)$, das Geschlecht $2n(n-1)(3n-5)+1$. In der That berührt jede Complexcurve die Schnittcurve ihrer Ebene mit der singulären Fläche in den $2n(n-1)$ singulären Punkten, welche auf den $2n(n-1)$ Geraden der Congruenz der singulären Linien liegen. In jeder Ebene durch die Axe liegen daher $2n(n-1)$ Punkte der Berührungscurve, auf der Axe aber noch $2n(n-1)^2$ weitere, die Schnittpunkte der singulären Fläche mit derselben. Daraus ergiebt sich als Grad der Berührungscurve:

$$2n(n-1)+2n(n-1)^2=2n^2(n-1)$$

wie vorhin.

Als Ordnung der Durchschnittscurve der Complexfläche mit der singulären Fläche ergiebt sich mithin:

$$4n^2(n-1)^3-4n^2(n-1)=4n^3(n-1)(n-2).$$

Wir entnehmen daraus den Satz:

Die Spitzen der Complexkegel mit Doppelkanten, welche eine beliebige Gerade berühren, liegen auf einer Curve von der Ordnung $4n^3(n-1)(n-2)$.

Eine weitere Particularisation der Complexflächen entsteht dadurch, dass die Axe derselben dem Complexe φ selbst angehört. Jede Ebene durch dieselbe berührt dann die Complexfläche in $n(n-1)$ Punkten, von denen zwei zusammenfallen. Wir schliessen daraus, dass die Axe auch jetzt noch als $n(n-1)$-fache Gerade zählt, dass aber jeder ebene Schnitt der Fläche in der Axe einen $n(n-1)$-fachen Punkt mit zwei zusammenfallenden Zweigen besitzt. Daher erniedrigt sich die Classe und die Zahl der Haupttangenten in den Plücker'schen Formeln um eine resp. zwei Einheiten, und man kann sich leicht überzeugen, dass die Zahlen S und J die nämliche Verminderung erfahren. Die Grade der Doppel- und Rückkehrcurve bleiben daher dieselben wie im allgemeinen Falle, da die Zahl der pinch-Singularitäten so lange unverändert bleibt, als die Axe keine singuläre Linie des Complexes φ ist. Es ist übrigens leicht, auch diesen Fall in Betracht zu ziehen.

XV.

Die zweite Gruppe der Singularitäten der Complexe in ihrer Beziehung zur singulären Fläche.

Die Punkte der singulären Fläche sind Spitzen von Complexkegeln mit einer Doppelkante, der singulären Linie. Die letztere ist zugleich Doppeltangente der Complexcurve in der singulären Ebene, dagegen Rückkehrtangente der beiden Curven in den Ebenen E_1, E_2 (§ III.).

Die Frage, wann die Doppel- zur Rückkehrkante, beziehungsweise die Doppel- zur Wendetangente wird, kann man wieder an die Be-

trachtung des conischen Polarcomplexes anknüpfen. Der Complexkegel resp. die Complexcurve desselben muss in einen doppeltzählenden Kegel erster Ordnung resp. Curve erster Classe degeneriren. Nach den Untersuchungen von Plücker findet dies statt für die Knotenpunkte und Doppelebenen der Kummer'schen Fläche, welche seine singuläre Fläche ist. Es ist daher die Bedingung auszudrücken, dass die Gerade x für den conischen Polarcomplex eine der durch die Knotenpunkte resp. in den Doppelebenen dieser Fläche verlaufenden Linien ist. Dazu ist aber im Anschluss an die Betrachtungen des § II. erforderlich, dass die Gleichung vierten Grades:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} f_{ik}-\mu & x_i \\ x_i & 0 \end{vmatrix} = 0$$

zwei Paare von gleichen Wurzeln besitze. Da für $f=0$, $F=0$ bereits zwei Wurzeln gleich ∞ sind, so ist die Discriminante der quadratischen Gleichung

$$(2) \qquad (fF)+\mu(F^2)+\mu^2(F_iF_kf_{ik}+\alpha_4(fF))=0$$

gleich Null gesetzt, die erforderliche Bedingung.

Zu demselben Resultate kommt man auch auf folgendem Wege, der von einer speciellen Theorie des Complexes zweiten Grades unabhängig ist. Die beiden Ebenen E_1, E_2 des conischen Polarcomplexkegels im singulären Punkte liegen harmonisch zur Ebene F und der singulären Ebene. Rücken E_1, E_2 zusammen, so vereinigt sich auch F mit ihnen. Es werden daher die Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} (yf) = 0, \\ (yF) = 0, \\ (yx) = 0, \\ (y\alpha) = 0, \\ (y^2) = 0, \\ y_iy_kf_{ik} = 0 \end{cases}$$

ausdrücken, dass entweder die Ebenen E_1, E_2 mit F oder im dualistischen Sinne die beiden Punkte e_1, e_2 mit f zusammenfallen. Beides tritt im Allgemeinen nicht gleichzeitig ein*). Die Elimination der y aus den Gleichungen (3) bedingt aber das Verschwinden der Discriminante von

$$\begin{vmatrix} f_{ik}-\mu & f_i & F_i \\ f_k & 0 & 0 \\ F_k & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{(fF)}{\mu} \begin{vmatrix} f_{ik}-\mu & f_i \\ f_k & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche mit der von (1) identisch ist.

*) Plücker, N. G. S. 308.

In Rücksicht auf unsere früheren Untersuchungen über die Haupttangenten der singulären Fläche lässt sich demnach der folgende Satz aussprechen:

Die Rückkehrcurve der singulären Fläche ist der Ort der Spitzen von Complexkegeln mit Rückkehrkante, die parabolischen Ebenen derselben enthalten Complexcurven mit Wendetangente. Die ausgezeichnete Gerade (Rückkehr- oder Wendekante) ist auch hier die singuläre Gerade. Die Rückkehrtangentialebene des Complexkegels ist aber nicht Rückkehrtangentialebene der singulären Fläche, ebensowenig als der Wendepunkt der Complexcurve ein parabolischer Punkt einer Fläche ist. Die Rückkehrtangentialebenen der Complexkegel umhüllen die accessorische Fläche, die Wendepunkte der Complexcurven liegen auf derselben.

Die Discriminante von (2), welche wir mit $\Pi = 0$ bezeichnen, stellt einen Complex vom Grade $8n - 12$ vor. Daraus folgt:

Die Linienfläche, deren Erzeugende Rückkehr- oder Wendetangenten von Complexkegeln oder Curven sind, ist vom Grade

$$4n(n-1)(8n-12).$$

Die Discriminante Π enthält im Wesentlichen die Ausdrücke (fF), (F^2), $(F_iF_kf_{ik})$. Die geometrische Bedeutung derselben ergiebt sich ohne Weiteres. Da $(yF) = 0$ die Tangentialebene des Complexkegels von F vorstellt, so zeigt die Gleichung $(fF) = 0$, dass dieselbe mit der singulären Ebene coincidirt. Wegen:

$$f_if_kf_{ik} = (fF)$$

rückt dann zugleich eine der Ebenen des zerfallenden conischen Polarcomplexkegels in die nämliche Ebene hinein. In der singulären Ebene liegen daher zwei unendlich nahe singuläre Linien, d. h. die singuläre Gerade ist *Haupttangente* der singulären Fläche*).

Die Linienfläche der singulären Geraden, welche Haupttangenten der singulären Fläche sind, ist daher vom Grade

$$4n(n-1)(3n-4).$$

Die Complexcurve in der singulären Ebene hat in diesem Falle die singuläre Gerade zur Doppeltangente, aber der eine Berührungspunkt der Doppeltangente coincidirt mit dem singulären Punkte.

Haben die Complexkegel von f und F in der singulären Ebene überhaupt eine weitere Kante gemeinsam, so ist dieselbe eine *Doppeltangente* der singulären Fläche und zugleich singuläre Linie. Die Bedingung dafür ist die Existenz einer gemeinsamen Wurzel der Gleichungen:

---

*) Uebrigens geht dies unmittelbar aus dem Ausdrucke hervor, den wir früher für die Haupttangenten der singulären Fläche aufgestellt haben.

$$f_{(\mu x+\lambda f)} = 0,$$
$$F_{(\mu x+\lambda f)} = 0.$$

Da die Resultante der letzteren beiden Gleichungen einen Complex vom Grade $2(n-1)(n-2)(n+3)$ vorstellt, so hat man den Satz:

Die Linienfläche singulärer Geraden, welche die singuläre Fläche in den Punkten einer Curve berühren, die singulären Doppeltangenten der Fläche als nicht singuläre Berührungspunkte zugeordnet sind, ist vom Grade:

$$4n(n-1)^2(n-2)(n+3).$$

Die singuläre Ebene kann auch mit der Rückkehrtangentialebene, respective der parabolische Punkt der singulären Fläche mit dem Wendepunkt der Complexcurve sich vereinigen. Es muss dann mit $(f_i F_i)$ auch Π verschwinden, woraus

$$(F^2) = 0.$$

Betrachten wir nun die F_i als Coordinaten einer Geraden η, so liegen die drei Geraden

$$x_i \quad f_i \quad F_i \text{ oder } x \quad \xi \quad \eta$$

wegen

$$(x^2) = 0, \quad (\xi^2) = 0, \quad (\eta^2) = 0,$$
$$(x\xi) = 0, \quad (x\eta) = 0, \quad (\xi\eta) = 0$$

entweder in einer Ebene, der singulären Ebene, oder sie gehen durch einen gemeinsamen Punkt, den singulären Punkt. Im letzteren Falle ist die Rückkehrtangentialebene des Complexes singuläre Ebene, die Complexcurve in der letzteren hat aber auch jetzt noch die singuläre Gerade zur Doppeltangente. Denn die Berührungspunkte der Complexcurve mit dieser Linie sind gegeben durch die Mittelpunkte der beiden Strahlbüschel, in welche die Linienfläche

$$z_i z_k f_{ik} = 0, \quad (zf) = 0, \quad (zx) = 0$$

in der singulären Ebene degenerirt. Wählt man nun eine willkührliche Gerade r in dieser Ebene, so wird

$$r_i + \lambda f_i$$

diesen Strahlbüscheln angehören, wenn

$$r_i r_k f_{ik} + 2\lambda(r_i F_i) = 0,$$

der eine Berührungspunkt ist also wie vorhin der singuläre Punkt, der andere durch den Parameter:

$$\lambda = -\tfrac{1}{2}\frac{(r_i r_k f_{ik})}{(rF)}$$

bestimmt, welcher nie unendlich gross werden kann, da $(r_i F)$ nicht verschwindet, wenn $x\ \xi\ \eta$ nicht in einer Ebene liegen.

Die beiden Tangentialebenen des Complexkegels von F im singulären

Punkte haben keine ausgezeichnete Lage zur singulären Ebene der Complexe f oder F. Ihre Richtungen sind bestimmt durch den Strahl $f_i + \lambda F_i$, der ihnen angehört, wo λ aus der quadratischen Gleichung

$$f_i f_k F_{ik} + 2\lambda(f_i F_k F_{ik}) + \lambda^2(F_i F_k F_{ik}) = 0$$

zu entnehmen ist.

Fassen wir diese Betrachtungen und die entsprechenden dualistischen (für den Fall, dass $x\ \xi\ \eta$ in einer Ebene liegen) zusammen, so ergiebt sich:

Die singuläre Fläche enthält

$$8n(n-1)(2n-3)(3n-4)$$

ausgezeichnete Punkte. Die eine Hälfte derselben gehört der parabolischen Curve an, $\xi\ \eta\ x$ liegen dann in einer Ebene, der parabolische Punkt der singulären Fläche ist Wendepunkt der Complexcurve in dieser nämlichen Ebene. Die andere Hälfte wird von Punkten der Rückkehrcurve gebildet, für welche die Rückkehrtangentialebene des Complexkegels mit der singulären Ebene coincidirt.

Wenn aber die 4 Ausdrücke

$$f,\ F,\ (fF),\ (F^2)$$

gleichzeitig verschwinden, so hat (vgl. § IV.) die accessorische Fläche entweder ein pinch-point oder ein pinch-plane. Wir fügen daher dem vorigen Satze noch hinzu:

Die den $4n(n-1)(2n-3)(3n-4)$ ausgezeichneten Punkten der parabolischen Curve der singulären Fläche entsprechenden singulären Ebenen sind pinch-planes der accessorischen Fläche, die entsprechenden Punkte der Rückkehrcurve pinch-points derselben. Pinch-line ist in beiden Fällen die singuläre Gerade.

Die übrigen Singularitäten der singulären Fläche bedürfen kaum einer weiteren Erläuterung.

Die Doppelcurve ist der Ort der Spitzen von Complexkegeln mit zwei Doppelkanten, die Doppeltangentenebenen der singulären Fläche enthalten Complexcurven mit zwei Doppeltangenten. Unter den Complexkegeln mit zwei Doppelkanten tritt eine bestimmte Zahl auf, bei denen die eine Doppelkante zur Rückkehrkante wird, sie entsprechen stationären Punkten der Doppelcurve, welche der Rückkehrcurve angehören. Complexkegel mit zwei unendlich nahen Doppelkanten entsprechen dagegen stationären Punkten der Rückkehrcurve, welche der Doppelcurve angehören. Endlich entsprechen Complexkegel mit drei Doppelkanten den dreifachen Punkten der Doppelcurve, die Ebenen von Complexcurven mit drei Doppeltangenten den dreifachen Ebenen der singulären Fläche. Weitere Singularitäten sind auch hier im Allgemeinen nicht vorhanden.

Wir bezeichnen nun mit

$$N,\ S,\ \Delta,\ J,\ D,\ R,\ P,\ K,\ \beta,\ \gamma,\ t,\ \varrho,\ h,\ k$$

die nämlichen Zahlen, welche in § XIII. erläutert worden sind.

Man erhält dann weiter aus

$$N = 2n(n-1)^2,$$
$$S = 2n(n-1)(n^2-n+1),$$
$$J = 2n(n-1)(5n^2-8n+2)$$

zunächst

$$R = 4n(n-1)(n^2-n-2),$$
$$D = n(n-1)(2n^4-6n^3-n^2+4n+12),$$
$$\Delta = \tfrac{1}{2}S(S-1) - n(n-1)(15n^2-23n+5).$$

Ferner ergiebt sich

$$R + P = 8n^2(n-1)(2n-3),$$

mithin

$$P = 4n(n-1)(3n^2-5n+2).$$

Endlich hat man:

$$K = 2n(n-1)(4n-6)(5n-6).$$

Aus den Salmon'schen Formeln ergeben sich dann die folgenden Zahlen:

$$\beta = 4n(16n^3-73n^2+99n-42),$$
$$\gamma = 8n(n-3)[n^5-n^4+n^3-31n^2+58n-28],$$
$$t = \tfrac{2}{3}n[2n^8-12n^7+9n^6+41n^5-51n^4+349n^3-1550n^2+2052n-840],$$
$$\varrho = 2n[2n^6-8n^5+14n^4-33n^3+57n^2-44n+12],$$

aus denen die Werthe von h, k sich leicht berechnen lassen.

Es erübrigt noch die Untersuchung der *accessorischen Fläche.*

Bei der Bestimmung der Zahl $R + P$ ist zu beachten, dass die Discriminante $B^2 - 4AC$, wenn für λ sein Werth aus (vgl. § VIII.)

$$2(f_iF_i) + \lambda(F_i^2) = 0$$

eingesetzt wird, den Factor (fF) quadratisch enthält. Sondert man denselben aus, so bleibt ein Ausdruck, welcher homogen im zweiten Grade in Bezug auf (f_iF_i), (F_i^2) ist. Werden demgemäss die unbrauchbaren Lösungen entfernt, so erhält man

$$R + P = 8n(n-1)(2n-3)(7n-8),$$

mithin:

$$N = 2n(n-1)(5n-7),$$
$$S = 2n(n-1)(13n^2-31n+19),$$
$$R = 4n(n-1)(7n^2-18n+10),$$
$$P = 4n(n-1)(21n^2-56n+38),$$
$$D = n(n-1)(50n^4-190n^3+183n^2+36n-72),$$

$$J = 2n(n-1)(52n^2-144n+98),$$
$$\Delta = S(S-1) - N - 3J.$$

Zur Controle dieser Werthe bemerken wir, dass, entsprechend den $4n(n-1)(2n-3)(3n-4)$ pinch-planes der accessorischen Fläche die Cayley'sche Gleichung:

$$4N(N-2) - 8D - 11R - P - 8n(n-1)(2n-3)(3n-4) = 0$$

besteht.

Es hat keine Schwierigkeit, den Rang der Rückkehrcurve und damit die übrigen Singularitäten zu bestimmen, indem man von den erweiterten Formeln Gebrauch macht, welche Cayley an die Stelle der Salmon'schen gesetzt hat*).

XVI.

Zur Theorie einiger Complexe und Congruenzen.

Wir beabsichtigen nicht, im Folgenden eine vollständige Theorie einiger niederen Complexe und Brennflächen darzulegen. Es soll sich vielmehr nur darum handeln, aus den allgemeinen Untersuchungen der vorigen Paragraphen diejenigen Consequenzen zu ziehen, welche ohne Weiteres aus denselben hervorgehen.

1) Brennfläche der Congruenz [2, 1], $f=0$, $a_x=0$.

Ihre Gleichung in Liniencoordinaten wurde schon oben gegeben. Ordnung und Classe derselben ist 4, der Rang 12, die Charaktere ihrer ebenen Schnittcurve überhaupt die einer allgemeinen Curve vierter Ordnung, da eigentliche Doppel- und Rückkehrcurven nicht vorhanden sein können. Die Curve vierpunktiger Berührung ist 8^{ter} Ordnung und Classe, 24^{ten} Ranges, vom Geschlechte 5 mit 40 stationären Tangenten, sie ist der vollständige Berührungsschnitt einer Linienfläche 8^{ter} Ordnung mit der Brennfläche, deren Erzeugende vierpunktige Tangenten derselben sind. Diese Linienfläche enthält ausser der genannten Haupttangentencurve noch eine zweite 16^{ter} Ordnung und Classe, 40^{ten} Ranges, vom Geschlechte 5 mit 56 stationären Tangenten. Es giebt ferner eine Linienfläche 16^{ten} Grades, deren Erzeugende Wendekanten derjenigen Complexkegel zweiten Grades sind, deren Wendeebenen dem linearen Complexe gleichzeitig angehören. Da dann der Complexkegel sich in zwei ebene Strahlbüschel auflöst, von denen das eine dem linearen Complexe angehört, so besteht diese Linienfläche aus 16 ebenen Büscheln, deren Mittelpunkte 16 conische Knotenpunkte, deren Ebenen

*) Phil. Trans. a. a. O.

16 conische Doppelebenen der Brennfläche bestimmen. Die 16 Knotenpunkte liegen auf der Curve vierpunktiger Berührung.

Die Brennfläche ist überhaupt eine Kummer'sche Fläche vierter Ordnung und Classe. Sie wird von der singulären Fläche des Complexes zweiten Grades $f = 0$ in einer Curve achter Ordnung vom Geschlechte 5 berührt, welche die Curve vierpunktiger Berührung in 8 Punkten berührt.

Wenn der Complex $a_x = 0$ mit dem Complexe $f = 0$ in Involution liegt, so ist die Berührungscurve der Brennfläche mit der singulären Fläche zugleich eine gemeinsame Haupttangentencurve beider Flächen. Aus dem Umstande, dass sechs solcher linearen Complexe für f vorhanden sind, ergiebt sich demnach die Existenz von 6 Haupttangentencurven der singulären Fläche, deren Charakteristiken die oben angegebenen sind. Da dieselben zugleich vierpunktige Berührungscurven der singulären Fläche sind, so schneiden sich diese Haupttangentencurven gegenseitig in den Punkten, in denen sie stationäre Tangenten besitzen. Stellt demnach $\alpha_x = 0$ irgend einen der 5 anderen linearen Complexe vor, die ausser $a_x = 0$ mit f in Involution liegen, so bestimmen die Gleichungen

$$\begin{aligned} f &= 0, \\ F &= 0, \\ \alpha_x &= 0, \\ a_x &= 0 \end{aligned}$$

8 Punkte dieser Art auf den beiden Haupttangentencurven, die den linearen Complexen a_x, α_x entsprechen. Jede der 6 Haupttangentencurven der singulären Fläche schneidet daher irgend eine der anderen in 8 Punkten u. s. w.

2) Brennfläche der Congruenz [2, 2].

Sind überhaupt zwei Complexe gleichen Grades

$$f = 0, \quad \varphi = 0$$

gegeben, so wird durch den Complex

$$f - \lambda\varphi = 0 \tag{1}$$

jedem Punkte des Raumes ein Kegel zugeordnet, welcher zu dem durch $f = 0$, $\varphi = 0$ bestimmten Büschel gehört. Die Gleichung der Brennfläche in Punktcoordinaten ist die Bedingung, welche aussagt, dass die Complexkegel von f und φ sich berühren. Bekanntlich hat dann einer von den Kegeln $f - \lambda\varphi = 0$ die betreffende Berührungskante zur Doppelkante. Die Bedingung aber, dass der Kegel des Complexes (1) eine Doppelkante habe, führt auf die Gleichung seiner sin-

gulären Fläche*), welche demnach den Parameter λ im Grade $3(n-1)^2$ enthält. Durch jeden Punkt des Raumes gehen daher von den singulären Flächen des Complexsystems (1) $3(n-1)^2$ hindurch. Berühren sich aber Kegel der Complexe f und φ in einer Kante, so zählt dieselbe als Doppelkante von Kegeln aus dem Systeme $f - \lambda\varphi$ für zwei Lösungen. Daraus geht hervor, dass die Brennfläche von Punkten gebildet wird, durch welche zwei unendlich nahe singuläre Flächen des Systems hindurchgehen oder dass die Brennfläche von singulären Flächen dieses Systems eingehüllt wird (§ IV)**).

Für zwei Complexe zweiten Grades $f = 0$, $\varphi = 0$ ist nun die singuläre Fläche des Complexes (1) in Punktcoordinaten dargestellt durch:

$$S = \Delta + 3\lambda\Theta + 3\lambda^2\Theta' + \lambda^3\Delta' = 0, \tag{2}$$

$\Delta = 0$, $\Delta' = 0$ sind dabei die singulären Flächen der Complexe f und φ. Die Discriminante von (2)

$$4UV - W^2 = 0, \tag{3}$$

wo

$$U = \Delta\Theta' - \Theta^2,$$
$$V = \Delta'\Theta - \Theta'^2,$$
$$W = \Delta\Delta' - \Theta\Theta',$$

ist die Gleichung der Brennfläche in Punktcoordinaten und, wie es sein muss, von der 16ten Ordnung. Ihre Rückkehrcurve ist der gemeinschaftliche Schnitt der drei Flächen

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0,$$

also in der That vom 48ten Grade. Die beiden Berührungscurven der Brennfläche mit den singulären Flächen von $f = 0$, $\varphi = 0$ sind Curven 16ter Ordnung, bestimmt durch den Schnitt von

$$\Delta = 0, \quad \Theta = 0; \quad \Delta' = 0, \quad \Theta' = 0.$$

Von den beiden Complexkegeln, welche einem Punkte der Berührungscurven entsprechen, geht jedesmal der eine durch die Doppelkante des anderen. Die beiden Berührungscurven haben je 16 wirkliche Doppelpunkte, welche dadurch entstehen, dass die Flächen Θ, Θ' durch die Knotenpunkte von Δ, Δ' hindurchgehen. Die Plücker'schen Zahlen derselben wurden schon oben gegeben***).

Die Gleichung der singulären Fläche von (1) in Ebenencoordinaten ist dagegen:

---

*) Vgl. Clebsch, Math. Annalen Bd. V, S. 439.

**) Es braucht wohl kaum hinzugefügt zu werden, dass die Doppeldiscriminantenfläche von $f - \lambda\varphi = 0$ die Brennfläche von f und φ im Allgemeinen nur als reducibeln Theil enthält.

***) Vgl. § X.

(4) $$\Sigma = D + 3\lambda T + 3\lambda^2 T' + D'\lambda^3 = 0,$$

wo $D = 0$, $D' = 0$ die Gleichungen der Flächen $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$ in Ebenencoordinaten vorstellen. Die gemeinschaftliche Developpable der Discriminante von $\Sigma = 0$ und $D = 0$ enthält den reducibeln Theil $D = 0$, $T = 0$, welcher der singulären Fläche von f längs der Berührungscurve mit der Brennfläche umschrieben ist. In der That ist unmittelbar evident, dass jeder Punkt der Berührungscurve der Fläche Θ, jede zugehörige singuläre Ebene der Fläche T angehören muss.

Ausserdem schneidet jede der singulären Flächen die Brennfläche in einer Curve 32ter Ordnung, deren Punkte dadurch charakterisirt sind, dass der eine Complexkegel die eine Ebene des Paares berührt, in welches der andere Complexkegel degenerirt ist. Die Brennfläche schneidet die beiden singulären Flächen in 128 Punkten, die in zwei Gruppen von je 64 zerfallen, je nachdem der zerfallende Complexkegel des ersten Complexes durch die Doppelkante des zweiten geht oder umgekehrt.

Die Doppelcurve der Brennfläche ist von der 24ten Ordnung. Sie enthält keine dreifachen oder stationären Punkte, wie auch schon daraus ersichtlich ist, dass die beiden Kegel zweiten Grades sich weder in 3 Kanten berühren, noch osculiren und ausserdem einfach berühren können ohne zusammenzufallen. Dagegen giebt es $\beta = 80$ stationäre Punkte der Rückkehrcurve, in denen sich die Complexkegel überosculiren. Die Rückkehrcurve ist von der 48ten Ordnung mit 856 scheinbaren Doppelpunkten, 80 Spitzen, vom Range 304 u. s. w.

3) Die singuläre und die accessorische Fläche des Complexes zweiten Grades $f = a_{ik}x_ix_k = 0$.

Man erhält die Gleichung der singulären Fläche in Liniencoordinaten, wenn man aus den Gleichungen

$$f = a_{ik}x_ix_k = 0, \quad F = 0, \quad (x^2) = 0,$$
$$\varrho y_i = x_k a_{ik} + \mu x_i$$

die x eliminirt. Da $(y^2) = 0$, so kann man $F = 0$ weglassen und $f = 0$ durch $(xy) = 0$ ersetzen. Die Gleichung der singulären Fläche ist daher die Discriminante von:

(5) $$\begin{vmatrix} a_{ik} - \mu & y_i \\ y_i & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung (5) stellt, wenn y mit x vertauscht wird, eine Schaar von Complexen zweiten Grades mit dem Parameter μ vor, welche wir in der Form

(6) $$A_{ik}x_ix_k = 0$$

schreiben.

Alle Complexe dieser Schaar besitzen dieselbe singuläre Fläche. Man erhält nämlich die singuläre Fläche von (6) durch Elimination der x aus den Gleichungen:

$$\varrho y_i = \mu_1 x_i + A_{ik} x_k, \quad (x^2) = 0, \quad (xy) = 0.$$

Multiplicirt man die ersten 6 dieser Gleichungen der Reihe nach mit den 6 Reihen der Determinante

$$\Delta = |a_{ik} - \mu|,$$

so entsteht:

$$\varrho \Delta y_i a_{ik} - \mu y_k = \mu_1 [a_{ik} x_k - \mu x_k] + \Delta x_i.$$

Setzt man also statt

$$\frac{\Delta}{\mu_1} - \mu \text{ zur Abkürzung: } -\lambda,$$

so ist die Discriminante nach λ von

$$\begin{vmatrix} a_{ik} - \lambda & y_i a_{ik} - \mu y_k \\ y_k & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche letztere Gleichung ohne Weiteres in die Gleichung (5) übergeht, die Gleichung der singulären Fläche von (6); demnach identisch mit der des Complexes $f = 0$.

Die singuläre Fläche ist von der 4^ten^ Ordnung und Classe, 12^ten^ Ranges etc. Die Linienfläche der parabolischen und Rückkehrcurve ist vom Grade 32, sie besteht, wie man in der That an ihrer Gleichung:

$$f = 0, \quad F = 0, \quad F_i^2 - 4 F [a_{ik} F_i F_k + a_i (fF)] = 0,$$

nachweisen kann, aus 32 ebenen Büscheln, die sich zur Hälfte auf die 16 Knotenpunkte, zur anderen Hälfte auf die 16 Doppelebenen der singulären Fläche beziehen.

Insbesondere sind die 32 Geraden

$$f = 0, \quad F = 0, \quad (fF) = 0, \quad (F^2) = 0$$

Erzeugende derselben, die zugehörigen singulären Punkte Centra dieser Strahlfläche*). Man kann sich davon auf folgende Weise überzeugen. Wir betrachten den Complexkegel des durch die Gleichungen (7) bestimmten singulären Punktes, dessen Gleichung

$$y_i y_k f_{ik} = 0$$

ist. Setzt man statt y_i $x_i + \lambda f_i + \mu z_i$, unter der Voraussetzung, dass z eine Gerade ist, welche den Bedingungen

*) Die folgenden Untersuchungen über die singuläre Fläche des Complexes zweiten Grades sind zwar schon zum Theil von Plücker gegeben, doch schien die [illegible] gegebene Darstellung, welche von viel allgemeineren Gesichtspunkten [illegible] hier eine Stelle beanspruchen zu dürfen.

$$(zx) = 0, \quad (zf) = 0, \quad (zF) = 0$$

genügt, so ergiebt sich

$$(9)\quad \underset{y_i = x_i + \lambda f_i + \mu z_i}{y_i y_k f_{ik}} = f + 2\lambda[F + \mu(zf)] + \lambda\mu(zF) + \lambda^2(fF) + \mu^2(z_i z_k f_{ik})$$

$$= \mu^2(z_i z_k f_{ik}).$$

Die Gerade z geht nun entweder durch den gemeinschaftlichen Schnittpunkt der drei Geraden x_i, f_i, F_i oder x, ξ, η, den singulären Punkt von x. *Der Kegel des singulären Punktes besteht dann nach* (10) *aus dem Doppelbüschel in der singulären Ebene.* Oder die Gerade z liegt in der Ebene der drei genannten Geraden, der singulären Ebene von x, *die Complexcurve in derselben löst sich dann in ein Doppelbüschel auf.* Wir betrachten weiter den Complexkegel von F, dessen Gleichung

$$(10)\qquad \Sigma(y_k f_{ik})^2 = 0$$

ist. Derselbe hat x zur singulären Geraden, weil $(F^2) = 0$, er enthält ausserdem die Gerade f_i, da

$$\Sigma(f_k f_{ik})^2 = (F_i^2) = 0.$$

Dieser Kegel besteht also zum Theil aus einem ebenen Büschel, welches in der singulären Ebene liegt. Die Lage des zweiten ebenen Büschels erhält man, indem man den Strahl des Kegels (10) aufsucht, welcher die Coordinaten

$$z_i = f_i + \lambda F_i$$

hat. Man erhält durch Substitution von z_i an Stelle von y_i in (10)

$$(F_i^2) + 2\lambda(f_{ik} F_i F_k) + \lambda^2(F_k F_l f_{ik} f_{il}) = 0.$$

Der aus dieser letzteren Gleichung genommene Werth

$$\lambda = -\frac{2(f_{ik} F_i F_k)}{(F_k F_l f_{ik} f_{il})}$$

bestimmt die Lage des zweiten Büschels, *welches im Allgemeinen nicht in die singuläre Ebene hineinrücken kann, so lange die Gleichungen*

$$f = 0, \quad F = 0, \quad (fF) = 0, \quad (F^2) = 0, \quad (x^2) = 0, \quad (f_{ik} F_i F_k) = 0$$

*keine gemeinschaftliche Lösung besitzen**). Das dualistisch Entsprechende gilt für die Complexcurve von F in der singulären Ebene, falls die Geraden f, x, F in einer Ebene liegen.

Es sind sonach alle Linien des Büschels $x_i + \lambda f_i$ singuläre Linien des Complexes f. Wenn also die drei Geraden durch einen Punkt gehen, so entsprechen denselben unendlich viele singuläre Ebenen. Die singuläre Ebene, welche der Geraden x entspricht, ist durch die zugeordnete Gerade x_i bestimmt. Es wird daher der singulären Geraden

*) In diesem Falle hat der Complex die Gerade x zur Doppellinie, vgl. § XVII.

$$y_k = x_k + \lambda f_k$$

zugeordnet, sein die Gerade

$$z_k = f_k + \lambda F_k.$$

Aus der projectivischen Beziehung zwischen den Geraden y_k, z_k geht hervor, *dass ihre Verbindungsebenen, die singulären Ebenen einen Kegel zweiten Grades, den Tangentenkegel der singulären Fläche in ihrem conischen Knotenpunkte umhüllen.* Dieser Kegel berührt nur die Ebene (x, f) in der singulären Geraden, ein Umstand, welcher die genannte Gerade und Ebene als *Hauptelemente* auszeichnet.

Liegen dagegen x, f, F in einer Ebene, so bilden die singulären Punkte auf den singulären Geraden des Büschels $x_i + \lambda f_i$ einen Kegelschnitt, dessen Ebene Doppelebene der singulären Fläche ist und der die Gerade x in ihrem singulären Punkte berührt.

Die Haupttangentencurven der singulären Fläche, die Berührungscurven mit der accessorischen Fläche 12ter Ordnung und Classe sind, der ganzen Schaar von Complexen (6) entsprechend, welche die nämliche singuläre Fläche, aber verschiedene accessorische Flächen besitzen, Curven 16ter Ordnung und Classe, 48ten Ranges, vom Geschlechte 17 mit 96 stationären Tangenten, 16 stationären Punkten und Ebenen*). Die Linienfläche der singulären Haupttangenten ist jedesmal vom Grade 16, sie schneidet die singuläre Fläche ausser der Haupttangentencurve noch in einer Curve 16ter Ordnung vom Geschlechte 17 u. s. w.

Aus der Discriminante von (2) muss sich in diesem Falle der Factor Δ aussondern, da die singuläre Fläche ein reducibler Theil der totalen Brennfläche der Congruenz der singulären Linien ist. *Dementsprechend verschwindet*, wie man nachweisen kann, *die Invariante* Θ *identisch***). Die beiden Complexkegel von f und F haben daher für jeden Raumpunkt eine solche Lage, dass dem ersten umschriebene Dreiseite vorhanden sind, welche Polardreiseite von F sind, und es giebt eine Fläche vierter Ordnung $\Theta' = 0$, für welche auch eingeschriebene Dreikante dieser Art für den Complexkegel von f vorhanden sind.

Die Gleichung der accessorischen Fläche erhält hiernach die Form

$$S' = 4\,\Theta_1^3 + \Delta\Delta'^2 = 0,$$

sie berührt die singuläre Fläche in der Haupttangentencurve

$$\Delta = 0, \quad \Theta_1 = 0$$

und hat mit ihr keine weitere Curve gemeinsam.

---

*) Vgl. Klein und Lie, Monatsberichte der Berl. Akademie, Dec. 1870.

**) Diesen Satz haben Herr Pasch und ich gleichzeitig anderswo gegeben. Vgl. Göttinger Nachr., Juli 1873.

Die Rückkehrcurve der accessorischen Fläche ist der vollständige Schnitt der Flächen

$$\Delta' = 0, \qquad \Theta' = 0,$$

also vom 16. Grade. Die Rückkehrtangentialebene ist die Tangentialebene der singulären Fläche von $F = 0$.

Die Gleichung der accessorischen Fläche in Ebenencoordinaten ist dagegen:

$$4T'^3 + DD'^2 = 0.$$

Die parabolischen Ebenen derselben sind daher die gemeinschaftlichen Ebenen der Flächen $T' = 0$, $D' = 0$.

Der parabolische Punkt der accessorischen Fläche ist der Berührungspunkt der parabolischen Ebene mit der Fläche $D' = 0$, d. h. der singulären Fläche von F. Der parabolische Punkt fällt daher mit dem Rückkehrpunkte zusammen, *Rückkehrcurve und parabolische Curve der accessorischen Fläche sind identisch.*

Man kann diesen letzteren Satz analytisch folgendermassen erweisen.

Die singuläre Fläche des Complexes $F = 0$ berührt im allgemeinen die accessorische Fläche in einer Curve $8n(n-1)^2(2n-3)$ Grades, deren Geschlecht das der Linienfläche $f = 0$, $F = 0$, $(F^2) = 0$, also $4n(n-1)(2n-3)(7n-12)+1$ ist. Diese Curve hat für einen Complex zweiten Grades die ausgezeichnete Eigenschaft, zugleich die vollständige parabolische und Rückkehrcurve der accessorischen Fläche zu bilden.

Es lässt sich in der That zeigen, dass für $n = 2$ die Discriminante

$$B^2 - 4AC = 0$$

der Haupttangentengleichung der accessorischen Fläche

$$\mu^2 A + \mu B + C = 0 \quad (\S\ \text{VII, 10})$$

im Wesentlichen nur durch die Gleichung $(F^2) = 0$ erfüllt werden kann.

Man hat nämlich, da $\varphi = F$,

$$\varphi_i = F_i = f_{mi} f_m,$$

also für $n - 1 = m - 1 = 1$

$$\begin{aligned} \varphi_{ik} = F_{ik} &= f_{mi} f_{mk}, \\ F_{ik} f_i f_k &= (F_k^2), \\ F_{ik} F_k f_i &= F_k F_i f_{ik}. \end{aligned}$$

Daher ist zunächst:

$$C = \frac{1}{\lambda^2} \begin{vmatrix} f_{ik} + \lambda \varphi_{ik} & f_i & x_i \\ f_i & 0 & 0 \\ x_i & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man die Determinante rechter Hand mit Q, so ist

$$-Q\lambda = \begin{vmatrix} \lambda f_{ik}+1 & 0 & x_i \\ 0 & 1 & 0 \\ x_i & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{ik} & x_i & 0 \\ x_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = RS.$$

Die beiden Factoren, in welche wir Q zerlegt haben, lassen sich leicht bestimmen. Es ist

$$S = f_{ik}F_iF_k + \alpha_4(f_iF_i),$$

$$R = \left[\lambda^5((f_{ik}F_iF_k) + \alpha_4(fF)) - \lambda^4(F^2) + \lambda^3(fF)\right] \quad (\S\ \text{II, 14}).$$

Demnach:

$$-C = \left[f_{ik}F_iF_k + \alpha_4(fF)\right]\left[\lambda^2[f_{ik}F_iF_k + \alpha_4(f_iF_i)] - \lambda(F^2) + (fF)\right].$$

Ferner

$$B = -(fF)(F^2) + \lambda(F^2) - \lambda[2(f_{ik}F_iF_k) - \gamma(fF)](fF),$$

wo

$$\gamma = \Sigma F_{ii},$$

$$\alpha_4 = -\tfrac{1}{2}\Sigma F_{ii} = -\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Endlich ist

$$A = -(fF)^2.$$

Setzt man noch $2f_{ik}F_iF_k - \gamma(fF) = T$, so erhält man

$$B^2 - 4AC = [\lambda(F^2) - (fF)]^2\,[(F^2)^2 - 2T(fF)].$$

Aus dieser Entwickelung geht hervor, dass erstens die Linienfläche

$$f = 0, \quad F = 0, \quad (F^2)^2 - 2T(fF) = 0,$$

parabolische oder Rückkehrpunkte der accessorischen Fläche bestimmt. Diese Fläche ist aber dieselbe, welche die analogen Curven auf der singulären Fläche ausschneidet, sie besteht also aus 32 ebenen Büscheln, welche die singulären Punkte auf den 32 pinch-lines der accessorischen Fläche zu Mittelpunkten haben. Diese Punkte gehören daher in einem besonderen Sinne den genannten Curven auf der letzteren Fläche an*).

Der andere Factor von $B^2 - 4AC$ reducirt sich für bestimmte Werthe von λ immer auf $(fF)^2$, (fF) ist übrigens als der Frage fremd von vornherein auszusondern. Setzt man dagegen $\lambda = \infty$, oder was auf dasselbe herauskommt, in der Gleichung

$$\mu^2 A + \mu B + C = 0$$

$\mu = \frac{\mu'}{\nu}$, $\lambda = \frac{\lambda'}{\nu}$ und dann $\nu = 0$, $\lambda' = 1$, so reducirt sich B und C auf die Werthe

$$B = -(fF)T,$$

$$C = -\tfrac{1}{4}T^2,$$

wenn gleichzeitig $(F^2) = 0$ gesetzt wird, was durch $\lambda = \infty$ bedingt ist.

---

*) Vgl. das Folgende.

Dann ist aber $B^2 - 4AC = 0$, womit der angegebene Satz bewiesen ist.

Bei der Bestimmung der Zahl P im § XV. ist vorausgesetzt, dass Rückkehr und parabolische Curve verschieden sind. Für den Fall $n=2$ haben daher die dort gegebenen Formeln für P keine Gültigkeit. Im allgemeinen Falle scheint jedoch eine specielle Beziehung beider Curven zu einander nicht vorhanden zu sein.

Die gemeinschaftlichen Punkte der Flächen $\Delta=0$, $\Delta'=0$, $\Theta'=0$ reduciren sich vierfach zählend auf die 16 Knotenpunkte der singulären Fläche, sie correspondieren der einen Hälfte singulärer Punkte, welche auf den 32 ausgezeichneten Geraden (7) liegen. *Sie sind pinch-points der accessorischen Fläche und Spitzen der gemeinsamen Haupttangentencurve dieser Fläche mit der singulären. Sie sind aber zugleich dreifache uniplanare Knotenpunkte der accessorischen Fläche, Ebene des Knotens ist die Tangentialebene der Fläche* $\Theta' = 0$. *Das dualistisch entsprechende gilt für die gemeinschaftlichen Ebenen der Flächen* $D=0$, $D' = 0$, $T' = 0$. *Sie sind stationäre Ebenen der Haupttangentencurve, pinch-planes der accessorischen Fläche, aber der singuläre Punkt auf der pinch-line ist dreifach zu zählender Berührungspunkt einer dreifachen Ebene dieser Fläche.*

Wir bemerken noch, dass jede Doppelebene der singulären Fläche 6 Knotenpunkte der letzteren enthält. Auf dem Berührungskegelschnitt der Doppelebene (einer parabolischen Curve der singulären Fläche, welche hier in eine aus 16 Kegelschnitten bestehende Curve 32^{ter} Ordnung, 32^{ten} Ranges zerfällt) liegt das Centrum des Doppelbüschels von Strahlen, in welches die Complexcurve degenerirt ist. In demselben ist die Doppelebene stationäre Ebene der Haupttangentencurve, welche also in der That dieser Ebene in $4 + 2 \cdot 6 = 16$ Punkten begegnet, wie es ihrer Ordnung gemäss der Fall sein muss.

4) Die Brennfläche [3, 1].

Ihre Gleichung in Punktcoordinaten, welche von Clebsch gegeben ist, lässt keine Singularitäten ohne Weiteres erkennen*). Die Fläche ist zwölfter Ordnung und Classe, 42^{ten} Ranges. Der Tangentenkegel derselben hat 675 Doppel-, 120 Rückkehrkanten, er begegnet der Rückkehrcurve 30^{ten} Grades in 150 Punkten. Diese letztere Curve ist 240^{ten} Ranges mit 315 scheinbaren Doppelpunkten. Stationäre Punkte derselben sind, wie überhaupt eine Doppelcurve, nicht vorhanden, was a priori ersichtlich ist.

*) Clebsch, Math. Annalen, Bd. V, S. 437.

Die *Complexfläche* [3 1] hat dagegen eine 6-fache Gerade, 24 pinchpoints und pinch-planes, ihre übrigen Charakteristiken sind
$N=12$, $S=39$, $R=21$, $D=0$, $P=81$, $K=132$, $\beta=\gamma=t=0$.

5) Die singuläre Fläche und die Singularitäten des Complexes dritten Grades.

Der Complex dritten Grades besitzt keine eigentliche *Undulationsfläche.* Die Congruenz der *Undulationskanten* ist hier vom Grade $6(11\cdot 3-18)=90$. Der Complexkegel mit Undulation zerfällt aber in einen Kegel zweiten Grades und ein ebenes Büschel, das letztere muss daher der genannten Congruenz ganz angehören. *Demnach besteht die Congruenz der Undulationskanten aus lauter ebenen Büscheln, deren Mittelpunkte eine Curve 90ter Ordnung, deren Ebenen eine Developpabele 90ter Classe bilden.* Diese Curve ist zugleich eine Doppelcurve der singulären Fläche, da der Kegel mit Undulation zwei Doppelkanten enthält; die genannte Developpabele ist die Doppeldeveloppabele der nämlichen Fläche.

Ueberhaupt ergiebt sich aus den allgemeinen Formeln des § XV.
$N=24$, $S=84$, $D=90$, $R=96$, $P=336$, $K=648$, $J=276$,
$\Delta=3060$, $\beta=360$, $\gamma=0$, $t=120$, $\varrho=900$, $h=3696$.

Die singuläre Fläche ist also von der 24ten Ordnung und Classe, 84ten Ranges, ihre ebene Schnittcurve 24ter Ordnung, 84ter Classe, mit 3060 Doppel-, 276 Wendetangenten, 96 Rückkehr-, 90 Doppelpunkten. Die Rückkehrcurve ist 96ter Ordnung mit 360 Spitzen, 3696 scheinbaren Doppelpunkten 648ten Ranges etc., was in der That der Schnittcurve zweier Flächen 8ter und 12ter Ordnung entspricht, durch welche nach Clebsch diese Curve dargestellt werden kann. Die parabolische Curve ist 336ter Ordnung.

Die stationären Punkte der Rückkehrcurve entsprechen Complexkegeln, welche aus einer Ebene und einem sie berührenden Kegel zweiten Grades bestehen. Dem entsprechend besteht die Complexcurve in den 360 parabolischen stationären Ebenen aus einem Strahlbüschel und einem Kegelschnitt, der durch das Centrum des ersteren geht.

Die Doppelcurve enthält keine stationären Punkte γ. Es ist dies a priori daraus schon zu ersehen, dass der Complexkegel dritten Grades nicht gleichzeitig eine Doppel- und Rückkehrkante erhalten kann.

Für die 120 dreifachen Punkte der Doppelcurve löst sich der Complexkegel in drei ebene Büschel auf, dem entsprechend für die 120 Tritangentialebenen der singulären Fläche die Complexcurve in drei Curven erster Classe.

Einem Punkte A der Doppelcurve entspricht als Complexkegel dritten Grades ein von A ausgehendes Büschel in der Ebene a und ein Kegel zweiten Grades. Wir bezeichnen die beiden Gebilden gemein-

samen Geraden durch $\alpha_1\alpha_2$, sie gehören zugleich dem Complexkegel von F an, da sie singuläre Linien des Complexes f sind. Der Punkt A ist ihr gemeinsamer singulärer Punkt; die zugehörigen singulären Ebenen die vierten harmonischen zur Tangentialebene des Kegels zweiter Ordnung in den Kanten $\alpha_1(\alpha_2)$ der Ebene a und der Tangentialebene des Complexkegels von F. Der Durchschnitt der beiden singulären Ebenen bestimmt die Richtung der Doppelcurve im Punkte A. In der Ebene a liegen noch zwei singuläre Linien β_1, β_2, welche die Complexcurve 4ter Classe von F in zwei Punkten c_1, c_2 berühren. Sie berühren zugleich die Complexcurve von f, welche aus dem Büschel A und einem Kegelschnitte besteht, in den Punkten d_1, d_2. Die vierten harmonischen Punkte zu $Ad_1(d_2)\beta_1(\beta_2)$ sind die beiden singulären Punkte auf den Geraden β, β_2, d. h. die Berührungspunkte der Doppelebene a mit der singulären Fläche.

Diese Beziehungen bleiben unverändert auch für die dreifachen Punkte der Doppelcurve. Die drei Büschel mit den Durchschnittskanten $a_1a_2a_3$, in welche der Complexkegel von f für den dreifachen Punkt A zerfällt, sind drei Doppelebenen der Fläche, deren Berührungspunkte vermittelst der in ihnen liegenden Complexcurve durch die eben gegebene Construction gefunden werden können. Die doppeltzählenden drei Geraden $a_1a_2a_3$ machen mit den beiden anderen singulären Linien, welche in jeder der drei Doppelebenen liegen, gerade die 12 singulären Geraden aus, welche durch jeden Punkt des Raumes hindurchgehen.

In einer dreifachen Ebene a liegen die drei ausgezeichneten Punkte $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, in welche die Complexcurve dritter Classe degenerirt ist. Sie sind Punkte der Doppelcurve der singulären Fläche, aber *nicht* Berührungspunkte der dreifachen Ebene mit derselben. Diese liegen vielmehr auf den Verbindungsgeraden der Punkte $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ und zwar jedesmal als vierte harmonische Punkte zu den Paaren $[\alpha_1\alpha_2]$, $[\alpha_2\alpha_3]$, $[\alpha_3\alpha_1]$ und den Berührungspunkten der Complexcurve von F mit den gleichnamigen Verbindungslinien.

Die Berührungscurve der accessorischen Fläche mit der singulären Fläche ist von der 180ten Ordnung, vom Geschlechte 481 etc. Von den beiden Tangentialebenen des Complexkegels dritten Grades coincidirt die eine mit der singulären Ebene. Diese Ebene wird zur Undulationsebene des Complexkegels, wenn die Gleichungen

$$f=0,\quad F=0,\quad (fF)=0,\quad f_if_kf_lf_{ikl}=0$$

bestehen, d. h. für 720 Punkte dieser Berührungscurve. Diese Punkte gehören der Doppelcurve an, und die Undulationsebene ist eine Doppelebene der singulären Fläche, deren einer Berührungspunkt mit derselben der betreffende Punkt der Doppelcurve selbst ist*).

*) Ausser diesen 720 Punkten existiren weitere Punkte, welche der Berüh-

6) Die Brennfläche [4 1].

Ihre Gleichung in Punkt- oder Ebenencoordinaten ist von Clebsch in der Form $i^3 - 6j^2 = 0$ gegeben, wo $i = 0$, $j = 0$ Flächen 8^{ter} resp. 12^{ter} Ordnung sind. Aus den oben entwickelten allgemeinen Formeln geht hervor, dass die Fläche 24^{ter} Ordnung und Classe, 104^{ten} Ranges ist. Sie enthält eine Rückkehrcurve 96^{ter} Ordnung, 768^{ten} Ranges, mit 3696 scheinbaren Doppelpunkten und 320 Spitzen, was mit den Charakteren einer vollständigen Schnittcurve der Flächen i und j übereinkommt. Die Doppelcurve ist 80^{ter} Ordnung, sie enthält selbstverständlich weder dreifache noch stationäre Punkte.

7) Der Complex vierten Grades.

Seine Undulationsfläche ist von der 160^{ten} Ordnung. Seine Singularitäten und die seiner singulären Fläche sind durch die Formeln:

$$R = 480,\ N = 72,\ K = 3360,\ D = 1680,\ P = 1440,\ J = 1200,$$
$$S = 312,\ \beta = 3360,\ \gamma = 17280,\ t = 13760,\ \varrho = 17760$$

gegeben.

XVII.

Ueber Doppellinien eines Complexes.

Wenn die Gleichungen

$$f_i = \varrho x_i, \qquad i = 1, 2, \cdots 6 \tag{1}$$

für eine Gerade des Complexes $f = 0$ bestehen, so ist dieselbe eine *Doppellinie* desselben*) Alle Kegel des conischen Polarcomplexes, welche den Punkten von x entsprechen, zerfallen in Ebenenpaare, alle Complexkegel von $f = 0$ längs der nämlichen Geraden haben also Doppelkanten. Das Bestehen der Gleichungen (1) erfordert eine Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten von f. Für den Complex zweiten Grades kann dieselbe ausgedrückt werden durch das Verschwinden der Discriminante von:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\mu & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22}-\mu & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\mu & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\mu & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}-\mu & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66}-\mu \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

---

rungscurve mit der accessorischen Fläche und der Doppelcurve gemein sind. Sie sind durch die Bedingung bestimmt, dass die nicht singuläre Tangentialebene des Complexkegels Undulationsebene wird.

*) Plücker, N. G. S. 296.

Der Complex zweiten Grades $f = a_{ik}x_ix_k = 0$ hat daher eine, zwei oder drei Doppellinien, je nachdem die Gleichung (2) ein, zwei oder drei Wurzelpaare besitzt.

Man kann übrigens die Gleichungen (1) zu denen noch $(x^2) = 0$, $f = 0$ hinzu treten, ersetzen durch das äquivalente System von 6 Gleichungen, aus welchen ϱ eliminirt ist:

$$(x^2) = 0, \quad f = 0, \quad F = 0, \quad (fF) = 0, \quad (F^2) = 0, \quad (F_iF_kf_{ik}) = 0.$$

Aus denselben ersieht man sofort, dass ein in der kanonischen Form

$$k_ix_i^2 = 0$$

darstellbarer Complex zweiten Grades eine Doppellinie enthält, wenn irgend zwei der Coefficienten k_i gleich sind,

Wenn überhaupt der m^{te} Polarcomplex von der Form

$$\Delta^m = (xy)\psi \tag{3}$$

ist, so ist auch

$$\Delta^{m-1} = \left(x\frac{\partial\Delta}{\partial y}\right) = (xy)\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right).$$

In der Entwickelung von $f(x+\lambda y)$ verschwinden daher für $(xy)=0$ alle Coefficienten von λ^0 bis λ^m inclusive. *Die Gleichung* (3) *ist daher die Bedingung einer* $m+1$*-fachen Complexgeraden.*

Es sei die Gerade x_0 eine Doppellinie des Complexes $f = 0$. Gehört sie zugleich dem Complexe $\varphi = 0$ an, so ist sie eine Gerade auf der Brennfläche der Congruenz $f = 0$, $\varphi = 0$. *Sie ist aber in diesem Falle im allgemeinen sowohl Doppelstrahl als Doppelaxe der Fläche.* Wir erweisen dies folgendermassen:

Es werde unter y eine Gerade verstanden, welche die Doppelgerade x_0 schneidet. Die Zahl der Schnittpunkte von y mit der Brennfläche, respective die der Tangentialebenen durch y an dieselbe, ist bestimmt durch die gemeinsamen Lösungen x der Gleichungen:

$$\begin{aligned}(yx) &= 0,\\ f &= 0,\\ \varphi &= 0,\\ (x^2) &= 0,\\ \psi = (f^2)(\varphi y)^2 + 2(f\varphi)(\varphi y)(fy) + (\varphi^2)(fy)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Wir betrachten die Linienfläche der Complexe $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Da

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)_{x=x_0} = 0,$$

so ist die Gerade x_0 eine vierfache Erzeugende derselben, also $x=x_0$ eine vierfach zählende Lösung der Gleichung, womit unter Voraussetzung dualistischer Vertheilung unser Satz bewiesen ist.

Eine Doppellinie des Complexes f ist auch Doppellinie des Complexes $F = 0$, wie sich sofort aus den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i f_{ik} = f_i = \varrho x_i$$

ergiebt. *Sie zählt daher vierfach in der Congruenz der singulären Linien.* Daraus ergiebt sich, *dass die Doppelgerade auch Doppelstrahl und Doppelaxe der singulären Fläche ist*, wie sich übrigens auch aus der Betrachtung der Gleichungen:

$$f = 0, \quad F = 0, \ (yf) = 0, \quad (yx) = 0, \quad (x^2) = 0,$$

deren drei erste eine Linienfläche mit vierfacher Generatrix x_0 repräsentiren, ergiebt.

Auf dieselbe Weise findet man, dass die Doppelgerade auch Doppelelement der accessorischen Fläche ist.

Göttingen, im Juli 1874.

Beweis eines Satzes über rationale Curven.

Von J. Lüroth in Karlsruhe.

Wenn die Coordinaten eines Punktes einer Curve sich darstellen lassen als rationale Functionen eines Parameters λ, so entspricht stets jedem Werth von λ nur ein Punkt der Curve, dagegen braucht nicht immer jedem Punkt der Curve nur ein Werth von λ zu entsprechen, wie das Beispiel der Gleichungen $x = \lambda^2$, $y = \frac{1}{\lambda^2}$ zeigt.

Wenn nun jedem Punkt einer rationalen Curve n Werthe von λ entsprechen, so kann man stets für λ eine neue Variable so einführen, dass deren Werthe und die Punkte der Curve sich gegenseitig eindeutig entsprechen.

Um dies zu beweisen, seien, unter f, φ, ψ ganze Functionen verstanden,

$$x = \frac{f(\lambda)}{\psi(\lambda)}, \quad y = \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)} \tag{1}$$

die Ausdrücke der Coordinaten. Der Annahme nach entspricht einem unbestimmten $\lambda = \lambda_1$ ein Punkt der Curve und diesem wieder eine Gruppe von n Werthen des Parameters, zu welcher λ_1 selbst gehört, während die übrigen $\lambda_2, \lambda_3, \cdots \lambda_n$ seien, die natürlich Functionen von λ_1 sein werden.

Dann bestehen die Gleichungen

$$\frac{f(\lambda_1)}{\psi(\lambda_1)} = \frac{f(\lambda_i)}{\psi(\lambda_i)}, \quad \frac{\varphi(\lambda_1)}{\psi(\lambda_1)} = \frac{\varphi(\lambda_i)}{\psi(\lambda_i)},$$

$$(\text{für } i = 2, 3, \cdots n),$$

welche zeigen, dass die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} f(\lambda)\,\psi(\lambda_1) - f(\lambda_1)\,\psi(\lambda) = 0, \\ \varphi(\lambda)\,\psi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_1)\,\psi(\lambda) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

durch $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ gleichzeitig erfüllt werden. So lange λ_1 unbestimmt ist, können diese n Werthe nur einfache Wurzeln beider Gleichungen sein. Wäre nämlich das unbestimmte λ_1 mehrfache Wurzel, so müssten die Gleichungen

$$f'(\lambda_1)\psi(\lambda_1) - \psi'(\lambda_1) f(\lambda_1) = 0,$$
$$\varphi'(\lambda_1)\psi(\lambda_1) - \psi'(\lambda_1)\varphi(\lambda_1) = 0$$

bestehen, die

$$\frac{f(\lambda_1)}{\psi(\lambda_1)} = \text{Const.}, \qquad \frac{\varphi(\lambda_1)}{\psi(\lambda_1)} = \text{Const.}$$

liefern würden, was nicht möglich ist. Wäre aber z. B. λ_2 eine mehrfache Wurzel, so müsste

$$\frac{f'(\lambda_2)}{\psi'(\lambda_2)} = \frac{f(\lambda_1)}{\psi(\lambda_1)} = \frac{f(\lambda_2)}{\psi(\lambda_2)}$$

sein für jedes λ_1, oder (weil λ_2 eine Function von λ_1 ist, die jeden beliebigen Werth annehmen kann) für jedes λ_2. Dann gilt aber das vorhin Bemerkte.

Somit müssen die linken Seiten der Gleichungen (2) durch das Product $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$ theilbar sein. Aus der Annahme, dass jedem Punkte der Curve nur n Werthe von λ entsprechen sollen, folgt aber, dass dieses Product der grösste gemeinsame Theiler der Functionen auf der linken Seite in den Gleichungen (2) sein muss. Daher kann man eine ganze Function von λ und λ_1 $\Psi(\lambda, \lambda_1)$ auf die bekannte Art finden, welche diese beiden Functionen theilt und sich vom obigen Product höchstens durch einen von λ unabhängigen Factor unterscheidet. Weil bei Vertauschung von λ mit λ_1 die beiden Functionen, deren grösster gemeinsamer Theiler $\Psi(\lambda, \lambda_1)$ ist, nur ihr Zeichen ändern, muss $\Psi(\lambda, \lambda_1)$ auch in Bezug auf λ_1 vom n^{ten} Grade sein, kann also

$$= \varphi_0(\lambda_1)\lambda^n + \varphi_1(\lambda_1)\lambda^{n-1} + \cdots + \varphi_n(\lambda_1)$$

gesetzt werden, wobei die ganzen Functionen $\varphi_i(\lambda_1)$ höchstens vom n^{ten} Grade sind.

Da nun die Gleichung $\Psi(\lambda, \lambda_1) = 0$ die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ hat, ist der Quotient je zweier Coefficienten $\frac{\varphi_i(\lambda_1)}{\varphi_k(\lambda_1)}$ einer symmetrischen Function von $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ gleich, so dass

$$\frac{\varphi_i(\lambda)}{\varphi_k(\lambda)} = \mu_{ik} \tag{3}$$

denselben Werth hat für die n Werthe $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ von λ, welche einem Punkte der Curve entsprechen. Von den beiden Functionen φ_i und φ_k kann keine von höherem als dem n^{ten} Grade sein; eine davon muss aber sicher diesen Grad haben, wenn der Quotient beider nicht constant ist, weil er sonst nicht für n Werthe des Argumentes λ denselben Werth annehmen könnte. Ist folglich μ_{ik} gegeben, so liefert (3) n Werthe von λ und zwar solche, die einem Punkte der Curve entsprechen. *Diese Grössen μ_{ik} haben also die Eigenschaft, dass jedem*

Punkte der Curve ein Werth von μ_{ik} und jedem μ_{ik} wieder ein Punkt der Curve entspricht.

Hiermit ist der im Anfang erwähnte Satz bewiesen, für den mir bis jetzt kein Beweis bekannt war.

Seien z. B. die Gleichungen gegeben

$$x = \frac{(\lambda^2+1)^2}{\lambda^4+3\lambda^2+1}, \quad y = \frac{\lambda(\lambda^2+1)}{\lambda^4+3\lambda^2+1},$$

so findet sich die Function Ψ

$$= \lambda^2\lambda_1 - \lambda(\lambda_1{}^2+1) + \lambda_1.$$

Daher ist

$$\mu_{10} = -\frac{\lambda^2+1}{\lambda}, \quad \mu_{20} = 1, \quad \mu_{21} = -\frac{\lambda}{\lambda^2+1},$$

so dass man μ_{10} und μ_{21} als neue Variable einführen kann.

Es ergiebt sich so

$$x = \frac{1}{\mu_{21}^2+1}, \quad y = \frac{-\mu_{21}}{\mu_{21}^2+1}.$$

Karlsruhe, im Februar 1875.

Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve.

Von M. Nöther in Erlangen.

In der *Theorie der singulären Werthsysteme einer algebraischen Function* einer Variabeln ist, rein algebraisch betrachtet, durch die Puiseux'schen Reihenentwickelungen*) in sofern ein Abschluss vorhanden, als die Discussion des Verhaltens der Function in der Nähe eines solchen Werthsystems in allen Fällen gewonnen ist. Geometrisch sind für die der Function entsprechende *algebraische Curve* bisher nur aus diesen Reihenentwicklungen durch Hrn. Cayley**) einige numerische Beziehungen, auf einem theilweise hypothetischen Wege, abgeleitet worden.

Aber man hat an eine Theorie der singulären Werthsysteme weitergehende Anforderungen zu stellen. Man kann zunächst, was das Puiseux'sche Verfahren nicht ist, eine allgemein gültige *analytische Methode* zur Aufstellung der Reihenentwicklungen verlangen. Man muss ferner fordern, dass die hierbei angewandten Begriffe sich auch geometrisch entwickeln lassen und überhaupt zu einer *Definition der singulären Punkte* einer Curve führen. Es wird endlich nothwendig, dass dieser selbe Gedankengang auch die Untersuchungen, in welchen vor Allem die singulären Werthsysteme auftreten, direct erledigt, ohne dass man bis zu den fertigen Reihenentwicklungen selbst vorzuschreiten hätte; also insbesondere die Untersuchung der Resultante, welche bei der Elimination einer Variabeln aus zwei speciellen Gleichungen entsteht; ferner die Erweiterung der Plücker'schen Gleichungen mit Hülfe der erwähnten Definition der singulären Punkte, deren Verhalten bei rationaler Transformation, etc.

In einer in den „Göttinger Nahrichten" vom Jahre 1871***) veröffentlichten Note habe ich angegeben, wie man die *Theorie der eindeutigen Transformationen* benutzen kann, um eine ausreichende Definition der singulären Werthsysteme zu erhalten und damit den im

*) Liouville's Journal t. 15 u. 16.

**) Quarterly Journal of Mathem., t. 7, 1866, und J. Crelle-Borch. t. 64, p. 369.

***) p. 267: „Ueber die algebraischen Functionen", Note 2.

Vorhergehenden gestellten Anforderungen an eine Theorie derselben zu genügen. Nach dieser Definition besteht ein singulärer Punkt aus einer endlichen Anzahl *vielfacher* Punkte, die nur in bestimmten Richtungen unendlich nahe an einander gerückt sind, aber so, dass hierdurch kein Punkt von höherer Ordnung der Vielfachheit entsteht. Durch die hier folgende Ausführung dieser Methode soll zunächst die Beschränkung aufgehoben werden, welche sich frühere, geometrische und algebraisch-functionentheoretische, Untersuchungen durch Ausschliessung der singulären Punkte aufgelegt haben, und welche in der That ohne wesentliche Modification der Betrachtungen derselben fallen gelassen werden kann*).

Derselbe Gedanke, die Benutzung successiver, wenn auch specieller, Transformationen ist für die *erste* der obigen Anforderungen, das analytische Verfahren der Reihenentwicklungen, auch von Hrn. Hamburger**) 1871 durchgeführt, und ferner von Hrn. Königsberger angegeben und später ausgeführt***) worden†). Ich werde daher die rein algebraischen Betrachtungen nur bis zu diesen Entwicklungen hinführen, jedoch in einer Form, dass sich dieselben, wie im § 6. geschieht, direct in die Geometrie übertragen lassen. Einige Punkte der Theorie der singulären Werthsysteme sind mit Hülfe quadratischer Transformationen inzwischen auch durch Hrn. De la Gournerie (Comptes rendus 1873) und Hrn. Darboux (Comptes rendus 1874) behandelt worden.

Ich bemerke noch, dass ich eine weitere, in dem Obigen nicht enthaltene Frage in der Theorie der singulären Werthsysteme, die nach den *gestaltlichen* Eigenschaften der Curve in der Nähe des singulären Punktes unter den verschiedenen *Realitätsbedingungen*, als den vorliegenden Betrachtungen ferne stehend, beiseite lasse.

§ 1.

Der Gedanke, welchen wir einer Theorie der singulären Werthsysteme einer algebraischen Function zu Grunde legen, besteht darin, dass man durch einfache rationale Transformationen der die Function

*) Für die Verhältnisse der rationalen Transformation ist dieses schon früher in mehreren Arbeiten geschehen. Siehe Brill u. Nöther: „Ueber die algebr. Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie", Math. Annalen Bd. VII, ferner Nöther: „Ueber die eindeutigen Ebenentransformationen", Math. Ann. Bd. V, etc.

**) „Ueber die Entwicklung algebr. Functionen in Reihen", Zeitschr. für Mathem. u. Phys. XVI, 1871.

***) „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen." Abschnitt über die algebr. Functionen.

†) Während des Druckes des vorliegenden Aufsatzes ist eine weitere Darlegung dieser Entwicklungen erschienen: Stolz, „Ueber die singul. Punkte der algebr. Functionen und Curven", Math. Annalen Bd. VIII.

definirenden Gleichung zwischen zwei Variabeln eine solche Gleichung erhalten kann, in welcher die bezügliche Singularität aufgelöst ist.

Man transformire die gegebene Gleichung

$$f(x, y) = 0,$$

für welche $x = a$, $y = b$ ein singuläres Werthsystem sei, rational in eine zweite

$$f^{(1)}(x_1, y_1) = 0,$$

vermittelst Ausdrücke der Form:

$$x_1 = \frac{\varphi(x, y)}{\chi(x, y)}, \qquad y_1 = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)},$$

wo die φ, ψ, χ ganze Functionen von x, y sein sollen, welche für $x = a$, $y = b$ verschwinden. Wir wollen dabei voraussetzen, dass nicht zugleich

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial x}$$

für $x = a, y = b$ verschwinden.

Hierbei entsprechen sich die Werthsysteme (x, y) von f und (x_1, y_1) von $f^{(1)}$ eindeutig, einzelne ausgenommen. Sei insbesondere $(x = a, y = b)$ ein k-faches Werthsystem von f, d. h. seien die Glieder niedrigster Dimension von f, in $x - a$ und $y - b$,

$$f_k(x - a, y - b)$$

von der k^{ten} Ordnung, und seien zunächst die aus $f_k(x - a, y - b) = 0$ für $\frac{y-b}{x-a}$ folgenden k Werthe von einander verschieden und mit $\left(\frac{y-b}{x-a}\right)_i$ bezeichnet. Man erhält dann durch die Ausdrücke

$$a_{1i} = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(\frac{y-b}{x-a}\right)_i}{\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)\left(\frac{y-b}{x-a}\right)_i}, \qquad b_{1i} = \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{y-b}{x-a}\right)_i}{\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)\left(\frac{y-b}{x-a}\right)_i},$$

$$(i = 1, 2, \cdots k),$$

wo $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$ den Werth von $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ für $x = a$, $y = b$ bedeutet etc., dem k-fachen Werthsysteme von f entsprechend, k Werthsysteme (x_1, y_1) von $f^{(1)}$, welche vermöge unserer Voraussetzungen alle von einander verschieden werden. Man kann ferner leicht erreichen, dass dieselben auch *nur* dem k-fachen Werthsysteme und nicht zugleich einem andern von f entsprechen. Man hat hierzu nur die Functionen φ, ψ, χ so zu bestimmen, dass den 3 Gleichungen

$$f = 0, \quad \varphi - a_{1i}\chi = 0, \quad \psi - b_{1i}\chi = 0,$$

welche für $(x=a,\ y=b)$ und für $(x=a+da,\ y=b+db)$, wo $\frac{db}{da}=\left(\frac{y-b}{x-a}\right)_i$, erfüllt werden, durch kein weiteres gemeinsames Werthsystem (x, y) genügt wird. Die Werthsysteme (a_{1i}, b_{1i}) werden alsdann auf $f^{(1)}$ *einfache* sein, in welchen $f^{(1)}$ nun keine Singularität zeigt; sie bilden, mit ihren benachbarten, k getrennte Reihen von Werthsystemen von $f^{(1)}=0$, welchen ebensoviele getrennte Werthreihen um $(x=a, y=b)$ von $f=0$ entsprechen.

Wenn die Wurzeln von $f_k(x-a, y-b)=0$ nicht alle von einander verschieden sind, so tritt, wenn man die Transformationsbedingungen unverändert beibehält, für $f^{(1)}=0$ statt der k getrennten einfachen Werthsysteme eine Singularität auf. Besteht diese in einem k_1-fachen Werthsysteme von $f^{(1)}=0$, so fassen wir jetzt die Singularität von $f=0$ in $(x=a,\ y=b)$ als *Grenzfall* zweier Singularitäten auf, eines gewöhnlichen k-fachen und eines k_1-fachen Werthsystems, die an der Grenze derartig unendlich nahe zusammengerückt sind, dass hierbei $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ einen bestimmten Werth enthält. Für die Ausführung dieser Auffassung genügt es schon, sich auf die speciellste der hier möglichen Transformationen zu beschränken, die einfachste quadratische Transformation, deren sich auch Hr. Hamburger und Hr. Königsberger in den citirten Arbeiten bedienen.

§ 2.

Die Gleichung $f=0$ sei zunächst nach aufsteigenden Dimensionen in $x-a$ und $y-b$ geordnet:

$$(1)\quad f(x,y)\equiv f_k(x-a, y-b)+f_{k+1}(x-a, y-b)+\cdots=0,$$

wo allgemein $f_h(x-a, y-b)$ eine in $x-a$ und $y-b$ homogene Function der Dimension h bedeutet. Wir sagen nun, dass das Werthsystem $(x=a,\ y=b)$ und dessen benachbarte Werthreihen, welche $f=0$ genügen, k *Elemente* von $f=0$ bilden und bezeichnen im Folgenden das singuläre Werthsystem als ein *k-elementiges*. Die k Elemente sind den k, verschiedenen oder gleichen, linearen Factoren von $f_k(x-a, y-b)=0$ zugeordnet. Solche in den k Elementen enthaltene k' Elemente, welche durch keine rationalen Transformationen von einander getrennt werden können und welche dann nothwendig einem wenigstens k'-fachen linearen Factor von $f_k(x-a, y-b)=0$ zugehören, sollen einen *k'-fachen Zweig von $f=0$* bilden. Endlich bezeichnen wir das k-elementige Werthsystem für den Fall, dass *alle* linearen Factoren von $f_k(x-a, y-b)=0$ von einander verschieden sind, als ein gewöhnliches k-faches oder kurzweg als ein *k-faches*.

Unter der Annahme, dass keiner der linearen Factoren von

$f_k(x-a, y-b)$ mit $x-a$ zusammenfalle, wenden wir auf $f=0$ die Transformation an:

$$y_1 = \frac{y-b}{x-a}, \tag{2}$$

durch welche wir y_1 an Stelle von y einführen, und erhalten als transformirte Gleichung:

$$f^{(1)}(x, y_1) \equiv f_k(1, y_1) + (x-a) f_{k+1}(1, y_1) + \cdots = 0. \tag{3}$$

Dem k-elementigen Werthsysteme von $f=0$ entsprechend, entstehen k Werthsysteme von $f^{(1)}=0$:

$$x - a = 0, \quad f_k(1, y_1) = 0,$$

welche zusammenfallend oder getrennt sind, je nachdem die linearen Factoren von $f_k(x-a, y-b)$, also die Elemente von $f=0$, es sind. Umgekehrt rühren auch die Werthsysteme von $f^{(1)}=0$, für welche $x=a$ ist, ausgenommen $x=a$, $y_1=\infty$, nur von den Elementen von $f=0$ in $(x=a, y=b)$ her.

1) Sind die k Werthsysteme von $f^{(1)}=0$ alle von einander verschieden, so ist jedes derselben ein einfaches für $f^{(1)}=0$, und $(x=a, y=b)$ ein gewöhnliches k-faches für $f=0$, oder $f=0$ hat daselbst k *einfache Zweige*.

2) Wir betrachten sodann den Fall, dass diese k Werthsysteme alle zusammenfallen, dass also

$$f_k(x-a, y-b) \equiv [b_1(x-a) - (y-b)]^k$$

ist, wobei wir weiter annehmen, dass $f_{k+1}(x-a, y-b)$ für $b_1(x-a) - (y-b) = 0$ nicht verschwindet. In diesem Falle hat $f^{(1)}=0$ in

$$x = a, \quad y_1 = b_1$$

ein *einfaches* Werthsystem, in dessen Nähe sich $f^{(1)}$ wie $x-a$ verhält; dasselbe bildet, mit seinen benachbarten, nur *ein* Element von $f^{(1)}$, wobei denn durch keine rationale Transformation eine weitere Trennung der Werthreihe bewirkt werden kann. Demselben entsprechen alle k Elemente von $f=0$ um $(x=a, y=b)$, und diese bilden zusammen einen *k-fachen Zweig* von $f=0$, aber einen solchen der einfachsten Art, indem eben nur die k Elemente aufeinanderfolgende sind, ohne weitere Singularität. Wir werden dieses Verhalten so ausdrücken: Mit dem k-fachen Werthsystem verbindet sich ein *Verzweigungssystem* $(k-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung* oder auch $k-1$ *einfache Verzweigungssysteme von* $f=0$ *).

*) Betrachtet man aus $f=0$ y als Function von x, so ist $x=a$ ein Verzweigungspunkt $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für y (oder noch höherer Ordnung, wenn $b_1=\infty$ ist), in dem $y=b$ wird.

3) Von einem *beliebig singulären* k-elementigen Werthsystem soll jetzt gezeigt werden, dass dasselbe *als Grenzfall eines k-fachen Werthsystems definirt werden kann, zu welchem eine Anzahl von einfachen Verzweigungssystemen treten, und an welches weiter eine Reihe von* $k_1^{(1)}$-, $k_1^{(2)}$-, $\cdots$ *elementigen Werthsystemen (wobei* $k_1^{(1)} + k_1^{(2)} + \cdots \leqq k$ *ist) unendlich nahe heranrücken.*

Diese Auflösung des k-elementigen Werthsystems wird durch die Transformation (2) direct geleistet. $f_k(x-a, y-b)$ habe einen genau l-fachen Factor

$$[b_1(x-a)-(y-b)]^l, \quad (l \leqq k),$$

also $f^{(1)}(x, y_1) = 0$ entsprechend l zusammenfallende Werthsysteme:

$$x = a, \quad y_1 = b_1.$$

Die übrigen $k - l$ Werthsysteme von $f^{(1)} = 0$, für welche $x = a$ ist, sind bereits von diesem getrennt, und wir können daher dasselbe für sich untersuchen. Es mögen nun die Glieder f_{k+1}, f_{k+2}, $\cdots$ derart singulär sein (nämlich f_{k+i} möge wenigstens den Factor $[b_1(x-a)-(y-b)]^{k_1-i}$ besitzen), dass $f^{(1)}(x, y_1) = 0$ in $(x=a, y_1=b_1)$ ein k_1-elementiges Werthsystem erhält, wo $k_1 \leqq l$ sein wird. In demselben existiren höchstens k_1 Zweige von $f^{(1)} = 0$; daher giebt es auch nur höchstens ebensoviele von $f = 0$, welche aus den l Elementen entstehen, die dem l-fachen Factor zugeordnet sind. Diese erste Transformation ergiebt also bereits, dass von den l Elementen wenigstens $(l-k_1)$-mal je zwei aufeinanderfolgende sind, oder, nach der Bezeichnung von 2): es entstehen $l-k_1$ einfache Verzweigungssysteme, welche zu dem k-fachen Werthsysteme von $f = 0$ zutreten.

Denkt man sich ferner in der Gleichungsform (3), welche immer vermöge (2) in die Gleichungsform (1) übergeht, die Bedingung erfüllt, dass in der Nähe des Werthsystems $(x=a, y_1=b_1)$, nicht für $x = a$ selbst, ein k_1-elementiges Werthsystem von $f^{(1)}$ stattfindet, von derjenigen Singularität, wie es im gegebenen Falle für $(x=a, y_1=b_1)$ selbst geschieht, so würde jenem Werthsystem ein k_1-elementiges von $f = 0$ entsprechen, von genau derselben Singularität, welches in die Nähe von $(x=a, y=b)$ fällt; denn unsere Transformation verhält sich in einem solchen Werthsystem nur wie eine lineare (in welcher ein Werthsystem und dessen benachbarte ausnahmslos wieder solchen eindeutig entsprechen). Die Singularität von $f = 0$ besteht hier, soweit die l Elemente in Betracht kommen, in einem k-fachen Werthsysteme mit $l-k_1$ einfachen Verzweigungssystemen und in einem in die Nähe desselben fallenden k_1-elementigen Werthsysteme. Geht man zur Grenze über, so rückt nur das k_1-elementige Werthsystem an das k-fache unendlich nahe heran, und zwar so, dass hierbei $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ den Grenzwerth b_1

hat. Daher erhält man, indem man diese Betrachtung auch auf die übrigen $k-l$ Elemente in $(x=a,\ y=b)$ ausdehnt, die unter 3) gegebene Definition.

§ 3.

Zur weiteren Bestimmung der Singularität im allgemeinen Fall 3) des § 2. hat man nun nur das k_1-elementige Werthsystem $(x=a,\ y_1=b_1)$ von $f^{(1)}=0$, welchem ein an das k-fache von $f=0$ herangerücktes analoges Werthsystem entspricht, auf dieselbe Weise zu untersuchen, wie es soeben für das k-elementige von $f=0$ stattfand.

Man ordnet $f^{(1)}(x, y_1)$ zunächst wieder nach aufsteigenden Dimensionen von $x-a$ und y_1-b_1:

$$(4)\quad f^{(1)}(x, y_1) \equiv f_{k_1}^{(1)}(x-a, y_1-b_1) + f_{k_1+1}^{(1)}(x-a, y_1-b_1) + \cdots = 0,$$

und hat nun für die Untersuchung der Elemente von $(x=a,\ y_1=b_1)$ zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem dieselben einem Factor $x-a$ nicht zugeordnet sind oder dieses sind. Auf die Elemente der *ersten* Art wendet man wieder die Transformation an, durch die y_1 eliminirt wird:

$$(5)\quad y_2 = \frac{y_1-b_1}{x-a},$$

und erhält hierdurch in $f^{(2)}(x, y_2)=0$ eine erste Auflösung des k_1-elementigen Werthsystems, soweit es jene Elemente betrifft. In Bezug auf die Elemente der *zweiten* Art aber wird man zunächst irgend eine lineare homogene Function von $x-a$ und $y-b$ an Stelle von $x-a$ als unabhängige Variable einführen, oder einfacher, man wird direct die Transformation machen:

$$(6)\quad x_1 = \frac{x-a}{y_1-b_1},$$

und mit Hülfe derselben x_1 an Stelle von x in $f^{(1)}(x, y_1)=0$ bringen. Die transformirte Gleichung wird dann:

$$(7)\quad f^{(2)}(x_1, y_1) \equiv f_{k_1}^{(1)}(x_1, 1) + (y_1-b_1) f_{k_1+1}^{(1)}(x_1, 1) + \cdots = 0,$$

und sie hat *ein* den betrachteten Elementen entsprechendes singuläres Werthsystem in $y_1=b_1$, $x_1=0$, dessen Verhalten in Bezug auf $y_1-b_1=0$ nun die nächste Auflösung des k_1-elementigen Werthsystems liefert, soweit es diese Elemente zweiter Art betrifft, welche einer Potenz des Factors $x-a$ in $f_{k_1}^{(1)}(x-a, y_1-b_1)$ zugeordnet sind.

Durch eine fortgesetzte Anwendung dieser beiden Transformationen auf jedes einzelne der entstehenden singulären Werthsysteme wird man die gegebene Singularität von $f=0$ vollständig auflösen, wenn man nur, was wir unten in der That nachweisen werden, durch eine endliche Zahl solcher Operationen zuletzt auf eine Reihe getrennter

einfacher Werthsysteme geführt wird, die dem k-elementigen Werthsysteme ($x=a$, $y=b$) von $f=0$ entsprechen; da sich dieselben nun selbst nicht weiter auflösen lassen.

Die verschiedenen *Zweige*, welche $f=0$ in ($x=a$, $y=b$) besitzt, entsprechen nun einzeln jenen resultirenden einfachen Werthsystemen, und die Zahl derselben ist gleich der Zahl dieser Werthsysteme. Die Vielfachheit eines Zweiges ist gleich der Zahl der Elemente von $f=0$, welche dem betreffenden einfachen Werthsysteme entsprechen. Und da jedes der einfachen Verzweigungssysteme, welches wir durch unsere successiven Transformationen finden, ein Zusammenfallen zweier Elemente von $f=0$ bedeutet, so vertheilt sich die Gesammtzahl der Verzweigungssysteme, welche in dem singulären Werthsystem von $f=0$ enthalten sind, so, dass auf einen k'-fachen Zweig von $f=0$ ein Verzweigungssystem $(k'-1)^{\text{ter}}$ Ordnung oder $k'-1$ einfache Verzweigungssysteme fallen. Hat man $k-r$ Zweige von $f=0$ in ($x=a$, $y=b$), so enthält dieses k-elementige Werthsystem r einfache Verzweigungssysteme in sich.

Wie sich so durch die Transformationen die Gesammtzahl r der Verzweigungssysteme ergiebt, so kann man auch im Verlaufe der Transformationen die zu jedem einzelnen Zweige gehörige Zahl k', welche dessen Vielfachheit anzeigt, bestimmen. Es ist nämlich, wenn man zunächst die Transformation (2) angewandt hat, k' gleich der Zahl der Werthsysteme, für welche $x-a=0$, $f^{(1)}(x, y_1)=0$ und $y_1=b_1$ wird, und welche dem betreffenden Zweige von $f^{(1)}=0$ zugehören. Wenn nun dieser Zweig von $f^{(1)}=0$ nicht dem Factor $x-a$ zugeordnet ist, wenn man also weiter die Transformation (5) angewandt hat und hierdurch zu einem Werthsystem ($x=a$, $y_2=b_2$) von $f^{(2)}(x, y_2)=0$ gelangt ist, so wird k' auch gleich der Zahl der Werthsysteme, welche $x-a=0$ mit dem in $y_2=b_2$ befindlichen betreffenden Zweig von $f^{(2)}(x, y_2)=0$ gemein hat, etc.

War aber der Zweig von $f^{(1)}(x, y_1)=0$ dem Factor $x-a$ zugeordnet, so dass man weiter durch die Transformation (6) auf (7), auf $f^{(2')}(x_1, y_1)=0$, überging, so ergiebt sich k' als die Zahl der Werthsysteme, welche $y_1-b_1=0$ mit dem betreffenden Zweige von $f^{(2')}(x_1, y_1)=0$ gemein hat, plus derjenigen Zahl, welche $x_1=0$ mit diesem Zweige in ($x_1=0$, $y_1=b_1$) gemein hat. Diese beiden Zahlen bestimmen sich aber beim Uebergang von $f^{(2')}$ zu einer Gleichung $f^{(3)}=0$ analog weiter, etc.

§ 4. Beispiel.

Sei

$$f(x, y) \equiv \alpha y^4 + f_5(x, y) + f_6(x, y) + \cdots$$

wo

$$f_5 \equiv \Sigma \alpha_i y^i x^{5-i}, \qquad f_6 \equiv \Sigma \beta_i y^i x^{6-i}, \ \cdots$$

und

$$\alpha \text{ nicht } = 0.$$

Hier ist $(x=0, y=0)$ ein *4-elementiges* Werthsystem von $f=0$. Die Transformation $y = xy_1$ liefert

$$f^{(1)}(x, y_1) \equiv \alpha y_1^4 + x f_5(1, y_1) + x^2 f_6(1, y_1) + \cdots.$$

Das entsprechende singuläre Werthsystem von $f^{(1)}$ ist $(x=0, y_1=0)$. Sei nun

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_0 \text{ nicht } = 0.$$

Man erhält dann:

$$f^{(1)}(x, y_1) \equiv \beta_0 x^2 + x\varphi_2(x, y_1) + \varphi_4(x, y_1) + \varphi_5(x, y_1) + \cdots,$$

wo

$$\varphi_2(x, y_1) \equiv \alpha_2 y_1^2 + \beta_1 y_1 x + \gamma_0 x^2,$$
$$\varphi_4(x, y_1) \equiv \alpha y_1^4 + \alpha_3 y_1^3 x + \beta_2 y_1^2 x^2 + \gamma_1 y_1 x^3 + \delta_0 x^4, \text{ etc.},$$

daher ist $(x=0, y_1=0)$ ein *zwei-elementiges* Werthsystem von $f^{(1)}$ und dem Factor x selbst zugeordnet, woraus noch *zwei einfache* Verzweigungssysteme für $f=0$ in $(x=0, y=0)$ folgen.

Nun hat man die Transformation $x = y_1 x_1$ auf $f^{(1)}$ anzuwenden und erhält:

$$f^{(2)}(x_1, y_1) \equiv \beta_0 x_1^2 + y_1 x_1 \varphi_2(x_1, 1) + y_1^2 \varphi_4(x_1, 1) + \cdots$$
$$\equiv (\beta_0 x_1^2 + \alpha_2 x_1 y_1 + \alpha y_1^2) + x_1 y_1 (\beta_1 x_1 + \alpha_3 y_1) + \psi_4(x_1, y_1) + \cdots.$$

Hierbei ergiebt sich in $(x_1=0, y_1=0)$ wieder ein zwei-faches Werthsystem von $f^{(2)}$, dem nun vermöge der Transformation $x_1 = y_1 x_2$, welche $f^{(2)}$ überführt in

$$f^{(3)}(x_2, y_1) \equiv (\beta_0 x_2^2 + \alpha_2 x_2 + \alpha) + x_2 y_1 (\beta_1 x_2 + \alpha_3) + y_1^2 \psi_4(x_2, 1) + \cdots,$$

zwei von einander verschiedene Werthsysteme $(y_1=0, x_2)$ von $f^{(3)}=0$, aus $\beta_0 x_2^2 + \alpha_2 x_2 + \alpha = 0$, entsprechen, wenn nur

$$\alpha_2^2 - 4\alpha\beta_0 \text{ nicht } = 0.$$

Daher besteht das 4-elementige Werthsystem von $f=0$ alsdann aus einem vierfachen und zwei zweifachen Werthsystemen, sowie zwei einfachen Verzweigungssystemen. Es existiren daselbst zwei Zweige von $f=0$, und zwar ist jeder dieser Zweige ein zweifacher; denn die Ordnung k' der Vielfachheit für den einen der Zweige ist hier gleich der Zahl der Werthsysteme, welche $y_1 = 0$ mit dem entsprechenden Zweige von $f^{(2)}(x_1, y_1) = 0$, plus der Zahl solcher, welche $x_1 = 0$ mit diesem Zweige gemein hat. Die erstere Zahl ist gleich der Zahl der Werthsysteme des entsprechenden Zweiges von $f^{(3)}(x_2, y_1) = 0$, für welche $y_1 = 0$ ist, also $= 1$; die zweite Zahl ist gleich der Summe

der beiden Zahlen der Werthsysteme, welche dieser Zweig mit $y_1 = 0$ *und* mit $x_2 = 0$ gemein hat, also, da x_2 für diesen Zweig nicht 0 ist, ebenfalls $= 1$. Daher wird $k' = 2$, und zwar für jeden der beiden Zweige von $f = 0$.

Wenn aber

$$\alpha_2^2 - 4\alpha\beta_0 = 0$$

ist, und wenn ausserdem der lineare Factor, dessen Quadrat dann $\beta_0 x_2^2 + \alpha_2 x_2 + \alpha$ ist, verschieden ist von $\beta_1 x_2 + \alpha_3$, so besteht das singuläre Werthsystem von $f^{(2)}(x_1, y_1) = 0$ aus einem zweifachen, zu welchem noch ein einfaches Verzweigungssystem tritt. In diesem Falle bilden also alle Elemente von $f = 0$ in $(x=0, y=0)$ *einen* 4-fachen Zweig. Dieses 4-elementige Werthsystem besteht aus einem 4-fachen und zwei 2-fachen Werthsystemen, zu welchen drei einfache Verzweigungssysteme treten.

§ 5.

Zu dem in § 3. noch verlangten Nachweise, dass die Operationen nach einer endlichen Anzahl abschliessen, genügt die Betrachtung irgend einer Beziehung, für welche sich die dem singulären Werthsysteme äquivalenten vielfachen Werthsysteme wie getrennt liegende verhalten und dann nicht in unendlicher Zahl existiren können.

Wir untersuchen hier allgemein die *Resultante der Elimination* einer Variabeln aus zwei Gleichungen zwischen zwei Variabeln, wenn die beiden Gleichungen ein singuläres Werthsystem gemein haben. Wir nehmen, wie früher, an, dass die Singularität von $f(x, y) = 0$ für $(x=a, y=b)$ stattfindet.

Wenn $(x=a, y=b)$ für $f(x, y) = 0$ ein k-elementiges, für eine zweite Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ ein K-elementiges Werthsystem ist, von denen wir annehmen wollen, dass sie nicht beide $x - a$ zugeordnete Elemente besitzen, so hat die Resultante, welche durch Elimination von y aus $f=0$, $\varphi=0$ entsteht, von $(x=a, y=b)$ herrührend, jedenfalls den Factor

$$(x-a)^{kK}.$$

Wir wenden nun die Transformation (2) des § 2.:

$$y - b = (x-a)\, y_1$$

auf $f = 0$ und auf $\varphi = 0$ an, die in $f^{(1)}(x, y_1) = 0$, $\varphi^{(1)}(x, y_1) = 0$ übergehen mögen. Jedem gemeinsamen Werthsysteme von $f^{(1)} = 0$. und $\varphi^{(1)} = 0$ ($y_1 = \infty$ oder $x = \infty$ ausgenommen) entspricht auch ein solches für $f = 0$, $\varphi = 0$. Fallen insbesondere noch ϱ derselben auf $x = a$, so, dass die Resultante der Elimination von y_1 aus $f^{(1)} = 0$,

$\varphi^{(1)} = 0$ den Factor $(x-a)^\varrho$ erhält, so tritt derselbe auch zu der obigen Resultante aus $f = 0$, $\varphi = 0$ hinzu, und diese hat den Factor

$$(x-a)^{kK+\varrho}.$$

Man untersucht nun in gleicher Weise die Zahl ϱ, indem man in jedem einzelnen der vielfachen Werthsysteme von $f^{(1)} = 0$, $\varphi^{(1)} = 0$, $x - a = 0$ nach der angegebenen Methode weiter transformirt. Dadurch wird in jedem solchen der von diesem herrührende Beitrag zu ϱ weiter bestimmt, wobei es denn für diese Zahl gleichgültig ist, ob man daselbst die Resultante in x oder in einer neueingehenden Variabeln aufzustellen hat. Mit diesen Transformationen wird man, indem man dieselben auch auf entstehende *einfache* Werthsysteme weiter anwendet, fortfahren, bis gemeinsame Werthsysteme nicht mehr erhalten werden. Ein solcher Abschluss muss immer eintreten, *wenn nur f und φ keinen gemeinsamen Factor besitzen*, da nur in diesem Falle die Resultante von f und φ unbestimmt wird.

Wenn man überhaupt die *Potenz von $x-a$* bestimmen will, welche in die Resultante von f und φ durch Elimination von y eintritt, so hat man auch die übrigen gemeinsamen Werthsysteme von $f = 0$, $\varphi = 0$, $x = a$, insbesondere $(x = a,\ y = \infty)$, ähnlich zu untersuchen. Setzt man $x = \frac{\xi}{\tau}$, $y = \frac{\eta}{\tau}$ und erhält so homogene Formen für f und φ, so betrachtet man das Werthsystem $\xi = 0$, $\tau = 0$ von f und φ. Dasselbe sei wieder ein k-elementiges von f, ein K-elementiges von φ, und unsere Methode liefere $kK + \varrho$ gemeinsame Werthsysteme von f und φ in $(\xi=0,\ \tau=0)$, so aber, dass nur ϱ' von den ϱ Werthsystemen den Zweigen, welche aus den $\xi - a\tau$ selbst zugeordneten Elementen bestehen, zugehören. Man hat alsdann, von $(x = a,\ y = \infty)$ herrührend, in der durch Elimination von y aus f und φ folgenden Resultante den Factor $(x-a)^{\varrho'}$. — Endlich ergiebt sich auch der *Grad dieser Resultante in x selbst* auf ähnlichem Wege. Die in x aufgestellte Resultante bezieht sich auf diejenigen Werthsysteme, für welche τ nicht $= 0$ ist, und ferner auf diejenigen, welche in $(\xi=0,\ \tau=0)$, auf $\xi - a\tau$ bezüglich, soeben in der Zahl ϱ' angegeben worden sind, wobei man natürlich die verschiedenen in $(\xi=0,\ \tau=0)$ befindlichen gemeinsamen Zweige, einen $\tau = 0$, also $a = \infty$, zugeordneten ausgenommen, in Rechnung zu ziehen hat. Sei also n der Grad von f, N der von φ in ξ, η, τ; es mögen ferner $f = 0$, $\varphi = 0$ in den verschiedenen Werthsystemen, für welche $\tau = 0$ ist, $(\xi = 0,\ \tau = 0)$ ausgenommen, also für $x = \infty$) r gemeinsame Werthsysteme besitzen; endlich in $(\xi=0,\ \tau=0)$, dem k- bez. K-elementigen Werthsystem von f, bez. φ: $kK + r' + r''$ gemeinsame Werthsysteme, wo sich r'' auf die Zweige bezieht, welche

aus den τ zugeordneten Elementen bestehen, r' auf die übrigen Zweige; so wird der Grad der Resultante in x:

$$nN - r - (kK + r'').$$

Zu dem am Anfange dieses § angegebenen Nachweise genügt jetzt die Betrachtung von $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Aus

$$f(x, y) = (x-a)^k f^{(1)}(x, y_1)$$

folgt

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (x-a)^{k-1} \frac{\partial f^{(1)}(x, y_1)}{\partial y_1},$$

und wenn nun in $(x=a, y_1=b_1)$ ein k_1-elementiges Werthsystem von $f^{(1)}$ entsteht, das keine $x-a$ zugeordneten Elemente besitzt, so ergeben die Transformationen

$$y - b = (x-a)y_1, \quad y_1 - b_1 = (x-a)y_2, \quad y_2 - b_2 = (x-a)y_3, \cdots$$

weiter:

$$\frac{\partial f^{(1)}(x, y_1)}{\partial y_1} = (x-a)^{k_1-1} \cdot \frac{\partial f^{(2)}(x, y_2)}{\partial y_2} = (x-a)^{k_1+k_2-2} \cdot \frac{\partial f^{(3)}(x, y_3)}{\partial y_3} = \cdots.$$

Diese Transformationen können aber nicht so fortgehen, ohne dass man endlich entweder zu einem einfachen Werthsystem einer Gleichung $f^{(h)}$ oder zu einem singulären, das $x-a$ zugeordnete Elemente enthält, geführt wird. Denn für jedes vielfache Werthsystem von $f^{(h)}$, für welches $x=a$ ist, hat man gemeinsame Werthsysteme von $f^{(h)} = 0$, $\frac{\partial f^{(h)}}{\partial y_h} = 0$, so dass bei unbegrenzter Fortsetzung der Operationen die Resultante von $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ den Factor $x-a$ in beliebig hoher Potenz erhielte. In $f=0$ wäre dann ein vielfacher rationaler Factor enthalten, was wir ausschliessen. Sobald aber einmal für $f^{(h)}$ in dem k_h-elementigen Werthsystem $(x=a, y_h=b_h)$ $x-a$ zugeordnete Elemente auftreten, wird nach § 2. 3) nothwendig $k_h < k$, so dass unsere Transformationen immer zu einem Abschluss führen müssen.

Wir gehen nur kurz darauf ein, wie aus unsern Transformationen jetzt die Reihenentwicklungen der Function y nach aufsteigenden, im Allgemeinen gebrochenen Potenzen von $x-a$, welche der Gleichung $f(x, y) = 0$ im Werthsystem $(x=a, y=b)$ zugehören, hervorgehen. Es ist klar, dass man für jedes der zuletzt resultirenden einfachen Werthsysteme, also etwa $(x_h=a_h, y_h=b_h)$ einer Gleichung $f^{(h)}(x_h, y_h)=0$, eine Reihenentwicklung von y_h nach $x_h - a_h$ direct anstellen und, indem man alsdann die Transformationen rückwärts verfolgt, hieraus eine solche für den betreffenden Zweig von $f=0$ in $(x=a, y=b)$ erhalten kann. Eine solche Entwicklung wird nach Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{k'}}$ fortgehen, wenn dieser Zweig ein k'-facher ist; und da sich diese Zahl k', wie wir gesehen haben, im Verlaufe der Transformationen selbst ergiebt, so lässt sich nun auch die Methode der unbestimmten Coeffi-

cienten direct anwenden; wobei noch zu beachten ist, dass man auch den Zähler in dem Exponenten des ersten Gliedes der Entwicklung ähnlich im Voraus bestimmen kann. Ein solcher *k'-facher Zweig* entspricht also einem *Puiseux'schen cyklischen System von k' Functionswerthen y* am singulären Werthsystem ($x = a$, $y = b$).

§ 6. Geometrisches.

Um die bisherigen Betrachtungen auf die Geometrie zu übertragen, hat man nur von der *Curve f* zu sprechen und die Bezeichnung „singuläres Werthsystem", „Verzweigungssystem" etc. durch „singulären Punkt", „Verzweigungspunkt von f" etc. zu ersetzen. Ein Punkt P von f wird ein k-elementiger, wenn jede durch P gehende Gerade, einzelne ausgenommen, in P die Curve f in k zusammenfallenden Punkten trifft; es giebt dann k, von einander verschiedene oder aufeinanderfolgende, erzeugende Gerade von f, welche die Curve f *in diesem* Punkte P *berühren*, oder es giebt k *Curvenelemente* von f, welche durch P gehen, wobei denn immer k' solche *aufeinanderfolgende* Tangenten von einer Zahl $k'+1$ aufeinanderfolgender Erzeugenden von f herrühren, die durch P *gehen*. Diese Erzeugenden können übrigens weiter auch noch in P benachbarten Punkten f berühren, so dass jede von ihnen unter den von P ausgehenden Tangenten auch noch zu einem benachbarten Curvenelemente gehören kann, das nicht durch P geht, wie unten noch näher erwähnt werden soll.

Unter den Transformationen, welche die Auflösung des Punktes P in einfachere Singularitäten bewirken, wird man entweder auch die specielle des § 2. oder auch die allgemeine quadratische Ebenentransformation wählen. Man lässt dabei den Geraden einer Ebene E_1 die Kegelschnitte der Ebene E von f entsprechen, welche durch drei feste Punkte P, Q, R hindurchgehen. Dabei soll nur angenommen sein, dass die Geraden (PQ), (PR) mit keiner der Elementenrichtungen von f im Punkte P zusammenfallen. (Lässt man R an Q unendlich nahe rücken, so erhält man die in § 2. benutzte specielle Transformation.) Dem Punkte P entspreche nun in E_1 eine Gerade $(Q_1 R_1)$, durch die beiden Fundamentalpunkte Q_1 und R_1. Diese Gerade tritt dann in Bezug auf die transformirte Curve $f^{(1)}$ an die Stelle von $x - a = 0$ der vorigen Untersuchung; die auf $(Q_1 R_1)$ ausserhalb Q_1 und R_1 entstehenden singulären Punkte sind es, welche die zu dem *k-fachen* Punkte P zutretende Singularität bestimmen. Hieraus folgen die im Vorigen entwickelten Resultate, insbesondere die in § 2. 3) gegebene Auffassung. So gilt ein sogenannter „Rückkehrpunkt erster Art" als ein zweifacher Punkt mit einem einfachen Verzweigungspunkt, etc.

In dem Beispiel des § 4. hat man für den Fall, dass dort $\alpha_2^2 - 4\alpha\beta_0$ nicht $= 0$ ist, einen 4-fachen Punkt, in welchen zwei 2-fache Punkte

(und zwar in *benachbarten* Richtungen) gerückt sind, so dass auch noch 2 Verzweigungspunkte entstehen. Unter besondern Realitätsbedingungen kann also die Curve in P die Gestalt der Figur 1 zeigen, wo $1 - 1'$ den einen Zweig, $2 - 2'$ den andern, welche beide dieselbe Tangente in P haben, vorstellt.

Fig. 1.

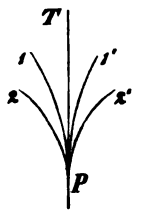
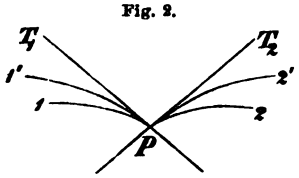


Fig. 2.



Dieselben Singularitätenzahlen zeigt auch der 4-elementige Punkt der Figur 2, wo je ein Doppelpunkt und ein Verzweigungspunkt von verschiedenen Richtungen her zu einem 4-fachen Punkt P gerückt sind, so dass zwei Zweige $1 - 1'$ und $2 - 2'$ mit verschiedenen Tangenten entstehen. — Wir wenden uns sogleich, statt weiterer Ausführungen, zu Anwendungen der Theorie.

§ 7.

Wir bestimmen zunächst die *Classe* einer Curve f. Die Classe ist gleich der Anzahl derjenigen Schnittpunkte der Curve f mit der in Bezug auf dieselbe genommenen Polare irgend eines Punktes Q der Ebene, welche *ausserhalb* der vielfachen Punkte von f fallen, d. h. gleich der Zahl der Tangenten an f, welche von Q ausgehen und deren Berührungspunkte ausserhalb der vielfachen Punkte liegen. Wir haben also nachzuweisen, wie sich der singuläre Punkt P zu dieser Zahl verhält.

Der zweite Fundamentalpunkt der Transformation möge in den Punkt Q gelegt werden. Den Geraden durch Q entsprechen dann die Geraden durch Q_1 linear, und die Polare von Q in Bezug auf f geht in die in Bezug auf $f^{(1)}$ genommene Polare von Q_1 über, wie auch schon in § 5. angegeben worden ist. Dabei gehen die *eigentlichen* Tangenten an f, welche in dem Büschel durch Q enthalten sind (d. h. die erzeugenden Geraden von f, deren Berührungspunkt also kein singulärer Punkt von f ist), wieder in eigentliche Tangenten an $f^{(1)}$, die durch Q_1 gehen, über; nur die Gerade $(Q_1 R_1)$, auch wenn sie zugleich eigentliche Tangente sein sollte, immer in die Gerade (QP), die keine eigentliche Tangente sein wird.

Wenn nun in die Punkte von $f^{(1)}$ auf der Geraden $(Q_1 R_1)$, wobei nur wieder die Punkte Q_1, R_1 selbst auszuschliessen sind, ϱ Schnittpunkte von $f^{(1)}$ mit der Polare $f^{(1)}_{Q_1}$ des Punktes Q_1 fallen, so hat f mit der Polare f_Q im Punkte P

$$k(k-1)+\varrho$$

Schnittpunkte gemein. Liegt insbesondere auf $(Q_1 R_1)$ ein k_1-elementiger Punkt P_1' von $f^{(1)}$, in welchem aber $f^{(1)}$ von der Geraden $(Q_1 R_1)$ l-punktig geschnitten wird, so bestimmt sich der Beitrag ϱ' zu ϱ, der von P_1' herrührt, dadurch, dass man zunächst die Polare eines von Q_1 verschiedenen, beliebigen Punktes Q_1' in Bezug auf $f^{(1)}$ mit der von Q_1 vergleicht. Die Differenz zwischen den beiden Anzahlen von Schnittpunkten ist gleich der Zahl der erzeugenden Geraden von $f^{(1)}$, welche mit $(Q_1 R_1)$ zusammenfallen; also, von P_1' herrührend, $= l - k_1$, da diese Zahl mit jener der Punkte von $f^{(1)}$ identisch ist, in welchen $(Q_1 R_1)$ eigentliche Tangente ist, und welche zugleich P_1' benachbart sind (wir bezeichnen diese Zahl besser als die Zahl der dort befindlichen *Curvenelemente*, welche die Richtung von $(Q_1 R_1)$ haben). Hieraus folgt, dass für die Zahl ϱ der Punkt P_1' sich so vertheilt, wie ein k_1-elementiger Punkt für die Schnittpunkte von $f^{(1)}$ mit einer beliebigen Polare, wenn man ferner noch die Zahl $l-k_1$ der Verzweigungspunkte, welche sich bei der ersten Auflösung des Punktes P von f ergeben, hinzufügt. — Man kann nun die durch den k_1-elementigen Punkt absorbirten Tangenten an $f^{(1)}$ durch den beliebigen Punkt Q_1' analog weiter bestimmen, und erhält sogleich den Satz:

Die Anzahl der von einem beliebigen Punkte an die Curve f gehenden eigentlichen Tangenten, die Classe von f, ergiebt sich genau so, als ob die in einem singulären Punkt P vereinigt liegenden vielfachen Punkte getrennt lägen; wobei ferner noch jeder in P enthaltene einfache Verzweigungspunkt die Classe um 1 *erniedrigt.*

§ 8.

Wir führen nun, um für eindeutig transformirte Curven eine immer gültige Relation zu erhalten, eine neue Bezeichnung ein. Unter den von dem Punkte Q ausgehenden Geraden bezeichnen wir eine nach einem singulären Punkte P von f gehende Gerade (QP) als *uneigentliche Tangente*, und zwar als *r-fache*, wenn r einfache Verzweigungspunkte von f in P enthalten sind, wobei wir die Bezeichnung als mit r *einfachen* uneigentlichen Tangenten gleichbedeutend setzen.

Nach dem Vorhergehenden kennen wir die *Summe der eigentlichen und uneigentlichen Tangenten*, welche von einem *beliebigen*, nicht der Curve f angehörigen, Punkte Q an f gezogen werden können; diese Summe sei ω. Wir wollen nun unter den von einem *singulären* Punkte P ausgehenden Geraden auch diejenigen als eigentliche oder uneigentliche Tangenten bezeichnen, welche ihren Berührungspunkt zwar in der Nähe von P (nämlich in einem nicht durch P gehenden, benachbarten Curvenelemente) haben, welchen aber bei unserer eindeutigen Transformation eigentliche oder uneigentliche Tangenten, die durch den Punkt P_1 gehen,

entsprechen. Es sei dann ω' überhaupt die *Summe der eigentlichen und uneigentlichen Tangenten an f, welche von dem k-elementigen Punkt P ausgehen.*

Zunächst folgt aus diesen Definitionen, dass, wenn ω_1' die ω' analoge Bedeutung für das Geradenbüschel durch P_1 bei der transformirten Curve $f^{(1)}$ hat, die Relation gilt:

$$\omega' = \omega_1'.$$

Aber wir können die Zahl ω' auch auf die Zahl ω zurückführen. Denn die ausserhalb P liegenden singulären Punkte verhalten sich für ω und ω' gleich; transformirt man ferner, wie bisher, die Curve f, so ergiebt sich, dass auch die zu dem k-fachen Punkte in P getretenen $k_1^{(i)}$-elementigen Punkte sich für ω und ω' gleich verhalten. Endlich ändern auch die $\Sigma(l^{(i)} - k_1^{(i)})$ Verzweigungspunkte, welche der ersten Transformation zufolge als in P enthalten sich ergeben, die Zahl ω' nicht, weil denselben nur eine Berührung von $f^{(1)}$ mit der Fundamentalgeraden $(Q_1 R_1)$, aber keine Tangente durch P_1 entspricht; dieselben Verzweigungspunkte ändern auch ω nicht, da ω durch Verzweigungspunkte überhaupt nicht modificirt wird. Somit verhält sich für die Differenz $\omega - \omega'$ der k-elementige Punkt wie ein gewöhnlicher k-facher Punkt, und man hat:

$$\omega - \omega' = 2k.$$

§ 9.

Was wir in § 8. für die quadratische Transformation gesagt haben, bleibt genau so für jede eindeutige Transformation bestehen, bei welcher ein Geradenbüschel durch einen Punkt P in ein solches durch $P^{(1)}$ übergeführt wird.

Es möge nun durch eine solche allgemeinere Transformation die Curve n^{ter} Ordnung, f, in eine Curve $f^{(1)}$ der Ordnung $n^{(1)}$ übergehen. Der Punkt P sei ein k-elementiger Punkt von f, Q ein nicht auf f liegender Punkt; ebenso $P^{(1)}$ ein $k^{(1)}$-elementiger Punkt von $f^{(1)}$, $Q^{(1)}$ ein nicht auf $f^{(1)}$ liegender Punkt. ω' und ω seien die auf die Geradenbüschel durch P und Q bezüglichen, in § 8. definirten Zahlen, $\omega^{(1)'}$, $\omega^{(1)}$ die analogen auf $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ bezüglichen Zahlen. — Man hat dann:

$$\omega - \omega' = 2k, \quad \omega^{(1)} - \omega^{(1)'} = 2k^{(1)}, \quad \omega' = \omega^{(1)'},$$

und ferner aus dem Entsprechen von f und $f^{(1)}$ und der beiden Büschel durch P und $P^{(1)}$:

$$n - k = n^{(1)} - k^{(1)}.$$

Setzt man noch:

$$p = \tfrac{1}{2}(\omega - 2n + 2), \quad p^{(1)} = \tfrac{1}{2}(\omega^{(1)} - 2n^{(1)} + 2),$$

so folgt sogleich:

$$p = p^{(1)}.$$

Obwohl diese Beziehung hier nur für die besondere am Anfang dieses § bezeichnete Transformation bewiesen ist, so gilt sie doch für jede eindeutige Transformation, da man eine solche immer aus mehreren der besonderen zusammensetzen kann*).

Das Geschlecht p der Curve ist für alle eindeutigen Transformationen invariant.

Um nun die *Plücker'schen Gleichungen* auch für beliebig singuläre Curven zu erhalten, hat man nur die vorstehende Beziehung auf eine Curve f und ihre *Reciprokalcurve* $f^{(1)}$ anzuwenden und den Satz des § 7. zu benutzen. Hat man vermöge der bisher behandelten Theorie die sämmtlichen singulären Punkte von f in eine Summe von k-fachen Punkten aufgelöst, sowie in eine Summe von r Verzweigungspunkten, und sind $k^{(1)}$, $r^{(1)}$ die analogen auf $f^{(1)}$ bezüglichen Zahlen, n und $n^{(1)}$ Ordnung, bez. Classe von f, so folgt:

$$n^{(1)} = n(n-1) - \sum_{k} k(k-1) - r,$$

$$n = n^{(1)}(n^{(1)}-1) - \sum_{k^{(1)}} k^{(1)}(k^{(1)}-1) - r^{(1)},$$

$$n(n-3) - \sum_{k} k(k-1) = n^{(1)}(n^{(1)}-3) - \sum k^{(1)}(k^{(1)}-1).$$

Hierdurch ergeben sich also auch die Gleichungen für

$$\sum_{k^{(1)}} k^{(1)}(k^{(1)}-1) \equiv 2\tau + 2i,$$

$$\sum_{k^{(1)}} k^{(1)}(k^{(1)}-1) + r^{(1)} \equiv 2\tau + 3i,$$

wo nach der sonst üblichen Bezeichnung τ die Zahl der Doppeltangenten von f, i die Zahl der stationären Tangenten von f vorstellt; und es ist damit gezeigt, dass in die Ausdrücke derselben die singulären Punkte von f so eingehen, als ob deren Bestandtheile getrennt lägen; wenn nur die Zahl der Verzweigungspunkte berücksichtigt wird.

Es reiht sich hier die weitere Frage an, wie viele von den noch bei f existirenden vielfachen Tangenten, Wendetangenten etc. etwa in die verschiedenen Elementenrichtungen des Punktes von f fallen; überhaupt die Frage nach der Singularität einer solchen Erzeugenden von f. Diese Frage lässt sich mit unserer Methode allein nicht allgemein erledigen; es wird vielmehr die Aufstellung der Gleichung der Reciprokalcurve, wenigstens in der Nähe des zu betrachtenden singulären Punktes derselben, nothwendig. Man kann nur im Voraus sagen: ein k'-facher Zweig, dessen Tangente denselben in σ Punkten trifft, wird für die Reciprocalcurve ein $(\sigma - k')$-facher Zweig.

Mannheim, im März 1875.

*) Vgl. hierzu den Aufsatz in Math. Annalen Bd. VIII, p. 497.

Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst.

Von Felix Klein in München.

Die nachstehenden Untersuchungen sind aus dem Streben hervorgegangen, die geometrische Interpretation von $x + iy$ auf der Kugelfläche für die Theorie der binären Formen zu verwerthen. In dieser Absicht machte ich bereits bei einer früheren Gelegenheit*) auf die enge Beziehung aufmerksam, welche zwischen der gemeinten Interpretation und der projectivischen Maassgeometrie besteht, welche man auf die Kugel (wie auf jede Fläche zweiten Grades) gründen kann. Einer linearen Transformation von $x + iy$ entspricht geradezu, im Sinne dieser Maassgeometrie, eine reelle Bewegung des Raumes, wie auch umgekehrt, so dass jede Construction auf der Kugelfläche, welche für die Invariantentheorie von $x + iy$ Bedeutung hat, sofort maassgeometrische Verwerthung findet, und umgekehrt jedes maassgeometrische Theorem einen Beitrag für die Invariantentheorie liefert. Ich habe bereits damals angegeben, welch anschauliche Interpretation man auf Grund solcher Betrachtungen für das Formensystem einer binären cubischen und biquadratischen Form entwickeln kann; später**) veröffentlichte ich eine auf diesen Principien beruhende Uebertragung des Pascal'schen Satzes auf den Raum. Es hat dann Hr. Wedekind diese Untersuchungen nach verschiedenen Richtungen in seiner Inauguraldissertation***) weiter geführt (vergl. den weiterhin folgenden Auszug). Es sei auf diese Arbeit namentlich auch mit Rücksicht auf den erforderlichen Literaturnachweis, der hier zu weit führen würde (Untersuchungen von Möbius, Beltrami u. A.), verwiesen.

Die specielle Aufgabe, welche ich weiterhin in Angriff nahm, knüpfte an den Umstand an, dass bei gewöhnlicher Maassbestimmung

*) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872. Programmschrift.

**) Sitzungsberichte der Erlanger phys.-med. Gesellschaft. Nov. 1873.

***) Erlangen 1874.

ein lange erledigtes Problem ist: *alle endlichen Gruppen von Bewegungen zu construiren.* Es schien möglich, für allgemeine projectivische Maassbestimmung dasselbe Problem zu lösen und damit also, was für algebraische Untersuchungen von Wichtigkeit sein muss, *alle endlichen Gruppen linearer Transformationen eines complexen Argumentes* $x + iy$ *zu gewinnen.* Es hängt diese Bestimmung auf das Genaueste mit der Theorie der regulären Körper zusammen, wie noch weiter unten gezeigt werden soll. — Auf diese Weise gelang es, alle binären Formen zu construiren, welche lineare Transformationen in sich besitzen. Unter ihnen ist es eine vom zwölften Grade, vorgestellt durch die Ecken eines regulären *Ikosaëder's,* die im Folgenden besonders untersucht werden soll. Ich entwickele an ihr, als einem Beispiel, *wie man die ganze Theorie dieser Formen,* von der Kenntniss der linearen Transformationen ausgehend, welche dieselben ungeändert lassen, *ohne alle complicirte Rechnung, nur mit den Begriffen der Invariantentheorie operirend, ableiten kann.* Die dabei verwandte Schlussweise hat grosse Aehnlichkeit mit derjenigen, welche Lie und ich in einer gemeinsamen Arbeit (Math. Annalen Bd. IV, p. 50, Geometrisches über vertauschbare lineare Transformationen) entwickelt haben; dass dieselbe hier an einem neuen Gegenstande zur Verwerthung kommt, scheint mir an den folgenden Untersuchungen das Wichtigste zu sein.

Bei der nahen Beziehung, welche diese Dinge zu functionentheoretischen Fragen haben, konnte man von vorneherein erwarten, dass dieselben schon in letzterer Richtung in Angriff genommen seien. Inzwischen habe ich erst ziemlich spät erfahren*), dass in der That dieselben Formen, freilich unter anderen Gesichtspunkten, von Schwarz betrachtet worden sind (Borch. Journ. Bd. 75: Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt). Ich habe gesucht, im Folgenden die mannigfachen Beziehungspunkte zu der Schwarz'schen Arbeit möglichst hervortreten zu lassen. — Auch sei bereits hier einer merkwürdigen anderen Coincidenz gedacht. Die Formeln, welche weiterhin für die Auflösung der Ikosaëdergleichung aufgestellt werden, stimmen, sofern man von der Bedeutung der auftretenden Grössen absieht, genau überein mit solchen, die von Kronecker, Hermite und bes. Brioschi bei Untersuchungen über die allgemeine Gleichung fünften Grades gegeben worden sind.

*) Vergl. Sitzungsberichte der Erlanger phys.-med. Gesellschaft vom Juli und December 1874.

§ 1.

Ueber die Interpretation von $x + iy$ auf der Kugel.

Wenn man auf eine Kugelfläche eine projectivische Maassbestimmung gründet, so hat man unter einer reellen „Bewegung" des Raumes eine Collineation zu verstehen, bei der zwei reelle Gerade fest bleiben, die in Bezug auf die Kugel conjugirte Polaren sind, und von denen daher die eine, welche fortan als *Axe* der Bewegung bezeichnet sein soll, die Kugel in reellen Punkten schneidet, während die zweite ganz ausserhalb verläuft (vergl. z. B. die Arbeit von Lindemann, diese Annalen Bd. VII, p. 56 ff.). Die Bewegung besteht, wenn wir, wie weiterhin fast immer geschehen soll, unsere Aufmerksamkeit auf das Innere der Kugelfläche beschränken, aus einer *schraubenartigen Drehung* um diese Axe, bei der jeder Punkt auf einer gewundenen Linie (Loxodrome) fortschreitet, die auf einer Fläche zweiten Grades verläuft, welche die fundamentale Kugel in den beiden Durchschnittspunkten mit der Axe berührt (diese Punkte sind für die F_2 Umbilici). Diese Loxodromen können insbesondere in Kreise, die schraubenartige Drehung in eine blosse *Rotation* übergehen, die Ebenen der Kreise werden dann die zur Axe conjugirte Gerade enthalten.

Der einzige Specialfall, der hinsichtlich der Lage der Axe eintreten kann, ist der, dass sie, statt die Kugel in getrennten Punkten zu schneiden, dieselbe berührt. Die conjugirte Polare berührt dann die Kugel in demselben Punkte und ist gegen die Axe (in gewöhnlichem Sinne) senkrecht; die Punkte des Raumes rücken während der Bewegung auf Kreisen fort, deren Ebenen durch diese conjugirte Polare hindurchgehen.

Fasst man jetzt die Kugel als Trägerin des Werthgebietes $x+iy$ auf, so entspricht der allgemeinen Bewegung die allgemeine lineare Transformation von $x + iy$, bei der zwei verschiedene Werthe von $x + iy$ ungeändert bleiben; der speciellen Bewegung entspricht der besondere Fall linearer Transformation, bei welchem die beiden festbleibenden Elemente coincidiren. Legt man die beiden im ersten Falle festbleibenden Elemente einer binären Coordinatenbestimmung $z = \frac{x_1}{x_2}$ zu Grunde, so wird die zugehörige Transformation durch $z' = cz$ dargestellt sein, während im zweiten Falle die analytische Formel für die Transformation $z' = z + C$ ist, sofern man $z = \infty$ mit dem doppeltzählenden festbleibenden Elemente zusammenfallen lässt (vergl. diese Annalen Bd. IV, p. 582).

Handelt es sich jetzt darum, *alle Gruppen anzugeben, welche aus einer endlichen Anzahl von linearen Transformationen bestehen*, so werden die dabei in Betracht kommenden Transformationen jedenfalls solche sein

müssen, die sich nach einer endlichen Anzahl von Malen reproduciren. Sie müssen daher, geometrisch zu reden, *Rotationen* sein; algebraisch ausgedrückt: sie müssen sich in der Gestalt $z' = \varepsilon z$ darstellen lassen, wo ε eine Einheitswurzel ist. Ueberdies darf die Grösse der Rotation nur einem rationalen Theile von 2π gleich, ε also nur eine *rationale* Einheitswurzel sein.

Eine *endliche* Gruppe wird von jeder rationalen Rotation durch Wiederholung erzeugt. Aber es giebt auch anderweitige, aus verschiedenartigen Rotationen zusammengesetzte Gruppen. Ein Beispiel geben diejenigen, welche man aus den Rotationen um einen Punkt des Kugel-Inneren bilden kann. Diese Gruppen darf man als bekannt ansehen. Denn die Rotationen um einen solchen Punkt haben bei projectivischer Maassbestimmung denselben Charakter wie in der elementaren Geometrie*), und die Gruppen, welche man, unter Zugrundelegung der letzteren, aus Rotationen um einen Punkt zusammensetzen kann, sind bekannt. Es umfassen dieselben einmal selbstverständlich diejenigen, welche durch Wiederholung derselben Rotation entstehen. Man kann sie noch erweitern, indem man Rotationen hinzunimmt, welche die bei der Rotation festbleibenden beiden Punkte vertauschen. Dann aber gehören hierher die Gruppen derjenigen Rotationen, welche die *regulären Körper:* Tetraëder, Oktaëder, Ikosaëder, oder, was auf dasselbe hinauskommt: Tetraëder, Würfel, Pentagondodekaëder, mit sich selbst zur Deckung bringen. (Es sind damit nicht nur diejenigen Gruppen gemeint, welche aus *allen* solchen Bewegungen bestehen, sondern auch die in ihnen enthaltenen Untergruppen.)

Ich werde nun zeigen, *dass mit diesen Beispielen alle Gruppen der geforderten Beschaffenheit bereits angegeben sind.*

§ 2.

Bestimmung aller Gruppen von endlich vielen linearen Transformationen.

Um den in Rede stehenden Beweis zu führen, überzeuge man sich zunächst, *dass zwei Rotationen nur dann wieder eine Rotation ergeben, wenn sich ihre Axen schneiden.*

Eine Rotation kann man (gegenüber der allgemeinen Schraubenbewegung) dadurch charakterisiren, dass bei ihr Punkte festbleiben, die nicht selbst der Kugelfläche angehören, nämlich alle Punkte der Axe. Soll also die Combination zweier Rotationen wieder eine Ro-

*) In der That sind diejenigen Rotationen, bei denen der Kugelmittelpunkt fest bleibt, auch Rotationen in gewöhnlichem Sinne. Von diesem Umstande ist im Folgenden durchgängig Gebrauch gemacht, um möglichst grosse Anschaulichkeit des Resultats zu erzielen.

tation ergeben, so müssen Punkte existiren, welche aus der neuen Lage, in welche sie die erste Transformation versetzte, vermöge der zweiten Transformation in ihre ursprüngliche Lage zurückgeführt werden. Da sich aber bei einer Rotation jeder Punkt auf einem Kreise bewegt, auf dessen Ebene die Axe im Mittelpunkte senkrecht steht, so sind die Axen der beiden gegebenen Rotationen zwei Perpendikel, die in den Mittelpunkten zweier sich in zwei Punkten schneidender Kreise senkrecht zu deren Ebenen errichtet sind. Das heisst: *die Axen werden sich schneiden*, wie man hier, wo von projectivischer Maassbestimmung die Rede ist, in ganz ähnlicher Weise durch Symmetriegründe beweisen kann, wie man das bei gewöhnlicher Maassbestimmung thun würde. — Dass umgekehrt die Combination zweier Rotationen mit sich schneidenden Axen jedesmal eine Rotation ergiebt, ist an sich deutlich.

Aber weiter überzeugt man sich: *Sollen zwei Rotationen zu einer endlichen Gruppe Anlass geben, so müssen sich ihre Axen innerhalb der Kugel schneiden.* Schnitten sie sich nämlich ausserhalb oder auch auf der Kugel, so würde ein reeller, an die Kugel gehender Kegel bei jeder der beiden Rotationen und also auch bei jeder durch ihre Combination entstehenden Rotation fest bleiben. Aber aus den reellen linearen Transformationen, die einen reellen Kegel der zweiten Ordnung, oder, was auf dasselbe hinauskommt, einen reellen Kegelschnitt in sich überführen, lassen sich keine anderen endlichen Gruppen bilden als diejenigen, die durch Wiederholung *derselben* Rotation um einen festen Punkt des Inneren entstehen. Die Begründung ist genau dieselbe, die man für das entsprechende Theorem der gewöhnlichen ebenen Geometrie angeben kann, welches aussagt, dass man durch Zusammensetzung zweier Drehungen um zwei verschiedene Punkte der Ebene keine endliche Gruppe von Bewegungen erzeugen kann. Der Kern des Beweises für dieses Theorem der elementaren Geometrie und für die entsprechende Behauptung bei projectivischer Maassbestimmung und reellem Fundamentalkegelschnitt liegt übereinstimmend darin, dass in beiden Fällen die Ausdehnung der Ebene eine unendlich grosse ist. Einen ähnlichen Schluss haben wir schon oben angewandt, als wir unter allen Arten von Bewegungen allein die Rotationen als solche bezeichneten, die sich möglicherweise nach endlichmaliger Wiederholung reproduciren: nur bei ihnen ist die Länge der vom einzelnen Punkte zu durchlaufenden Trajectorie eine endliche.

Sollen jetzt *mehrere* Rotationen durch Combination zu einer endlichen Gruppe Anlass geben, so werden ihre Axen, da sie sich gegenseitig im Innern der Kugel schneiden müssen, entweder ein und denselben im Innern gelegenen Punkt gemein haben, oder alle in einer Ebene liegen, so zwar, dass der in der Ebene enthaltene Schnittkreis mit der Kugel alle ihre gegenseitigen Schnittpunkte einschliesst. Allein

man überzeugt sich, dass der letztere Fall ohne den ersteren nicht eintreten kann. Denn zuvörderst: Sollen die betr. Rotationen überhaupt eine endliche Gruppe erzeugen können, so müssen sie aus Drehungen um 180 Grad bestehen. Denn bei jedem anderen Drehungswinkel würden beim Eintritte der Rotation um eine der Axen die übrigen $(n-1)$ in eine solche Lage übergeführt, in der jede $(n-2)$ der ursprünglichen Axen nicht mehr träfe. Man hätte also weiterhin Rotationen zu combiniren, deren Axen sich nicht schneiden, was nichts Endliches geben kann. — Die Rotationen, welche hier möglicherweise in Betracht kommen, haben also auf die ihren Axen gemeinsame Ebene jedenfalls den Einfluss, dass sie dieselbe immer wieder mit sich selbst zur Deckung bringen, und es ist nun die Frage, ob man aus solchen Umlegungen einer Ebene, in welcher ein reeller, fest bleibender Kegelschnitt vorhanden ist, ein endliches System erzeugen kann. Aber das ist wieder, wie die entsprechende Forderung, die man bei gewöhnlicher Maassbestimmung stellen mag, unmöglich wegen des unendlich grossen Flächeninhalts einer solchen Ebene.

Soll also durch Zusammensetzung von Rotationen eine endliche Gruppe entstehen, so müssen sich ihre Axen alle in einem Punkte des Kugel-Inneren schneiden, und also sind durch die oben angeführten Gruppen alle in Betracht kommenden Gruppen erschöpft.

§ 3.

Zusätzliche Bemerkungen.

An diese Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Transformationen im binären Gebiete knüpfe ich hier beiläufig die Bemerkung: *dass zugleich alle endlichen Gruppen von Bewegungen im Nicht-Euklidischen Raume bestimmt sind.* Man hat nämlich für diese sechsfach unendlich vielen Bewegungen das fundamentale Theorem, *dass sie sich aus zwei vertauschbaren Gruppen von nur dreifach unendlich vielen zusammensetzen, deren jede man als Gruppe aller linearer Transformationen eines binären Gebietes auffassen kann.* Diese Zerlegung, welche implicite in der bereits genannten Arbeit von Lindemann (diese Annalen Bd. VII) und in der Habilitationsschrift von Frahm (Tübingen 1873) enthalten ist*), entspricht dem Umstande, dass es specielle lineare Transformationen einer Fläche zweiten Grades in sich giebt, bei denen das eine oder das andere System der Erzeugenden völlig ungeändert bleibt. Weil sich die Erzeugenden jedes Systems rational durch einen Parameter darstellen lassen, sind die Transformationen dieser Art, welche sich auf dasselbe System Erzeugender

*) Vergl. auch Clifford in den Proc. der Mathematical Society 1873.

beziehen, geradezu durch die linearen Transformationen eines binären Gebietes vorgestellt; weil ferner bei jeder Transformation das andere Erzeugendensystem gar nicht afficirt wird, sind die beiderlei Transformationen mit einander vertauschbar. *Man wird alle endlichen Gruppen von Bewegungen des Raumes bekommen, indem man jede endliche Gruppe, die sich aus den Transformationen der einen Art zusammensetzt, combinirt mit allen anderen aus den Transformationen der anderen Art zusammenzusetzenden endlichen Gruppen**).

Ist nun die fundamentale Fläche zweiten Grades insbesondere eine reelle, nicht geradlinige, so entspricht jeder reelle Punkt derselben einer Erzeugenden des einen und auch des anderen Systems. Jede lineare Transformation des einen Erzeugendensystems, welche von der (entgegengesetzt) gleichen Transformation des anderen Erzeugendensystems begleitet ist, wird eine *reelle* lineare Transformation der Fläche in sich darstellen. Daher kann man die reellen Punkte der Fläche als ein Gebiet $x + iy$, die reellen Collineationen der Fläche in sich als lineare Transformationen des $x + iy$ auffassen, *und man hat sonach eine rein projectivische Begründung der Repräsentation einer complexen Veränderlichen auf der Kugel oder überhaupt auf einer nicht geradlinigen reellen Fläche zweiten Grades.* Die endlichen Gruppen *reeller* Bewegungen, welche im Falle einer solchen Fundamentalfläche vorhanden sind, decken sich geradezu mit den endlichen Gruppen linearer Transformationen, die man im binären Gebiete construiren kann.

Es sei hier nun auch der Beziehung gedacht, welche zwischen dem in § 2. gelösten Probleme und einer Fragestellung besteht, zu welcher Schwarz in seiner oben genannten Abhandlung geführt wird, und die ihn eben zum Studium derjenigen Formen hinleitet, welche durch die Ecken der regulären Körper auf der Riemann'schen Kugelfläche vorgestellt werden. Zu dem Zwecke sei es gestattet, vorübergehend einen neuen Ausdruck einzuführen. Wenn man die Kugel durch eine Ebene schneidet, so giebt es eine Collineation des Raumes, welche die Kugel in sich überführt und den ganzen Schnittkreis mit der Ebene ungeändert lässt. Sie besteht in einer perspectivischen Umformung, welche als fest bleibende Ebene die gegebene und als Centrum der Perspectivität ihren Pol in Bezug auf die Kugel benutzt. Diese Transformation soll schlechthin als *Spiegelung* an der gegebenen Ebene bezeichnet werden. Eine Spiegelung ist keine Bewegung, sondern eine solche ergiebt sich erst durch Zusammensetzung zweier Spiegelungen.

*) Nimmt man die Fundamentalfläche der Maassbestimmung imaginär, so werden die so zusammengesetzten Gruppen lauter reelle Bewegungen unter sich befassen können. Den auf einer Kugelfläche befindlichen n Ecken eines regulären Körpers entsprechend bekommt man hier „reguläre" Systeme von n^2 durch den Raum vertheilten Punkten.

Die entsprechende Aenderung von $x + iy$ ist daher auch keine lineare Transformation, sondern ergiebt sich, wenn man mit einer solchen gleichzeitig eine Vertauschung von $+ i$ mit $- i$ verbindet.

Man kann nun überhaupt das Problem aufstellen: *alle endlichen Gruppen von Umänderungen anzugeben, die durch Zusammensetzung verschiedener Spiegelungen entstehen können.* Jede solche Gruppe wird auch eine endliche Gruppe von Bewegungen umfassen, weil zwei Spiegelungen combinirt eine Bewegung ergeben. Dass aber die endlichen Gruppen von Bewegungen, welche man so erhält, in der That alle solchen Gruppen erschöpfen, ist nicht von vorneherein klar, sondern ergiebt sich nur hinterher. Man wird das angeregte Problem zunächst direct in einer Weise zu erledigen haben, welche den in § 2. angestellten Ueberlegungen sehr ähnlich ist. Man zeigt, dass sich alle spiegelnden Ebenen, wenn etwas Endliches entstehen soll, in einem Punkte des Kugel-Innern schneiden müssen, und dann weiter, nachdem man diesen Punkt in den Kugelmittelpunkt verlegt hat, *dass sie nothwendig Symmetrieebenen eines regulären Polyëders sind* (sofern sie nicht alle auf einer festen Ebene senkrecht stehen)*). Die Gruppen von Bewegungen, welche in den so aufgestellten Gruppen von Spiegelungen enthalten sind, stimmen dann in der That mit den in § 2. aufgestellten überein.

Es ist nun ein specieller Fall des hier eingeführten neuen Problems, welcher bei Schwarz vorliegt. Schwarz verlangt — ich bediene mich dabei der eben eingeführten Terminologie — die Bedingung anzugeben, unter der die Spiegelung an nur *drei* verschiedenen Ebenen etwas Endliches liefern kann, und sein Nachweis darf sich dementsprechend darauf beschränken, dass der Schnittpunkt der drei Ebenen im Kugel-Innern zu liegen hat, und die Ebenen, sofern man den Schnittpunkt in den Kugelmittelpunkt verlegt, Symmetrie-Ebenen eines regulären Polyëders sind (wieder abgesehen von den Fällen, in denen die drei Ebenen auf einer vierten Ebene senkrecht stehen oder auch zwei der Ebenen auf der dritten). Die so erzielte Antwort umfasst also in der That dieselben Fälle, die bei der allgemeineren Fragestellung und bei der in § 1, 2 vorliegenden auftreten.

§ 4.

Binäre Formen mit linearen Transformationen in sich.

Binäre Formen, welche mehr als zwei verschiedene Wurzelpunkte besitzen, können nur durch eine endliche Zahl linearer Transformationen in sich übergehen. Denn es giebt nur eine endliche Zahl von Weisen, die Wurzelpunkte einander zuzuordnen, und durch eine solche Zuord-

*) Vergl. z. B. Elling B. Holst in der Tidskrift for Mathematik, 1875, p. 87.

nung ist, unter der gemachten Voraussetzung, eine lineare Transformation, falls überhaupt eine existirt, vollständig bestimmt. Denn zur Kenntniss einer linearen Transformation reicht es aus, zu wissen, was bei ihr aus drei irgendwie angenommenen Punkten wird. Sehen wir daher von solchen binären Formen ab, die nur einen oder nur zwei verschiedene Wurzelpunkte besitzen, so werden wir alle binären Formen mit linearen Transformationen in sich erhalten, indem wir eine Anzahl Wurzelpunkte beliebig annehmen und auf sie die Transformationen irgend einer der vorstehend bestimmten endlichen Gruppen anwenden. Besonderes Interesse werden diejenigen Formen besitzen, welche durch Anwendung der bez. Transformationen aus einem einzelnen Punkte entspringen.

Unter ihnen treten als die einfachsten zunächst die allgemeinen *cubischen* und *biquadratischen* Formen auf. Wie die linearen Transformationen derselben in sich beschaffen sind, wie man in Folge dessen die Lage der zu ihnen gehörigen Covarianten ermitteln kann, ist theils von mir bei früheren Gelegenheiten angegeben (vergl. z. B. diese Annalen Bd. IV, p. 352, dann das oben genannte Programm), theils von Hrn. Wedekind neuerdings entwickelt worden. Es werde daher von diesen Erörterungen nur so viel wiederholt, als zum Verständniss des Folgenden nothwendig ist. Es sei also vor allen Dingen das bereits in der Einleitung berührte Princip hervorgehoben, welches über die Lage der verschiedenen, hier aus der algebraischen Theorie bekannten, Covarianten entscheidet: *dass nämlich die Covarianten durch dieselben linearen Transformationen in sich übergehen müssen, wie die Grundform.*

Betrachten wir eine binäre cubische Form. Da man drei Punkte der Kugel in drei beliebige andere durch lineare Transformation überführen kann, so denke man sich die drei Wurzelpunkte der Form f als äquidistante Punkte eines grössten Kreises, der der Aequator heissen soll. Dann bestehen die 6 linearen Transformationen, welche f in sich überführen, aus Drehungen durch 120 Grad um die die beiden Pole verbindende Axe und aus Drehungen durch 180 Grad um diejenigen drei Durchmesser, welche bez. je einen Wurzelpunkt von f enthalten. Ertheilt man den Wurzelpunkten von f die „geographische“ Länge

$$0^0, \quad 120^0, \quad 240^0,$$

so sind die sechs Punkte, welche aus einem beliebig angenommenen entstehen, dessen Breite α, dessen Länge β ist, dargestellt durch:

$$\begin{array}{lll} \alpha, \beta, & \alpha, \beta + 120^0, & \alpha, \beta + 240^0, \\ -\alpha, -\beta, & -\alpha, -\beta + 120^0, & -\alpha, -\beta + 240^0. \end{array}$$

Zu diesen Gruppen von sechs Punkten gehört dreifach zählend das

Paar der Pole, *dasselbe stellt also die einzige quadratische Covariante, welche es giebt, die Covariante* Δ *vor**). Andererseits findet sich unter ihnen doppeltzählend das Tripel der Halbirungspunkte der von den Wurzelpunkten f auf dem Aequator bezeichneten Strecken; *sie repräsentiren aus analogen Gründen die Covariante* Q.

Um sich von dem Formensysteme einer *biquadratischen* Form f Rechenschaft zu geben, erinnere man sich, dass die Covariante sechsten Grades T aus drei paarweise zu einander harmonischen Punktepaaren besteht. Dieselbe kann daher repräsentirt werden durch diejenigen sechs Punkte, in denen die Kugel von drei zu einander rechtwinkligen Durchmessern geschnitten wird. Die Lage der vier Wurzelpunkte von f, wie überhaupt der vier Wurzelpunkte einer beliebigen Form aus der Schaar $\varkappa f + \lambda H$, ist dann am einfachsten anzugeben, indem man auf dieses Axenkreuz eine gewöhnliche Coordinatenbestimmung gründet. Bedeuten x, y, z die Coordinaten eines der Wurzelpunkte von $\varkappa f + \lambda H$, so sind

$$\begin{aligned} x,\ &-y,\ -z,\\ -x,\ &\ \ y,\ -z,\\ -x,\ &-y,\ \ \ z \end{aligned}$$

die übrigen; denn es sind je zwei solche Punkte zu einem Punktepaare von T harmonisch. Die drei linearen Transformationen, welche, abgesehen von der identischen Transformation, die biquadratische Form in sich überführen, und die dadurch geometrisch definirt sind, dass sie die Wurzelpunkte je paarweise vertauschen, sind sonach dargestellt durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel zweier Coordinaten**).

Unter den Quadrupeln $\varkappa f + \lambda H$ finden sich, sofern man von denjenigen absieht, die doppeltzählend durch ein Punktepaar von T dargestellt sind, noch zweierlei, die eine grössere Zahl linearer Transformationen in sich gestatten: diejenigen drei, welche ein harmonisches, und die zwei, welche ein äquianharmonisches Doppelverhältniss besitzen. Im ersten Falle verschwindet eine der drei Coordinaten x, y, z und die anderen beiden werden ihrem absoluten Werthe nach gleich; im zweiten Falle sind alle Coordinaten bis aufs Vorzeichen gleich zu setzen: *die Wurzelpunkte der äquianharmonischen Form bilden ein reguläres Tetraëder.* Das zweite zu demselben Axenkreuze gehörige reguläre Tetraëder repräsentirt das zugehörige H.

---

*) Wegen dieser und ähnlicher Bezeichnungen vergl. immer Clebsch, Theorie der binären Formen.

**) Vergl. die Arbeit des Hrn. Wedekind, sowie eine neuere Mittheilung desselben (Erlanger Berichte Juli 1875), in der er aus den Wurzelpunkten von f diejenigen von H construirt.

Es sind mit diesen Erörterungen zugleich diejenigen Formen besprochen, die durch das reguläre *Oktaëder* und den *Würfel* dargestellt werden. Das Oktaëder repräsentirt eine Form sechsten Grades von der Art der Covariante T einer biquadratischen Form. Die Zahl der Bewegungen, welche ein Oktaëder mit sich zur Deckung bringen, beträgt 24; die Gruppen von 24 Punkten, welche durch diese Bewegungen aus einem einzelnen Punkte erzeugt werden, umfassen jedesmal sechs der zum Oktaëder gehörigen biquadratischen Formen $\varkappa f + \lambda H$: solche sechs, welche gleiches Doppelverhältniss haben. Unter ihnen findet sich doppeltzählend eine Gruppe von 12 Punkten, bestehend aus den drei harmonischen Quadrupeln $\varkappa f + \lambda H$, und dreifach zählend eine Gruppe von 8 Punkten, die aus den zwei äquianharmonischen Quadrupeln besteht und die Ecken des zugehörigen *Würfels* darstellt.

Von regulären Körpern bleiben noch die beiden zusammengehörigen: das *Ikosaëder* und das *Pentagondodekaëder* zu nennen. Die Zahl der linearen Transformationen dieser Formen in sich beträgt 60. Unter den Gruppen von je 60 durch diese Transformationen zusammengeordneten Punkten befinden sich die Eckpunkte des Ikosaëders fünfmal, die des Dodekaëders dreimal zählend. Es findet sich ferner noch eine doppeltzählende Gruppe von 30 Punkten, mit der dann aber die mehrfach zählenden Gruppen erschöpft sind. Man erhält diese Punkte folgendermassen. Die 15 Ebenen, welche man durch den Kugelmittelpunkt und bez. 4 sich paarweise gegenüberliegende Ecken des Ikosaëders hindurchlegen kann, lassen sich in fünf Tripel von zu einander rechtwinkligen zerlegen. Die 15 Durchschnittslinien der Ebenen dieser Tripel schneiden die gemeinten 30 Punkte aus.

Endlich sind noch solche Punktsysteme zu erwähnen, welche aus einem einzelnen Punkte durch Wiederholung einer beliebigen Rotation durch einen rationalen Theil von 2π hervorgehen. Sie entsprechen den *Kreistheilungsgleichungen.* Combinirt man mit diesen Rotationen noch eine durch 180 Grad um eine gegen die ursprüngliche Rotationsaxe senkrechte, sie schneidende Linie, so entstehen Gruppen von der doppelten Punktzahl. Führt man, wie oben bei Betrachtung der cubischen Form, eine Bestimmung der Punkte durch geographische Breite und Länge aus, so werden die Charaktere der Punkte:

$$\alpha,\ \beta + \frac{2k\pi}{n}, \qquad -\alpha,\ -\beta + \frac{2k\pi}{n}.$$

Die Untersuchung der Kreistheilungsgleichungen, wie derjenigen, die sich auf den letztangeführten Fall beziehen, kann genau nach den weiter entwickelten Methoden erfolgen; wir führen dieselbe aber weiterhin der Kürze wegen nicht aus.

§ 5.

Ein allgemeines Princip. Erste Anwendung auf Oktaëder und Ikosaëder.

Es seien $\Pi = 0$, $\Pi' = 0$ die Gleichungen zweier Punkt-Aggregate, welche aus zwei irgendwie angenommenen Punkten durch Anwendung der linearen Transformationen irgend einer der aufgezählten Gruppen hervorgehen: mit der Festsetzung, dass Π, bez. Π' die geeignete Potenz der betr. Gleichung vorstellt, wenn der anfängliche Punkt zufällig so gewählt ist, dass er eine mehrfach zählende Gruppe erzeugt. Dann behaupte ich, dass

$$\varkappa\Pi + \varkappa'\Pi' = 0,$$

unter $\frac{\varkappa}{\varkappa'}$ einen Parameter verstanden, *überhaupt alle Punktsysteme darstellt, welche durch die betr. linearen Transformationen aus einem einzelnen Punkte hervorgehen.* — Es werden sich nämlich Π und Π' bei Anwendung der linearen Transformationen allerdings um Factoren ändern können, aber diese Factoren müssen bei beiden dieselben sein. Es stellt also

$$\varkappa\Pi + \varkappa'\Pi' = 0$$

jedenfalls ein Punktsystem vor, welches durch die Transformation nicht geändert wird. Aber es giebt nur einfach unendlich viele Punktsysteme der gemeinten Art, und über den Werth von $\frac{\varkappa}{\varkappa'}$ ist gar nichts festgesetzt; indem wir also dem Parameter alle Werthe ertheilen, erhalten wir alle Punktsysteme, die es überhaupt giebt.

Eine Anzahl bekannter Eigenschaften der aufgezählten Formen sind ein Ausfluss dieser Bemerkung. Ich erinnere daran, dass bei den binären cubischen Formen zwischen f^2, Q^2 und Δ^3 eine lineare Relation besteht, dass bei den binären biquadratischen sich alle zu demselben T gehörigen Formen durch $\varkappa f + \lambda H$ darstellen lassen. Ist ferner etwa $f = 0$ die Gleichung eines Oktaëders, $H = 0$ der zugehörige Würfel, $T = 0$ die oben genannte Punktgruppe von 12 Punkten, so hat man eine homogene lineare Relation zwischen f^4, H^3, T^2. Und in der That findet sich gelegentlich der Untersuchung einer solchen Form f eine derartige Relation bei Clebsch (Theorie der binären Formen p. 450) angegeben. Andererseits leitet Schwarz dieselbe in seiner Arbeit ab unter der besonderen Voraussetzung, dass f in einer bestimmten kanonischen Form gegeben sei. Schwarz notirt endlich auch die homogene lineare Relation, welche zufolge des ausgesprochenen Princips zwischen f^5, H^3, T^2 bestehen muss, wenn $f = 0$ ein Ikosaëder vorstellt, $H = 0$ das zugehörige Pentagondodekaëder, $T = 0$ die oben eingeführte Gruppe von 30 Punkten*).

*) Die Methode, welche Schwarz dabei benutzt, ist, abgesehen von der

Ich werde nun zunächst, unter Beschränkung auf *Oktaëder* und *Ikosaëder*, zeigen, wie dieser Satz sofort gestattet, eine Uebersicht über die bei ihnen vorhandenen rationalen Covarianten zu erhalten. Die Beschränkung auf die genannten beiden Formen geschieht hier und im Folgenden der Einfachheit wegen. Das Ikosaëder ist es eigentlich, welches das Hauptinteresse auf sich zieht; das Oktaëder wird aber immer vorab untersucht, weil die bei ihm stattfindenden Verhältnisse beim Ikosaëder als bekannt vorausgesetzt werden müssen.

Zuvörderst ist ersichtlich, dass Oktaëder und Ikosaëder nur *eine Invariante* besitzen. Da man nämlich z. B. jedes Oktaëder mit jedem anderen durch lineare Transformation zur Deckung bringen kann, so haben alle absoluten Invarianten, die man aufstellen könnte, gegebene numerische Werthe, und es drücken sich demnach alle denkbaren Invarianten mit Hülfe numerischer, von vornherein angebbarer, Grössen durch Potenzen einer allein beizubehaltenden Invariante aus.

Betrachten wir jetzt eine beliebige, rationale Covariante. Dieselbe muss aus lauter Gruppen zusammengehöriger Punkte bestehen und also, ev. nach Erhebung in die richtige Potenz, als ein Aggregat von Factoren $\varkappa\Pi + \varkappa'\Pi'$ darstellbar sein, d. h. als eine homogene ganze Function von Π und Π'. Die Coefficienten dieser Function können, wenn Π und Π' dieselbe Dimension in den Coefficienten der Grundform besitzen, wie vorausgesetzt sein soll, bei der ihnen begrifflich zukommenden invarianten Bedeutung, nur durch numerische Factoren von einer Potenz der einen, allein vorhandenen Invariante verschieden sein. Zieht man diese Potenz als gemeinsamen Factor vor, so besteht die Covariante im Uebrigen aus einem homogenen Aggregate von Π und Π'. Auf diese Weise erschliesst man:

Alle rationalen ganzen Covarianten unserer Form drücken sich, abgesehen von einer etwa vortretenden Potenz der einen überhaupt vorhandenen Invariante, rational und ganz aus durch diejenigen Formen, welche

---

Form, von der im Texte genannten nicht so sehr verschieden. Man kann sie folgendermassen aussprechen. Man setze

$$y = -\frac{\varkappa'}{\varkappa} = \frac{\Pi}{\Pi'}$$

und bilde vermöge dieser Substitution das Gebiet der gegebenen Kugel auf das Gebiet der complexen Variabeln y ab. Einem Systeme von Symmetriekreisbögen, das auf der Kugel verläuft, entspricht dabei, wie man zeigen kann, ein Kreis. Man hat dann ferner das allgemeine Gesetz anzuwenden: dass nämlich eine conforme Abbildung, die ein Stück einer Kreisperipherie in ein ebensolches überführt, immer die Eigenschaft besitzt, symmetrisch zur ersteren gelegene Punkte in solche zu verwandeln, die für die zweite symmetrisch sind. Eine zweimalige Anwendung dieses Satzes ergiebt den im Texte aufgestellten Satz, insofern eine zweimalige Uebertragung durch Symmetrie (Spiegelung) eine lineare Transformation vorstellt.

die unter den zugehörigen Punktsystemen enthaltenen mehrfach zählenden darstellen. Die letzteren also bilden das volle System der Covarianten.

Ich hebe ausdrücklich den Unterschied hervor, der zwischen dieser Ueberlegung und den allgemeinen Methoden besteht, durch welche Gordan gelehrt hat, für eine binäre Form beliebigen Grades ein volles Formensystem aufzustellen. Bei Gordan sind immer Formen mit allgemeinen Coefficienten vorausgesetzt; hier handelt es sich wesentlich um specielle Formen. (Vergl. Gordan: Ueber das Formensystem binärer Formen. Leipzig 1875. Schlussbemerkung.)

§ 6.

Das Formensystem des Oktaëders und des Ikosaëders.

Die allgemeine Methode, welche weiterhin immer angewandt werden soll, ist nun die: *Auf Grund des im vorstehenden Paragraphen angegebenen Princips werden wir gewisse Relationen der Art nach erschliessen und dann die in ihnen vorkommenden Zahlen-Coëfficienten durch Ausrechnung an einer kanonischen Form bestimmen.*

Die kanonischen Formen, welche wir dabei für Oktaëder und Ikosaëder zu Grunde legen, sind dieselben, die sich bei Schwarz angegeben finden:

$$\text{Oktaëder: } f = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4),$$
$$\text{Ikosaëder: } f = x_1 x_2 (x_1^{10} + 11 x_1^5 x_2^5 - x_2^{10}),$$

man verificirt sie leicht durch Betrachtung der Lagenverhältnisse der Wurzelpunkte.

Betrachten wir jetzt das Oktaëder f. Setzen wir

$$f = a_x^6,$$

so lehrt die allgemeine Invariantentheorie Bildungen zweiten Grades in den Coefficienten aufstellen:

$$(ab)^6 = A, \quad (ab)^4 a_x^2 b_x^2, \quad (ab)^2 a_x^4 b_x^4 = H.$$

Wir werden hier zunächst erschliessen, dass die zweitangeführte Bildung identisch verschwindet. Denn unter den zu einem Oktaëder gehörigen Gruppen zusammengeordneter Punkte findet sich keine mit nur vier verschiedenen Punkten. Andererseits kann man dieses identische Verschwinden als Charakterisirung der Oktaëdergleichung auffassen. Jede Form sechsten Grades, welche isolirte Wurzelpunkte besitzt (Gleichungen mit verschwindender Discriminante mögen einen Augenblick ausgeschlossen sein), kann auf die Form transformirt werden: $x_1 x_2 \varphi_4$, wo φ_4 eine Function vierten Grades in x_1, x_2 ist, in welcher x_1^4 und $-x_2^4$ der Coefficient 1 beigelegt werden kann. Wenn man dann die vierte Ueberschiebung $(ab)^1 a_x^2 b_x^2$ wirklich berechnet

und ihr identisches Verschwinden verlangt, so zeigt sich, dass man eben die für das Oktaëder angegebene kanonische Form erhält:

Eine Gleichung sechsten Grades $f = 0$ mit nicht verschwindender Discriminante soll eine Oktaëdergleichung heissen, wenn die vierte Ueberschiebung von f mit sich selbst verschwindet.

Fragen wir weiter, was H bedeutet. H kann nicht identisch verschwinden (sonst würden, nach einem bekannten Satze, alle Wurzelpunkte von f coincidiren). Da aber unter den Gruppen zusammengehöriger Punkte, wie sie beim Oktaëder auftreten, nur eine aus blos acht Punkten besteht: diejenige, welche durch die Ecken des zugehörigen Würfels dargestellt wird, *so ist* $H = 0$ *die Gleichung dieses Würfels.*

Dieselbe Schlussweise zeigt, *dass die Functionaldeterminante* T *von* f *und* H, *eine Form vom* 12^{ten} *Grade, gleich Null gesetzt, das Product der drei zu* $f = 0$ *gehörigen harmonischen Quadrupel vorstellt.*

Es fragt sich jetzt, ob die Invariante A verschwindet. Diese Frage beantwortet sich verneinend durch Ausrechnung an der kanonischen Form*). *Es giebt also eine Invariante zweiten Grades in den Coefficienten* $A = (ab)^6$. Eine solche wird aber gerade verlangt, um die lineare Relation, welche nach den obigen Erörterungen zwischen f^4, H^3, T^2 stattzufinden hat, auch in den Coefficienten homogen herzustellen. Die bereits erwähnte, bei Clebsch angegebene Relation ist in der That diese:

$$\frac{Af^4}{36} + \tfrac{1}{2} H^3 + T^2 = 0$$

Auf Grund der Bemerkungen des vorigen Paragraphen kann man jetzt behaupten, *dass* f, H, T, A *das volle Formensystem von* f *ausmachen.* Es ist nur noch zu zeigen, dass nicht A, ev. bis auf einen numerischen Factor, das volle Quadrat eines rationalen Ausdrucks ersten Grades in den Coefficienten ist. Man überzeugt sich von der Unmöglichkeit, A so darzustellen, an einem Beispiele, indem man etwa f in der Form

$$x_1 x_2 (\lambda x_1^4 + \mu x_2^4)$$

voraussetzt.

---

*) Für $f = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4) = a_x^6$ ergiebt sich:

$$A = (ab)^6 = \tfrac{1}{3},$$
$$H = (ab)^2 a_x^4 b_x^4 = -\tfrac{1}{8} (x_1^8 + 14 x_1^4 x_2^4 + x_2^8),$$
$$T = [f, H] \quad = -\tfrac{1}{104} (x_1^{12} - 33 x_1^8 x_2^4 - 33 x_1^4 x_2^8 + x_2^{12}).$$

Diese Ausdrücke befriedigen in der That die weiter im Texte angegebene Relation:

$$\frac{Af^4}{36} + \tfrac{1}{2} H^3 + T^2 = 0.$$

Da die Discriminante der Oktaëdergleichung nicht identisch verschwindet, andererseits vom Grade 10 in den Coefficienten sein muss, so ist sie bis auf einen Zahlenfactor $= A^5$. Verschwindet also A, so rücken zwei Wurzelpunkte des Oktaëders zusammen, und es ist dann, bei den zwischen den Wurzeln herrschenden Doppelverhältniss-Relationen, leicht zu schliessen, dass überhaupt fünf Wurzelpunkte zusammenrücken, während der sechste irgendwo abgetrennt liegt. Eine noch speciellere Form erhalten wir, wenn wir auch noch das identische Verschwinden von H verlangen: indem dann alle Wurzelpunkte von f zusammenrücken, wird f die sechste Potenz eines linearen Ausdrucks.

Betrachten wir ferner das Ikosaëder:

$$f = a_x^{12}.$$

Man überzeugt sich durch ganz ähnliche Schlüsse, wie soeben beim Oktaëder, dass von den Ueberschiebungen von f über sich selbst, jedenfalls diese:

$$(ab)^4 a_x^8 b_x^8, \quad (ab)^8 a_x^4 b_x^4, \quad (ab)^{10} a_x^2 b_x^2$$

identisch verschwinden. Durch directe Ausrechnung findet man in Anlehnung an die oben aufgeführte kanonische Form umgekehrt:

Eine Form zwölften Grades mit nicht verschwindender Discriminante stellt, gleich Null gesetzt, ein Ikosaëder vor, wenn ihre vierte Ueberschiebung mit sich selbst verschwindet.

Dagegen darf die Hesse'sche Form

$$H = (ab)^2 a_x^{10} b_x^{10}$$

nicht identisch verschwinden, weil sonst f ein zwölfte Potenz wäre; *sie repräsentirt daher das bereits mit demselben Buchstaben bezeichnete Pentagondodekaëder.* Aus ähnlichen Gründen folgt: *dass die von uns mit T bezeichnete Covariante vom 30ten Grade die Functionaldeterminante von f und H repräsentirt.*

Aber untersuchen wir ferner die noch bleibenden Ueberschiebungen von f über sich selbst:

$$(ab)^{12}, \quad (ab)^6 a_x^6 b_x^6.$$

Die erstere ist eine Invariante, die wiederum als A bezeichnet werden soll. Dass sie nicht verschwindet, ergiebt sich durch Ausrechnung an der kanonischen Form. Aber auch die zweite Bildung — sie mag Π heissen — verschwindet, zufolge Ausrechnung, nicht identisch. Sie kann daher, als vom 12ten Grade, von f selbst nur um einen Factor verschieden sein:

$$\Pi = B \cdot f.$$

Dieses B ist sonach definirt *als eine rationale Invariante ersten Grades in den Coefficienten von f*; sie muss, bis auf einen numerischen Factor, gleich $\sqrt{A}$ sein. Aber es fragt sich, ob man B als eine ganze, rationale Function der Coefficienten von f darstellen kann. Dies zeigt sich an

einem Beispiele als unmöglich. Man denke nämlich f zunächst in der oben gegebenen kanonischen Form und substituire dann

$$x_1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2,$$
$$x_2 = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2.$$

Für die neue Form wird B bis auf einen Zahlenfactor gleich der sechsten Potenz der Substitutionsdeterminante, also gleich $(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^6$ sein müssen; aber es zeigt sich unmöglich, diesen Ausdruck aus den Coefficienten des neuen f linear zusammenzusetzen.

Das Vorhandensein einer in den Coefficienten rationalen Invariante vom ersten Grad wird auch durch die lineare Relation verlangt, welche nach dem Früheren zwischen f^5, H^3, T^2 stattfinden soll. Denn während H^3 und T^2 vom sechsten Grade in den Coefficienten von f sind, hat f^5 nur den fünften Grad und man muss ihm also die Invariante B als Factor zusetzen.

Man hat eine Relation

$$\varkappa \cdot Bf^5 + \lambda H^3 + \mu T^2 = 0,$$

wo $\varkappa$, λ, μ *numerische Constanten sind**).

---

*) Für die oben angegebene kanonische Form

$$f = x_1^{11}x_2 + 11\, x_1^6 x_2^6 - x_1 x_2^{11}$$

findet sich:

$$A = \frac{25}{84}, \qquad B = -\frac{5}{84},$$

ferner:

$$12^2 \cdot H = -(x_1^{20} + x_2^{20}) + 228\,(x_1^{15}x_2^5 - x_1^5 x_2^{15}) - 494\, x_1^{10}x_2^{10},$$
$$12 \cdot T = (x_1^{30} + x_2^{30}) + 522\,(x_1^{25}x_2^5 - x_1^5 x_2^{25}) - 10005\,(x_1^{20}x_2^{10} + x_1^{10}x_2^{20}),$$

und also

$$7 \cdot 12^2 \cdot B \cdot f^5 + 5 \cdot 12^4 \cdot H^3 + 5 \cdot T^2 = 0.$$

Vermöge der so geschriebenen Relation ist man in der Lage, die von Schwarz l. c. angedeutete algebraische Reducirbarkeit des Integrals

$$\int \frac{(x\,dx)}{\sqrt[6]{f}}$$

auf ein elliptisches Integral folgendermassen durchzuführen. Man setze:

$$z_1 = H, \qquad z_2 = \sqrt[3]{Bf^5}.$$

So ist

$$(z\,dz) = \frac{1}{12} \cdot B^{\frac{1}{3}} \cdot f^{\frac{2}{3}} \cdot T$$

und also unser Integral

$$= \int \frac{12\,(z\,dz)}{B^{\frac{1}{3}} \cdot f^{\frac{5}{6}} \cdot T}$$

$$= \int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[6]{B}} \cdot \frac{(z\,dz)}{\sqrt{-720\, z_1^3 z_2 + 7\, z_2^4}}.$$

Andererseits ergiebt sich:

Das volle Formensystem von f besteht aus f, Π, H, T und *A. Zwischen seinen Formen besteht neben der vorstehenden Relation noch diese* (in welcher der Werth des numerischen Coefficienten der kanonischen Form entnommen ist):

$$84\,\Pi^2 = Af^2.$$

Die Untersuchung specieller Formen des Ikosaëders hat folgende Resultate. Die Discriminante ist proportional zu A^{11}. Verschwindet A, so fallen also Wurzelpunkte von f zusammen, und zwar fallen gleich 11 Wurzelpunkte zusammen, während der zwölfte noch beliebig bleibt. Auch er vereinigt sich mit den elf übrigen, sobald H identisch verschwindet.

Es mag zum Schlusse noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass die drei Formen f, H, T, welche nach dem Vorstehenden für Oktaëder und Ikosaëder eine so wichtige Rolle spielen, auch bei der allgemeinen Vertheilung der Covarianten einer beliebigen binären Form, wie sie Gordan in seiner neuesten Schrift gegeben hat (Ueber das Formensystem binärer Formen, Leipzig 1875), eine zusammengehörige Gruppe bilden; sie constituiren, nach der dort angewandten Bezeichnung, das System A_1 von f.

§ 7.

Irrationale Covarianten des Oktaëders. Die Auflösung der Oktaëdergleichung.

Dieselben Principien, welche im vorstehenden Paragraphen zur Untersuchung der rationalen Covarianten von Oktaëder und Ikosaëder verwandt wurden, ergeben eine Menge von Relationen für irrationale Covarianten derselben. Von diesen Beziehungen sollen hier einige wenige entwickelt werden, welche für die Auflösung der Oktaëder- und Ikosaëdergleichung von Bedeutung sind. Wenn die Auflösung der Oktaëdergleichung, die sich algebraisch gestaltet, auch schon bekannt ist*), so mag sie hier des Zusammenhangs und der späteren Benutzung wegen doch dargestellt werden.

Beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung des Oktaëders, weil sich bei ihm eine Reihe der auch beim Ikosaëder vorhandenen Beziehungen einfacher darstellen lässt. Ich behaupte: *Jede Ecke des Oktaëders drückt sich rational durch die gegenüberstehende aus.*

---

*) Vergl. Clebsch und Gordan, Annali di Matematica Serie 2, t. I, und Clebsch, Binäre Formen, p. 451.

Sei nämlich, um diese Darstellung nur auf eine Weise zu entwickeln*), $H_x^8 = 0$ der zum Oktaëder gehörige Würfel, x eine Oktaëderecke, so ist

$$H_x^7 H_y = 0$$

die Gleichung der gegenüberstehenden Ecke. Der Beweis ist einfach dieser: Die hingeschriebene Polare ist simultane Covariante des Oktaëders und des Punktes x. Das System der letzteren, und also auch jede Covariante derselben, geht aber durch vier lineare Transformationen in sich über, entsprechend Drehungen durch 90 Grad um die Verbindungsgerade der Ecke x mit der gegenüberliegenden. Der durch die hingeschriebene Polare repräsentirte Punkt kann daher nur entweder mit x selbst oder mit der gegenüberliegenden Ecke coincidiren, und die erstere dieser beiden Möglichkeiten ist zu verwerfen, weil dann x der Gleichung $H = 0$ genügen würde.

Auf Grund dieser Darstellung wird man schliessen, *dass die Spaltung des Oktaëders in die drei Paare gegenüberliegender Ecken von einer rationalen Gleichung dritten Grades abhängt.* Eine solche kann man in folgender Weise aufstellen.

Es sei φ eins der Punktepaare, $\frac{f}{\varphi}$ das Aggregat der übrigen vier Wurzelpunkte von f. Beide Formen gehen durch 8 von den 24 linearen Transformationen, welche f mit sich zur Deckung bringen, in sich über. Dabei vertauschen sich**) die 8 Ecken des Würfels H unter einander. *Man wird also*, da unter den Gruppen zusammengehöriger 8 Punkte φ viermal, $\frac{f}{\varphi}$ zweimal zählt, *H in der Form darstellen können:*

$$H = \varkappa \varphi^4 + \varkappa' \cdot \left(\frac{f}{\varphi}\right)^2.$$

Betrachtet man hier φ^2 als Unbekannte, so ist dies eine Gleichung dritten Grades der gesuchten Art. Dieselbe enthält, wie alle weiterhin aufzustellenden Resolventen, noch die Veränderlichen x_1, x_2 als willkührliche

*) Genau geradeso beweist man, dass

$$H_x^6 H_y^2 = 0, \qquad H_x^5 H_y^3 = 0$$

dieselbe Ecke bez. zweimal und dreimal zählend vorstellen; Analoges leisten die Polaren

$$T_x^{11} T_y = 0, \qquad T_x^{10} T_y^2 = 0, \qquad T_x^9 T_y^3 = 0$$

der Covariante $T = T_x^{12}$. Andererseits repräsentiren, für $f = a_x^6$, die Polaren:

$$a_x^4 a_y^2 = 0, \qquad a_x^3 a_y^3 = 0, \qquad a_x^2 a_y^4 = 0,$$

unter x eine Oktaëderecke verstanden, das Product dieser Ecke in die einmal, zweimal, dreimal gezählte gegenüberliegende.

**) Man verificirt solche Angaben immer sofort an einem Modell.

Parameter. Ertheilt man ihnen feste Werthe, so erfährt man durch Auflösung der Gleichung den numerischen Werth, welchen φ^2 dementsprechend erhält. Will man φ^2 als Function der x kennen, so hat man dieselbe Berechnung für zwei weitere Werthepaare durchzuführen, die man, um neue Irrationalitäten zu vermeiden, dem ursprünglichen benachbart wählen kann.

Zur wirklichen Herstellung der cubischen Gleichung gehen wir auf die kanonische Form zurück:

$$f = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4).$$

Eins der Punktepaare φ ist dann:

$$\varphi = 2 x_1 x_2,$$

wo der absolute Werth so genommen ist, dass die Determinante von φ gleich -1. Dann folgt aus dem oben angegebenen Werthe von H:

$$H = -\frac{1}{18} \cdot \varphi^4 - \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{f}{\varphi}\right)^2,$$

und setzt man jetzt etwa

$$p = \frac{\varphi^2}{\sqrt[3]{f^2}},$$

so kommt die Gleichung:

$$p^3 + 18 \frac{H}{\sqrt[3]{f^4}} \cdot p + 4 = 0.$$

Von ihr gehen wir sofort zu derjenigen über, die für ein beliebiges Coordinatensystem gilt, in dem wir durch Einführen der Invariante A des Oktaëders, die für die kanonische Form den Werth $\frac{1}{3}$ hat, und der Determinante Δ der quadratischen Form φ, für welche wir zunächst den Werth -1 annahmen, homogen machen. So erhält man:

Bedeutet φ die durch ein Paar gegenüberstehender Ecken des Oktaëders vorgestellte quadratische Form, Δ deren Determinante, und setzt man:

$$p = -\sqrt[3]{\frac{3A}{f^2}} \cdot \frac{\varphi^2}{\Delta},$$

so hat man:

$$p^3 + 18 \frac{H}{\sqrt[3]{3Af^4}} \cdot p + 4 = 0.$$

Aus dieser Gleichung findet man, indem man noch zur Vereinfachung des Resultats von der zwischen f, H, T bestehenden Relation Gebrauch macht:

$$p = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{f^2\sqrt{-A} + 6T}{f^2\sqrt{-A}} + \sqrt[3]{2} \cdot \frac{f^2\sqrt{-A} - 6T}{f^2\sqrt{-A}},$$

ein Resultat, welches mit dem bei Clebsch p. 451 auf anderem Wege abgeleiteten übereinstimmt.

§ 8.

Analoge Untersuchungen beim Ikosaëder*).

Wie beim Oktaëder wird man auch beim Ikosaëder jede Ecke rational durch die gegenüberliegende darstellen können und also schliessen, dass die Zerspaltung des Ikosaëders f in die sechs Paare gegenüberstehender Punkte von einer Gleichung sechsten Grades abhängt. Sei φ ein solches Paar. Unter den 60 Bewegungen, welche f mit sich zur Deckung bringen, finden sich 10, welche φ ungeändert lassen. Dieselben vertauschen die 10 Punkte $\frac{f}{\varphi}$ alle unter einander. Andererseits vertheilen sich mit Bezug auf sie die 20 Punkte von H in zwei Gruppen von je 10. Man wird also H als Product zweier Factoren darstellen können, die aus φ^5 und $\frac{f}{\varphi}$ linear zusammengesetzt sind, d. h. man wird setzen können:

$$H = \varkappa \varphi^{10} + \lambda \varphi^4 \cdot f + \mu \frac{f^2}{\varphi^2}.$$

Betrachtet man hier φ^2 als Unbekannte, so hat man eine Gleichung sechsten Grades der geforderten Beschaffenheit.

Zur fertigen Herstellung derselben gehen wir zu der kanonischen Form zurück:

$$f = x_1 x_2 (x_1^{10} + 11 x_1^5 x_2^5 - x_2^{10}).$$

Eins der Paare φ, mit der Determinante -1 genommmen, ist dann etwa

$$\varphi = 2 x_1 x_2.$$

Sodann entnimmt man dem oben angegebenen Werthe von H:

$$12^2 \cdot H = -\frac{5^5}{2^{10}} \cdot \varphi^{10} + \frac{5^3}{2^3} \cdot \varphi^4 \cdot f - \frac{4 f^2}{\varphi^2},$$

und setzt man jetzt:

$$\pi = -\frac{5 \varphi^2}{4\sqrt[3]{f}},$$

so kommt:

$$\pi^6 + 10 \pi^3 - \frac{12^2 H}{\sqrt[3]{f^5}} \cdot \pi + 5 = 0.$$

Um zu einem beliebigen Coordinatensysteme überzugehen, hat man die Determinante Δ von φ, die gleich -1 genommen wurde, und die Invariante B von f, welche für die kanonische Form gleich $-\frac{5}{84}$ ist, einzuführen.

*) Vergl. Erlanger Berichte. Juli 1875.

Man setze also:

$$\pi = -\frac{5}{4}\sqrt[3]{\frac{84}{5}\cdot\frac{B}{f}\cdot\frac{\varphi^2}{\Delta}},$$

so kommt:

$$\pi^6 + 10\pi^3 + \frac{720H}{\sqrt[3]{2100Bf^5}}\cdot\pi + 5 = 0,$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

Man kann aber ferner beim Ikosaëder *eine Resolvente fünften Grades* aufstellen, welche aus folgendem geometrischem Probleme erwächst: die 30 Ecken der Covariante T vertheilen sich, wie wiederholt hervorgehoben, auf fünf reguläre Oktaëder; man soll diese Oktaëder trennen.

Sei t eins derselben. Dasselbe geht durch 12 der 60 Bewegungen, welche das Ikosaëder f mit sich zur Deckung bringen, in sich über. Bei diesen 12 Bewegungen vertauschen sich die Ecken von f unter einander. Andererseits spalten sich die 24 Punkte $\frac{T}{t}$ in zwei Gruppen von je 12 zusammengehörigen. Man wird also setzen können:

$$\frac{T}{t} = \varkappa t^4 + \lambda t^2 f + \mu f^2,$$

und dies ist, wenn man t als Unbekannte betrachtet, eine Gleichung fünften Grades der verlangten Art.

Die Ausrechnung gestaltet sich mit Hülfe der kanonischen Form folgendermassen. Man findet (vergl. den folgenden §), dass eins der Oktaëder t gleich gesetzt werden kann:

$$t = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^4 + 2x_1^3x_2 - 6x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2^3 + x_2^4).$$

Die zugehörige Invariante A (die nun als a bezeichnet sein soll) hat den Werth $\frac{20}{3}$. Man findet dann

$$\frac{12T}{t} = t^4 - 10t^2f + 45f^2,$$

und setzt man jetzt

$$p = \frac{t}{\sqrt{f}},$$

so kommt:

$$p^5 - 10p^3 + 45p = \frac{12T}{\sqrt{f^5}}.$$

Indem man jetzt zu allgemeiner Coordinatenbestimmung übergeht, hat man folgendes Resultat:

Sei t eins der fünf Oktaëder, a die zugehörige Invariante, so setze man:

$$p = 4\sqrt{-\frac{7B}{af}}\cdot t.$$

Dann besteht die Gleichung:

$$p^5 - 10p^3 + 45p = \frac{30T}{\sqrt{-105Bf^5}}.$$

§ 9.

Die irrationalen Covarianten des Ikosaëders in kanonischer Form.

Des weiteren Vergleichs wegen sollen hier die vorstehend benutzten verschiedenen irrationalen Covarianten des Ikosaëders, für die kanonische Form berechnet, zusammengestellt werden.

Die *12 Wurzeln der Gleichung* $f = 0$, für

$$f = x_1^{11}x_2 + 11\,x_1^6x_2^6 - x_1x_2^{11},$$

erhalten die folgenden Coordinaten:

$$\frac{x_1}{x_2} = 0, \quad \infty, \quad a\varepsilon^\nu, \quad -\frac{1}{a}\varepsilon^\nu,$$

wo

$$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \quad a = \varepsilon + \varepsilon^4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Hieraus beiläufig das Resultat: Die Doppelverhältnisse, welche man aus den Ecken des Ikosaëders bilden kann, sind rationale Functionen von ε. Man kann auch sagen: nach Adjunction von ε drücken sich die 12 Wurzeln einer Ikosaëdergleichung durch drei beliebige derselben rational aus.

Die *6 Punktepaare* φ, welche entstehen, indem man die gegenüberliegenden Ecken des Ikosaëders zusammenfasst, sollen als φ_∞, φ_0, $\varphi_1 \cdots \varphi_4$ bezeichnet sein; φ_∞ umfasse die Wurzeln 0, ∞, φ_ν die beiden $a\varepsilon^\nu$, $-\frac{1}{a}\varepsilon^\nu$. Wir wählen die φ mit übrigens willkührlichem Vorzeichen so, dass die zugehörige Determinante gleich -1. Dann kommt:

$$\varphi_\infty = 2x_1x_2,$$

$$\varphi_\nu = \frac{2}{\sqrt{5}}(\varepsilon^{-\nu}x_1^2 + x_1x_2 - \varepsilon^\nu x_2^2).$$

Um ferner die *Oktaëder* t zu berechnen, seien ψ, χ irgend zwei der φ. Dann stellen, behaupte ich,

$$\psi + \chi = 0, \quad \psi - \chi = 0, \quad [\psi, \chi] = 0 \text{ (Functionaldeterminante)}$$

drei Punktepaare von T dar, die zusammen ein t bilden. Für jedes t erhält man so drei Darstellungen.

Die beiden Punktepaare $\psi \pm \chi = 0$ werden nämlich offenbar von den beiden Halbirungslinien der Winkel ausgeschnitten (auf der Kugel), welche die Axen der ψ und χ mit einander bilden. Denn sie gehören

erstens mit ψ und χ zu derselben Involution und gehen zweitens durch diejenigen linearen Transformationen in sich über, welche ψ und χ mit einander vertauschen. — Die Functionaldeterminante $[\psi, \chi]$ dagegen stellt diejenige Form dar, welche gleichzeitig zu ψ und χ harmonisch ist und also ausgeschnitten wird von dem gemeinsamen Perpendikel der Axen von ψ und χ.

Nennt man also die 5 Oktaëder in verständlicher Reihenfolge t_0, $t_1 \cdots t_4$, so ist t_ν bis auf einen Factor gleich

$$(\varphi_\infty + \varphi_\nu)(\varphi_\infty - \varphi_\nu)[\varphi_\infty, \varphi_\nu].$$

Den Factor wählen wir, in Uebereinstimmung mit dem vorangehenden Paragraphen so, dass die zugehörige Invariante a_ν gleich $\frac{20}{3}$ wird. Man findet ihn (bei willkührlich gewähltem Vorzeichen) $= \frac{\sqrt{5}}{8}$, also

$$\begin{aligned} t_\nu &= \frac{\sqrt{5}}{8}(\varphi_\infty + \varphi_\nu)(\varphi_\infty - \varphi_\nu)[\varphi_\infty, \varphi_\nu] \\ &= \varepsilon^{2\nu}(x_1^6 - 2x_1x_2^5) + \varepsilon^{-2\nu}(x_2^6 + 2x_1^5x_2) \\ &\quad - \varepsilon^{\nu} \cdot 5x_1^2x_2^4 - \varepsilon^{-\nu} \cdot 5x_1^4x_2^2, \end{aligned}$$

womit zugleich der oben für t_0 benutzte Werth verificirt ist*).

Man kann auch schreiben:

$$\begin{aligned} t_\nu &= \frac{-5\sqrt{5}}{8}(\varphi_\infty + \varphi_\nu)(\varphi_{\nu+1} + \varphi_{\nu-1})(\varphi_{\nu+2} + \varphi_{\nu-2}) \\ &= \frac{+5}{8}(\varphi_\infty - \varphi_\nu)(\varphi_{\nu+1} - \varphi_{\nu-1})(\varphi_{\nu+2} - \varphi_{\nu-2}) \\ &= \frac{5i\sqrt{5}}{8}(\varphi_\infty^2 - \varphi_\nu^2)^{\frac{1}{2}}(\varphi_{\nu+1}^2 - \varphi_{\nu-1}^2)^{\frac{1}{2}}(\varphi_{\nu+2}^2 - \varphi_{\nu-2}^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

In Folge dessen hat man zwischen der entsprechenden Wurzel p_ν der Gleichung fünften Grades $\left(a = \frac{20}{3}\right)$:

$$p_\nu = 2\sqrt{-\frac{21B}{5f}} \cdot t_\nu$$

und den sechs Wurzeln π_∞, $\pi_0 \cdots \pi_\nu$ der Gleichung sechsten Grades $(\Delta = -1)$:

---

*) Der Vollständigkeit wegen sei noch erwähnt, dass die Punktepaare des zugehörigen Pentagondodekaëders dargestellt sind durch:

$$\varepsilon^{-\nu}x_1^2 - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}x_1x_2 - \varepsilon^{+\nu}x_2^2,$$

und dass dieselben proportional sind zu den fünften Ueberschiebungen zweier Oktaëder t. (Das Letztere schliesst man wieder aus dem Umstande, dass es 3 Bewegungen giebt, welche gleichzeitig zwei Oktaëder t und ein Punktepaar des Pentagondodekaëders in sich überführen.)

$$\pi = \frac{5}{4}\sqrt[3]{\frac{84}{5}\cdot\frac{B}{f}}\cdot\varphi^2$$

folgende Beziehung:

$$\rho_\nu = \frac{1}{\sqrt{5}}(\pi_\infty - \pi_\nu)^{\frac{1}{2}}(\pi_{\nu+1} - \pi_{\nu-1})^{\frac{1}{2}}(\pi_{\nu+2} - \pi_{\nu-2})^{\frac{1}{2}}.$$

§ 10.

Beziehungen zu anderweitigen Untersuchungen.

Die Resolventen sechsten und fünften Grades, sowie insbesondere die Formeln des letzten Paragraphen stimmen, wie bereits in der Einleitung gesagt, genau überein mit Formeln, welche bei Untersuchungen über die Lösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades von Brioschi, Hermite und Kronecker gegeben worden sind. Es sei wegen derselben insbesondere auf den Aufsatz von Joubert: Sur l'équation du sixième degré (Comptes Rendus 1867, I, p. 1237—1240) verwiesen, insofern dort einige Unexactheiten, welche in Brioschi's bez. Formeln vorkommen, verbessert sind. Neu ist nur die Bedeutung, unter der hier diese Formeln auftreten, und die damit zusammenhängende geometrische Herleitung derselben. Andererseits entnimmt man den genannten Untersuchungen, dass die Gleichung sechsten Grades, welche die Punktepaare des Ikosaëders trennt, und also die Ikosaëdergleichung selbst, durch elliptische Functionen gelöst werden kann, was hier indess nicht weiter verfolgt werden soll. —

Zum Schlusse werde auch noch die Galois'sche Gruppe der Ikosaëdergleichung bestimmt. Den linearen Transformationen entsprechend, welche die Gleichung in sich überführen, sind jedesmal 60 der Doppelverhältnisse, welche man aus ihren Wurzeln bilden kann, einander gleich, die Differenzen dieser Doppelverhältnisse also Null und somit rational bekannt. Diese Doppelverhältnissgleichheiten bleiben, wie eine nähere Ueberlegung zeigt, bei folgenden und nur bei folgenden Vertauschungen der Wurzeln ungeändert:

1. Bei denjenigen (60) Vertauschungen, welche einer linearen Transformation des Ikosaëders in sich entsprechen, und
2. bei denjenigen Vertauschungen, welche aus einer solchen linearen Transformation hervorgehen, indem man überdies jede Wurzel durch die gegenüberliegende ersetzt.

Die Galois'sche Gruppe umfasst also 120 Substitutionen. Sie kann auf 60 Substitutionen eingeschränkt werden, wenn man den numerischen Werth des Doppelverhältnisses von vier Wurzeln, die nicht in einer Ebene liegen, adjungirt. Denn ein solches Doppelverhältniss stellt eine complexe Grösse vor, welche bei den Operationen 2. in die conjugirte Grösse übergeht. Alle diese Doppelverhältnisse aber

stellen sich nach einer im vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung als rationale Functionen einer fünften Einheitswurzel ε dar, und *also ist die Adjunction von ε nöthig und hinreichend, um die Gruppe auf 60 Substitutionen zu reduciren.*

Um die Structur der so reducirten Gruppe zu charakterisiren, genügt es, darauf hinzuweisen, dass sich bei den 60 Bewegungen, welche das Ikosaëder mit sich zur Deckung bringen, die fünf Oktaëder t unter einander vertauschen. Es entsprechen die Substitutionen der Gruppe demnach den Vertauschungen von fünf Elementen, welche deren Differenzenproduct ungeändert lassen.

München, im Juni 1875.

Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen.

Von L. Wedekind in Erlangen.

In einer kürzlich unter dem vorstehenden Titel veröffentlichten Arbeit*) habe ich eine Reihe verschiedener Vorkommnisse aus dem Gebiete der binären Formentheorie der Untersuchung unterzogen, und ich erlaube mir, an dieser Stelle kurz die Resultate bekannt zu geben, zu denen ich geführt wurde.

Um den Fragen, die sich innerhalb der genannten Theorie darbieten, den Charakter voller Allgemeinheit zu wahren, ist es selbstverständlich unerlässlich, die binäre Variable von vornherein als einer unbeschränkten Veränderlichkeit in dem Gebiete der complexen Zahlen fähig zu betrachten. Es besteht aber der Satz**), dass die Behandlung des so verstandenen binären Werthgebietes im Sinne linearer Invariantentheorie ihr anschauungsmässiges Gegenbild in der projectivischen Geometrie einer reellen Kugelfläche findet. Dies Theorem wurde als der grundlegende Ausgangspunkt für die einzuschlagende Richtung der Betrachtungen gewählt und weiterhin mit demselben diejenige Anschauungsweise in Verbindung gebracht***), welche nach Riemanns Vorgang die Kugel zugleich als das geometrische Substrat der complexen Variabeln voraussetzt.

Unter den bezeichneten Gesichtspunkten bot sich als erste Aufgabe naturgemäss die Forderung dar, die Begriffsbestimmung des complexen Doppelverhältnisses von vier Punkten, wie dieselbe durch Möbius in die Analysis eingeführt worden ist, auch auf beliebige Punkte der Kugel

*) Beiträge etc. Erlangen 1875.

**) F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872, p. 23.

***) Vgl. dazu ein von Herrn Klein gegebenes Uebertragungsprincip in den Sitzungsberichten der phys.-med. Societät zu Erlangen, Sitzung vom 10. Novbr. 1873; wie überhaupt hinsichtlich der Einzelheiten des betreffenden Gedankenganges auf die in diesem Bande unmittelbar vorangehende Abhandlung des gleichen Verfassers verwiesen sein mag

zu übertragen und sie dabei zugleich so umzugestalten, wie es speciell vom Standpunkte des obigen Fundamentalsatzes aus als wünschenswerth bezeichnet werden musste, so nämlich, dass schon ihre äussere Form das Doppelverhältniss als absolute Invariante kennzeichnet. Dabei ist zunächst diese Function, wie überhaupt im reellen, so ganz allgemein durch die Gleichung

$$\lambda = (x^{(a)}\, x^{(b)}\, x^{(c)}\, x^{(d)}) = \frac{(x^{(a)}\, x^{(c)})}{(x^{(c)}\, x^{(b)})} : \frac{(x^{(a)}\, x^{(d)})}{(x^{(d)}\, x^{(b)})}$$

definirt, oder in nicht homogener Schreibweise durch

$$\lambda = \frac{z_a - z_c}{z_c - z_b} : \frac{z_a - z_d}{z_d - z_b}, \tag{1}$$

wo, für $\alpha = a, b, c, d,$

$$x_\alpha + iy_\alpha = z_\alpha$$

gesetzt ist.

Die erwähnte Geometrie der Kugel hat nun, wie man erkennt, wenn man sie in der allgemeineren Bedeutung einer Collineation des ganzen Raumes auffasst, welche die Kugel in sich transformirt, die Eigenthümlichkeit, durch die Gesammtheit ihrer Transformationen hindurch Kreise wieder in Kreise überzuführen und ebenso die Winkel zwischen infinitesimalen Fortschreitungsrichtungen unverändert zu erhalten. Eben diese Elemente sind es daher, welche für die verlangte Begriffsbildung verwerthet werden müssen.

Um die auftretenden Winkel in eindeutiger Weise handhaben zu können, werden gewisse Festsetzungen nothwendig; dieselben bestehen darin, dass man jedem Kreise, in welchem die Kugel durch eine Ebene geschnitten wird, eine bestimmte, übrigens willkürlich anzunehmende Bewegungsrichtung beilegt, etwa so, dass man sich ihn vermöge der stetig fortschreitenden Bewegung eines seiner Punkte entstanden vorstellt. Die Kugel selbst wird, wie das überhaupt die graphische Darstellung der complexen Veränderlichen bedingt, in leicht verständlicher Weise mit einem, allen ihren Punkten gemeinsamen, Drehsinne versehen.

Die erwähnte Forderung der Eindeutigkeit kann man dann befriedigen, indem man die folgende Definition aufstellt:

Zwei Ebenen mögen die Kugel in Kreisen A, B treffen und diese einander ihrerseits in Punkten c, d schneiden. Bedeutet darnach k den einen oder anderen dieser beiden letzteren, so lasse man als *den Winkel*

$$(AB)_k$$

der beiden Kreise A, B in ihrem Schnittpunkt k denjenigen Winkel gelten, um welchen man im positiven Drehungssinne aus der im Punkte k

stattfindenden, positiven Bewegungsrichtung des Kreises A heraustreten muss, um in die ebendaselbst stattfindende, positive Bewegungsrichtung des Kreises B zu gelangen.

Seien daher unter dieser Voraussetzung auf der Kugel vier Punkte $a\ b\ c\ d$ gegeben; die Seitenflächen des durch dieselben gebildeten Tetraëders begegnen der Kugel in vier Kreisen $A\ B\ C\ D$, und zwar bedeute A speciell denjenigen Kreis, welcher den Punkt a *nicht* enthält u. s. f. Zwischen den Winkeln, welche durch Vermittelung dieser Kreise in den gegebenen Punkten entstehen, findet eine grosse Zahl von Beziehungen statt; dieselben ermöglichen es, alle Winkel der ganzen Configuration durch irgend zwei auszudrücken, die von einander unabhängig sind. Es genüge, in dieser Hinsicht die folgenden in die Augen fallenden Identitäten zu erwähnen:

$$\begin{aligned} (AB)_d + (BC)_d + (CA)_d &= 0, \\ (AB)_k + (BA)_k &= 2\pi, \\ (AB)_c &= (BA)_d, \end{aligned} \tag{2}$$

die gegenüber den weiteren Relationen dadurch erhöhtes Interesse gewinnen, dass sie von den postulirten Bewegungsrichtungen der Kreise unabhängig sind.

Dienen die Punkte $a\ b\ c\ d$ insbesondere der Repräsentation der complexen Zahlwerthe $z_a\ z_b\ z_c\ z_d$, so lässt sich die Function, die wir in der Gleichung (1) als das complexe Doppelverhältniss jener Punkte in Anspruch nahmen, unter Benutzung der näher bezeichneten Winkel in verschiedenartige Gestalten überführen, die sämmtlich den ausgesprochenen Zweck erfüllen, und von denen etwa *die folgende:*

$$\lambda = (a\ b\ c\ d) = \frac{\sin (AC)_d}{\sin (BC)_d}\, e^{-i(AB)_d} \tag{3}$$

am übersichtlichsten sein möchte.

Die Bewegungsrichtungen der Kreise, deren Annahme behufs einer unzweideutigen Bezeichnung der Winkel unumgänglich war, haben auf die endgültige Form von λ keinerlei Einfluss. Eine Umkehrung des Drehsinnes der Kugel dagegen führt ein gegegebenes Doppelverhältniss in den complex conjugirten Werth über, *wie denn überhaupt zwei Punktquadrupel zu complex conjugirten Doppelverhältnissen Anlass geben, so oft das eine aus dem anderen durch perspectivische Abbildung erzeugt werden kann.*

Die Lagenbeziehung von vier Punkten, die ein *äquianharmonisches* Doppelverhältniss zu einander haben, ist geometrisch dadurch ausgezeichnet, dass die drei Kreise, die sich in jedem der Punkte schneiden,

die Flächenelemente der Kugel, welche jene nämlichen Punkte umgeben, in je sechs winkelgleiche Sectoren zerfällen. In diesem Falle befinden sich namentlich auch die Eckpunkte jedes der Kugel eingeschriebenen regulären Tetraëders.

Durch eine einfache Grenzbetrachtung erledigt ferner die Gleichung (3) auch den Fall, in welchem die Kugelpunkte $a\ b\ c\ d$ zugleich in einer Ebene liegen. Sie ergiebt alsdann für λ einen wesentlich *reellen* Werth, und die dabei zu Tage tretende Begriffsbildung ist durchaus identisch mit derjenigen Vorstellung, welche in bekannter Weise die synthetische Geometrie von dem Doppelverhältniss beliebiger vier Punkte eines Kreises, beziehlich eines Kegelschnitts entwickelt. Soll speciell ein Punktepaar c, d *harmonisch* liegen zu einem anderen a, b, so muss die räumliche Verbindungslinie cd die Gerade ab, sowie deren conjugirte Polare mit Bezug auf die Fundamentalkugel treffen.

Auf den Begriff des Doppelverhältnisses lässt sich, wie ganz allgemein im binären Gebiet, so auch bei der hier vorausgesetzten Darstellung desselben eine Coordinatenbestimmung gründen. Die Lage jedes Kugelpunktes c ist dann durch den numerischen Werth des Doppelverhältnisses $(a\ b\ c\ d)$ bezeichnet, wenn unter $a\ b\ d$ drei beliebig anzunehmende Grundelemente der Coordinatenbestimmung verstanden sind; den letzteren kommen die Werthe $0\ \infty\ 1$ zu, insofern diese Zahlen aus dem supponirten Doppelverhältniss resultiren, wenn c der Reihe nach in jene Grundpunkte selbst eintritt. Durch eine *Netzconstruction*, welche mit der fortgesetzten Aufsuchung harmonischer Punkte operirt, wird man in den Stand gesetzt, die darstellenden Punkte aller Zahlen $\lambda = m + ni$ entweder unmittelbar oder doch mit jedem vorgeschriebenen Grade der Annäherung anzugeben.

Der Begriff des Doppelverhältnisses leitet auf die Zuordnung collinear verwandter Punktreihen hinüber, und an diese knüpft sich die Aufgabe, die Doppelelemente zweier solchen Reihen, als deren gemeinsamer Träger die Kugel gedacht wird, constructionsmässig zu ermitteln. Kennt oder giebt man drei Punkte $a\ b\ c$ des einen und die entsprechenden $a'\ b'\ c'$ des anderen Werthgebiets, so erfolgt die Lösung des Problems durch den nachstehenden Satz:

Man suche diejenigen drei Punktepaare auf, welche beziehlich gleichzeitig zu bc' und $b'c$, zu ca' und $c'a$ und zu ab' und $a'b$ harmonisch liegen; die so bestimmten Punktepaare befinden sich, wie Hesse nachgewiesen hat*), in involutorischer Lage. *Die Doppel-*

*) Hesse, Zur Involution. Borchardts Journal Bd. 63.

punkte dieser Involution sind zugleich die Doppelelemente der vorgelegten Collineation.

Der hierbei zur Verwendung kommende Hesse'sche Satz ist wesentlich eine in das binäre Gebiet übertragene Interpretation*) des Pascal'schen Theorems über das einem Kegelschnitt eingeschriebene Sechseck, und diesem Theorem ist neuerdings von Herrn Klein in anderer Richtung eine Ausdehnung auf den Raum gegeben worden. Als das Werkzeug dieser Verallgemeinerung dient ein neues Uebertragungsprincip**), vermöge dessen die Kugel, welche der Darstellung von $x + iy$ dient, zugleich die Bedeutung der Fundamentalfläche einer projectivischen Maassbestimmung erhält; und für den erweiterten Pascal'schen Satz wird dadurch insbesondere der Ausdruck gewonnen, dass „die gemeinsamen Perpendikel der Gegenseiten eines in das Fundamentalgebilde eingeschriebenen Sechsseits ein gemeinsames Perpendikel haben". Von den *beiden* gemeinsamen Perpendikeln, die in Wahrheit, und zwar als conjugirte Polaren mit Bezug auf die Kugel, auftreten, ist dabei nur dasjenige zu berücksichtigen, welches die Fläche in reellen Punkten trifft. Für die obige Fragestellung haben diese Schnittpunkte wieder die Bedeutung, die Doppelpunkte der vorausgesetzten projectivischen Zuordnung zu sein. Dem räumlichen Sechsseit liegt die Reihenfolge $bc'ab'ca'$ seiner Ecken zu Grunde, wenn die Zuordnung der Punkte die vorhin angenommene ist.

Zu seiner geometrischen Durchführung bedarf das behandelte Problem der Construction des Punktepaares, das gleichzeitig zu zwei gegebenen Paaren aa', bb' harmonisch liegt, oder nach der Ausdrucksweise des erwähnten Uebertragungsprincips der Aufsuchung des gemeinsamen Perpendikels zweier räumlichen Geraden. Diese Construction geschieht***) wie folgt:

Man lege durch ab' zwei Ebenen, von denen die eine den Punkt a', die andere den Punkt b enthält. Den Winkel, welchen beide auf der Kugel einschliessen, halbire man durch diejenige Ebene H_1 des Büschels ab', welche die Gerade $a'b$ im Innern der Fläche trifft. In ähnlicher Weise construire man zu den beiden Ebenen $a'ba$, $a'bb'$ eine neue Ebene H_2. Die Schnittlinie L von H_2 mit H_1 ist das gesuchte Perpendikel, oder also der Schnitt von L mit der Kugel das gesuchte Punktepaar.

---

*) Vgl. Hesse, Ein Uebertragungsprincip. Borchardts Journal Bd. 66.

) Vgl. die Anmerkung *) pag. 209. Nach der Natur des genannten Uebertragungsprincips ist an die — projectivische — Perpendicularität zweier räumlichen Geraden stets auch die Bedingung geknüpft, dass die betreffenden Geraden einander schneiden. Es ist das weiterhin im Text die ausdrückliche Voraussetzung aller diesbezüglichen Constructionen.

***) Nach einer mündlichen Mittheilung des Herrn Klein.

Fasst man, wovon bisher Abstand genommen wurde, x, y selbst wieder als projectivisch allgemeine Veränderliche auf und gestattet ihnen demzufolge, von neuem complexe Werthe anzunehmen, so charakterisirt sich die Aufgabe der Doppelpunkte als eine *biquadratische*; die Gleichung vierten Grades, von der ihre Lösung abhängt, hat indess den Affect, durch Ausziehen einer Quadratwurzel in zwei quadratische Gleichungen zu zerfallen. Trifft das vorhin erwähnte Perpendikel die Kugel in den beiden Wurzelpunkten der einen, so schneidet dessen conjugirte Polare die Fläche in den beiden Verschwindungspunkten der anderen Gleichung.

Sind endlich die Doppelelemente e_1 e_2 bekannt, so findet man auf Grund der Steiner'schen Construction zu jedem beliebigen Punkte d den collinear verwandten d' durch die Bedingung, dass nach Hinzunahme irgend eines Paares entsprechender Punkte aa' die Geraden $d'a$, da' und e_1e_2 ein gemeinsames Perpendikel zulassen müssen.

Nach Erledigung der bisherigen allgemeineren Fragestellungen wurde eine Reihe von Betrachtungen aus der Theorie der cubischen und biquadratischen Formen aufgenommen; und zwar bin ich dabei von Untersuchungen ausgegangen, die für die Ebene und mit anderen Hülfsmitteln zum Theil schon durch Beltrami*) ihre Behandlung gefunden haben.

Die geometrische Veranschaulichung der Formensysteme der genannten Formen knüpft an eine von Herrn Klein herrührende Darstellung an, auf welche derselbe neuerdings wieder aufmerksam gemacht hat**). Es genüge deshalb, dieselbe hier zu erwähnen; und nur, um über spätere Bezeichnungen keinen Zweifel zu lassen, mag noch auf zwei oder drei Punkte ausdrücklich aufmerksam gemacht sein. Die Formen der Schaar $\varkappa f + \lambda H$ erweisen sich nach Seite ihres geometrischen Verhaltens gegenüber der Gesammtheit der Parameterwerthe $\varkappa : \lambda$ als vollkommen gleichartig; man kann sie deshalb selbst kurzweg durch f andeuten. Die Repräsentation einer solchen Form f werde durchgehends durch vier Punkte

$$\begin{aligned} f_1 &: \quad a \quad b \quad c \\ f_2 &: \quad a - b - c \\ f_3 &: -a - b \quad c \\ f_4 &: -a \quad b - c \end{aligned}$$

bewerkstelligt. Das rechtwinklige, durch den Kugelmittelpunkt gelegte, Axenkreuz schliesslich, auf welches sich die hierdurch implicirte Coor-

*) Beltrami, Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche. Accademia di Bologna 1870.

**) a. a. O. pagg. 191, 192 des vorliegenden Bandes.

dinatenbestimmung bezieht, begegne der Fläche in drei Punktepaaren, die, mit Rücksicht auf die gleichbenannten Coordinaten, beziehlich AA', BB', CC' heissen mögen.

Bei den cubischen Formen hat die Aufsuchung der quadratischen Polare eines beliebigen Kugelpunktes mit Bezug auf die Grundform einiges Interesse. Ihre geometrische Construction wird durch die folgenden beiden Sätze geleistet:

Die quadratische Polare P_y eines auf dem Aequator gelegenen Punktes y gehört dem Aequator selbst an; sie ist definirt durch die beiden Punkte, in welchen die Kugel von einer Geraden geschnitten wird, die ihrerseits als das gemeinsame Perpendikel der Nord- und Südpol verbindenden Axe und derjenigen Linie auftritt, welche von dem festen Punkte — 1 nach dem zu y complex conjugirten Punkte t führt.

Soll die quadratische Polare P_z eines beliebigen Kugelpunktes z ermittelt werden, so suche man zunächst die Polare P_y eines irgendwie auf dem Aequator angenommenen Punktes y auf und bestimme alsdann die lineare Polare P_{yz} von z mit Bezug auf P_y. Darnach ziehe man wieder die Axe Nord-Süd und verbinde ausserdem y mit dem Punkte P_{yz}. Das gemeinsame Perpendikel dieser beiden Geraden begegnet der Kugel in der geforderten Polare P_z.

Das Verhalten der biquadratischen Formen begründet eine Eintheilung der Kugelfläche, die zu der krystallographischen Form des Hexakisoktaëders in innigster Beziehung steht. Sie beruht darin, dass man die Octanten der Fläche, deren Ecken in den darstellenden Punkten der Covariante sechsten Grades T liegen, vermöge grösster Kreise, welche jene Ecken mit den Mitten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, in je 6, die Kugel überhaupt also in 48 rechtwinklige sphärische Dreiecke zerfällt. Diese letzteren sind einander congruent oder symmetrisch gleich und können dementsprechend in zwei Kategorieen von 24 Dreiecken zusammengefasst werden. Zwischen die Dreiecke der einen sind die der anderen Art schachbrettähnlich eingelagert; die einen werden von je 6 Formen f beherrscht, die das nämliche Doppelverhältniss besitzen, und die nach einem einfachen Gesetz in jedes Dreieck einen Punkt entsenden; über die anderen verbreiten sich gleichzeitig 6 Formen, deren Doppelverhältniss zu jenem ersteren complex conjugirt ist.

Durch die Lage von f_1 ist die Form f eindeutig auf der Kugel festgelegt, und man kann, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, die Beweglichkeit von f_1 etwa auf die beiden Octanten einschränken, für welche sowohl a als auch b einen positiven Werth hat. Versteht man dann unter

$$D_f = (f_1 f_2 f_3 f_4)$$

das Doppelverhältniss des Punktquadrupels f mit ausdrücklicher Be-

tonung der Reihenfolge der einzelnen Punkte, so ist auch dieses zu f_1 und weiterhin zu der Form f überhaupt in eindeutig umkehrbare Beziehung gesetzt. Das Verhalten von f wird durch diese Festsetzung dahin modificirt, dass in dem von 12 Dreiecken gebildeten Kugelzweieck, über welches f_1 wandert, je 6 Dreiecke derselben Art beziehlich von 6 zusammengehörigen Werthen

$$\lambda, \quad 1-\lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{\lambda-1}{\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

der Function D_f in Anspruch genommen werden.

Unter Anwendung der Gleichung (3) gewinnt man die folgende Relation:

$$D_f = \frac{a^2 - 4b^2c^2 - 4abci}{4(a^2+c^2)^2} = \left(\frac{a-2bci}{2(a^2+c^2)}\right)^2, \tag{4}$$

in welcher eine Zuordnung positiver Werthe von c mit der positiven, negativer mit der negativen imaginären Einheit vollzogen ist.

Gleichwie die Grundform f durch ihr Doppelverhältniss D_f, kann auch die biquadratische Covariante H derselben durch ein Doppelverhältniss D_H definirt werden. Zwischen beiden Functionen besteht die Bedingungsgleichung

$$D_f^2 + 2(D_H - 1)D_f - D_H = 0. \tag{5}$$

Durch die oben genannten sphärischen Mittellinien wird jeder Octant auf verschiedene Arten in zwei Hälften getheilt; durch die vorstehende Bedingungsgleichung wird *die Abbildung jeder beliebigen derartigen Hälfte auf die ganze Fläche eines angrenzenden Octanten vermittelt*, insofern der die Form H definirende Punkt H_1 über einen solchen Octanten hinläuft, wenn f_1 die Hälfte eines benachbarten Octanten überdeckt.

Des genaueren kann man, wenn f auf der Kugel gegeben ist, die darstellenden Punkte von H mit Hülfe einer geometrischen Construction finden*), die mannigfacher Modificationen fähig ist, und die es deshalb bequem sein wird, in einer concreten Form durchzuführen.

Als das wesentliche des betreffenden Verfahrens ist von vornherein zu bezeichnen, dass sich dasselbe in drei gesonderte Schritte auflöst, da es nämlich, wenn etwa F', H' Punkte bezeichnen, die zu f, H in geeigneter Beziehung stehen**), aus f den Punkt F', aus diesem sodann

*) Die Begründung dieser Construction, die über den Inhalt meiner in Rede stehenden Arbeit hinausgeht, behalte ich einer weiteren Veröffentlichung vor. Eine vorläufige Mittheilung derselben, die indess das Problem unter etwas abgeänderten Voraussetzungen behandelt, habe ich in den Sitzungsberichten der Erlanger phys.-med. Societät — Sitzung vom 12. Juli 1875 — gegeben.

**) Diese Punkte erweisen sich im Verlauf der Untersuchung geradezu als die Repräsentanten von D_f und D_H, vorausgesetzt, dass man $C'CA$ in der früher bezeichneten Weise als die Coordinatengrundpunkte $0\ \infty\ 1$ betrachtet.

H' und aus dem Punkte H' endlich den Ort der Form H entwickelt. Im einzelnen gilt in dieser Hinsicht folgendes:

Man ziehe die beiden Geraden $f_1 f_2$, $f_3 f_4$ und fälle gegen jede derselben ein Perpendikel) aus C'; beide Senkrechten mögen die Kugel noch in den Punkten $\Gamma_1^{(f)}$, $\Gamma_2^{(f)}$ treffen. Ein gegen die Verbindungslinie dieser letzteren aus A gefälltes Perpendikel begegnet der Fläche im Punkte F'. — Aus F' fälle man ein Perpendikel gegen die Gerade AC, welches den Punkt F'', und aus A ein Perpendikel gegen $F'C$, welches den Punkt F''' der Kugel festlegen möge. Eine Senkrechte, die aus F''' gegen das gemeinsame Perpendikel von CC' und $F'F''$ geführt wird, schneidet die Kugel im Punkte H'. — Hat man H', so ziehe man $H'A$ und bestimme das gemeinsame Perpendikel von $H'A$ und CC'; die Punkte $\Gamma_1^{(H)}$, $\Gamma_2^{(H)}$, in welchen dieses letztere die Kugel schneidet, verbinde man mit C'. Das gemeinsame Perpendikel gegen AA' und $C'\Gamma_1^{(H)}$ trifft alsdann die Kugel in den Punkten H_1, H_2, das gemeinsame Perpendikel von AA' und $C'\Gamma_2^{(H)}$ in den Punkten H_3, H_4 der gesuchten Form H.*

Erwähnt mag noch sein, dass die vorstehend geschilderte Construction von H aus f im Ganzen auf 48 verschiedene Arten vollzogen werden kann, insofern die drei verschiedenen Möglichkeiten, die Form f in zwei Punktepaare auseinander zu legen, und anderweitige Abänderungen insgesammt auf die Existenz von 48 verschiedenen Punkten F' führen, die für das Problem durchaus verwandte Bedeutungen haben. Diese Punkte, unter sich in linearem Zusammenhang, vertheilen sich auf 12 Quadrupel der Schaar $\varkappa f + \lambda H$; die letzteren kann man derartig entstehen lassen, dass sie sich in drei Gruppen von vier Quadrupeln sondern, deren jede speciell auf eine der drei Coordinatenaxen bezogen erscheint. Die gemeinte Beziehung findet ihren Ausdruck namentlich darin, dass einer solchen Gruppe zugleich mit *einem* Quadrupel immer auch dasjenige angehört, welches man aus ihm vermöge einer Rotation durch 90^0 um die zugeordnete Axe erzeugen kann. — Innerhalb jeder Gruppe ist die Abhängigkeit zwischen correspondirenden Punkten F' und H' wesentlich eine gemeinsame; die der Bestimmung von H' dienende Construction stellt sich demzufolge nur unter drei verschiedene Typen dar, die sich wiederum linear auf jeden unter ihnen zurückführen lassen.

---

*) Hinsichtlich der Art und Weise, wie ein solches Perpendikel zu verstehen ist, sei nochmals auf die Anmerkung **) pag. 213 verwiesen.

Erlangen, Juli 1875.

Zur Theorie der ternären cubischen Formen.

Von Axel Harnack.

Nachdem ich in einem früheren Aufsatze*) gezeigt habe, wie durch die Parameterdarstellung der allgemeinen Curve dritter Ordnung die Integration der Hauptcoincidenzcurven in der Connexschaar $\varkappa Q^2 + \lambda \Theta^3 = 0$ geleistet werden kann, erlaube ich mir hiermit eine Vervollständigung der dort geführten Untersuchungen folgen zu lassen. Dieselbe bezieht sich auf die allgemeine algebraische Formulirung der ursprünglich durch geometrische Betrachtungen mit Zugrundelegung einer kanonischen Gleichungsform gewonnenen Resultate. Unterweisung und wesentliche Förderung in der Durchführung dieser Probleme habe ich Herrn Gordan zu danken.

Im Folgenden wird zunächst die Gleichung der Integralcurven des Connexes Q vermittelst eines Eliminationsverfahrens abgeleitet; dieselbe zeichnet sich vor den Gleichungen der übrigen Connexcurven durch ihre besonders einfache Form aus und lässt eine Reihe geometrischer Eigenschaften ohne Weiteres erkennen. Im letzten § werden durch eine cubische Gleichung die drei Werthe des elliptischen Differentiales in den Schnittpunkten einer Geraden und einer dieser benachbarten mit der Fundamentalcurve dargestellt, woraus sich dann die Integrationsmethode für die gesammte Connexschaar ergiebt.

§ 1.

Das vollständige Formensystem der vier von einem Curvenpunkte ausgehenden Tangenten.

Bezeichnet man mit x die variabelen Punktcoordinaten, mit ξ die festen Werthe eines beliebigen Punktes in der Ebene, so ist das Product der sechs Tangenten, welche vom Punkte ξ an die Fundamentalcurve $f = a_x^3 = 0$ ausgehen, durch die verschwindende Discriminante der in λ, μ cubischen Gleichung:

*) Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades. pag. 1 dieses Bandes.

(1) $$\lambda^3 a_x^3 + 3\lambda^2\mu a_x^2 a_\xi + 3\lambda\mu^2 a_x a_\xi^2 + \mu^3 a_\xi^3 = 0$$

dargestellt, d. h. durch die Form gegeben:

(2) $$f^2 f_{\xi^2}^2 - 6 f f_\xi f_{\xi^2} f_{\xi^3} + 4 f f_{\xi^2}^3 + 4 f_\xi^3 f_{\xi^3} - 3 f_\xi^2 f_{\xi^2}^2 = 0..$$

Wird insbesondere ein auf der Curve gelegener Punkt ξ betrachtet, demnach $f_{\xi^3} = 0$ gesetzt, so trennt sich der Factor $f_{\xi^2}^2$ ab und man erhält:

(3) $$p_x^4 = 4 a_x^3 b_x b_\xi^2 - 3 a_x^2 a_\xi b_x^2 b_\xi = 0$$

als Gleichung der vier Tangenten, welche sich, mit Ausschluss der Tangente in ξ selber, von diesem Punkte an die Curve ziehen lassen. In dieser Form, welche zwei Reihen von Veränderlichen x und ξ besitzt, können umgekehrt x als feste, ξ als variabele Coordinaten aufgefasst werden; auf diese Weise wird jedem Punkte der Ebene ein Kegelschnitt zugeordnet. Die sechs Punkte, in denen derselbe die Fundamentalcurve schneidet, sind die dritten Schnittpunkte, in welchen die sechs vom Punkte x ausgehenden Tangenten die Curve treffen. Die Gleichung (3), welche wir für einen Augenblick symbolisch mit $\Pi_\xi^2 = 0$ bezeichnen wollen, stellt also *den dem Punkte x beigeordneten Kegelschnitt* dar *). Die Formen, zu welchen derselbe Anlass giebt, und deren geometrische Bedeutung evident ist, sind:

(4) $$(\Pi\Pi' u)^2 = 4 f(\Theta f + \Delta u_x^2), \quad (\Pi\Pi'\Pi'')^2 = 16 f^3 \Delta.$$

Im Folgenden soll indess die Gleichung (3) als in x biquadratisch in Hinsicht auf das vollständige System der ihr zugehörigen Formen untersucht werden.

Da die Polaren des Punktes ξ in Bezug auf p_x^4 identisch verschwinden, so erhält man den für weitere Entwickelungen wesentlichen Satz: *Jeder Ausdruck, welcher den symbolischen Factor p_ξ besitzt, ist gleich 0 zu setzen.*

Die Covarianten oder Invarianten aller derjenigen ternären Formen, welche ihrem Wesen nach binäre Gebilde — Punkt- oder Strahlgruppen mit gemeinsamen Trägern — darstellen, werden durch Ränderung der entsprechenden Bildungen, wie sie für binäre Formen von gleicher Ordnung gelten, gewonnen. Bezeichnet dann ξ den Träger des Fundamentalgebildes und enthält der durch diese Ränderung mit u entstandene Connex die Coordinaten u zur n^{ten} Potenz, so zerfällt dieser Connex stäts in das Product von u_ξ^n mit der gesuchten Covariante, wie aus der Multiplication desselben mit einem beliebigen Factor v_ξ^n hervorgeht. Die wirkliche Zerfällung des Connexes in diese seine Factoren kann dann

*) Cremona: Einleitung in die Theorie der ebenen Curven, übersetzt von Curtze, p. 222.

vermittelst des Processes $\delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial u_i}$ ausgeführt werden*). Bei Anwendung dieser Methode ist darauf Rücksicht zu nehmen, dass die Grössen ξ nicht beliebige Variabele darstellen, vielmehr an gewisse Bedingungsgleichungen (im vorliegenden Falle z. B. an die Relation $a_\xi^3 = 0$) geknüpft sein können. Die Forderung, dass der Connex in ein Product mit dem Factor u_ξ^n zerfalle, besteht dann nur unter Hinzufügung dieser Bedingung; die Ausführung des δ Processes erfordert also die vorangehende Ermittelung der mit dem verschwindenden Factor behafteten Glieder. In den nachstehenden Aufgaben sind indessen die überflüssigen Factoren durch directe Ausführung der Ueberschiebung abgesondert worden.

Um die *Covariante vierter Ordnung* oder die *Hesse'sche Form* der vier von einem Curvenpunkte ausgehenden Tangenten zu erhalten, ist der Connex $(pp'u)^2 p_x^2 p_x'^2$ aufzustellen. Derselbe lässt sich, wie aus einer einfachen geometrischen Ueberlegung oder auch aus der Identität:

$$(pp'u)^2 p_x^2 p_x'^2 v_\xi^2 = (pp'v)^2 p_x^2 p_x'^2 u_\xi^2$$

hervorgeht, in das Product der gesuchten vier Linien und den Factor u_ξ^2 zerlegen. Für die erste und zweite Polare eines Punktes y in Bezug auf p_x^4 ergeben sich zunächst die Werthe:

$$(5)\quad \begin{aligned} p_x^3 p_y &= a_x^3 b_y b_\xi^2 + 3 a_x^2 a_y b_x b_\xi^2 - 3 a_x a_y a_\xi b_x^2 b_\xi, \\ p_x^2 p_y^2 &= -a_y^2 a_\xi b_x^2 b_\xi + 2 a_x^2 a_y b_y b_\xi^2 + 2 a_x a_y^2 b_x b_\xi^2 - 2 a_x a_y a_\xi b_x b_y b_\xi, \end{aligned}$$

so dass die zweite Ueberschiebung von p_x^4 über sich selber die Form annimmt:

$$-f_\xi (apu)^2 a_\xi p_x^2 + 2(apu)(bpu) a_x^2 b_\xi^2 p_x^2 + 2 f_\xi (apu)^2 a_x p_x^2 - 2(apu)(bpu) a_x a_\xi b_x b_\xi p_x^2.$$

Unter Anwendung des Identitätssatzes auf die drei letzten Glieder und stäter Verwerthung der für den symbolischen Factor p_ξ geltenden Eigenschaft transformirt sich derselbe in das Aggregat:

$$(6)\quad f_\xi (apu)^2 a_\xi p_x^2 + 2 u_\xi a_x b_\xi (abp)\{p_x (abu) - u_x (abp)\} p_x^2 + 2 u_\xi^2 \Theta_x^2 p_\vartheta^2 p_x^2.$$

Nur die Entwickelung des ersten Gliedes erfordert hierbei einige symbolische Rechnungsoperationen, um den Factor u_ξ^2 aus dem gesammten Ausdrucke ausscheiden zu lassen.

Man findet zunächst für $(cpu)^2 c_\xi p_x^2$ den Werth:

$$2 a_x^2 b_\xi^2 c_\xi (acu)(bcu) + b_x b_\xi c_\xi (acu)^2 (2 a_x b_\xi - b_x a_\xi) - 2 a_x b_x a_\xi b_\xi c_\xi (acu)(bcu).$$

Durch Anwendung des Identitätssatzes auf den Factor $b_\xi (acu)$ des zweiten Gliedes gewinnt diese Summe die neue Gestalt:

---

*) P. Gordan: Ueber Combinanten, Math. Annalen Bd. V, p. 95.

$$2c_\xi^2(abu)(acu)a_xb_xb_\xi - (abc)b_xc_\xi(acu)\{2a_xb_\xi - b_xa_\xi\}u_\xi,$$

die schliesslich, wenn in dem ersten Gliede nach Vertauschung der Symbole a und b die halbe Summe des alten und neuen Ausdrucks gebildet, in dem dritten nochmals der Identitätssatz für das Product $b_x(acu)$ benutzt wird, zu dem Endresultate leitet:

$$(7)\quad c_\xi(cpu)^2p_x^2 = -6(abc)(acu)a_xb_xb_\xi c_\xi u_\xi - \alpha_x\alpha_\xi^2u_xu_\xi - \alpha_x^2\alpha_\xi u_\xi^2.$$

Stellt man nunmehr die einzelnen Glieder der Gleichung (6) zusammen, so ergeben sich in entwickelter Darstellung der Reihe nach die vier Werthe:

$$\begin{aligned}
&+6f_\xi a_\vartheta u_\vartheta\Theta_x\Theta_\xi a_xa_\xi u_\xi - f_\xi\alpha_x\alpha_\xi^2u_xu_\xi - f_\xi\alpha_x^2\alpha_\xi u_\xi^2,\\
&2u_\xi\Theta_x\Theta_\xi u_\vartheta\{fa_\vartheta a_\xi^2 + 3f_\xi a_\vartheta a_x^2 - 3f_\xi a_\vartheta a_xa_\xi\},\\
&-2u_\xi u_x\{-f_\xi\alpha_x\alpha_\xi^2 + 2c_\vartheta d_\vartheta c_x^2d_\xi^2\Theta_x\Theta_\xi + 2f_\xi\alpha_x^2\alpha_\xi - 2c_\vartheta d_\vartheta c_xc_\xi d_xd_\xi\Theta_x\Theta_\xi\},\\
&2u_\xi^2\{-f_\xi\alpha_x^2\alpha_\xi + 2c_\vartheta d_\vartheta c_x^2d_\xi^2\Theta_x^2 + 2f_\xi\alpha_x^3 - 2c_\vartheta d_\vartheta c_xc_\xi d_xd_\xi\Theta_x^2\}.
\end{aligned}\qquad (8)$$

Da die in der dritten und vierten Reihe durch Vereinigung von je zwei Gliedern entstehenden Ausdrücke:

$$2c_\vartheta d_\vartheta\Theta_x\Theta_\xi c_xd_\xi(cd\widehat{x\xi}) = \Theta_x\Theta_\xi\Theta'^2_\vartheta(\vartheta'x\xi)^2,$$
$$2c_\vartheta d_\vartheta\Theta_x^2c_xd_\xi(cd\widehat{x\xi}) = \Theta_x^2\Theta'^2_\vartheta(\vartheta'x\xi)^2\ ^*)$$

identisch verschwinden (Clebsch und Gordan: Ueber cubische ternäre Formen, diese Annalen Bd. VI, p. 448), da ferner für die Glieder der zweiten Reihe die Relationen bestehen:

$$(9)\quad \begin{aligned}\Theta_x\Theta_\xi u_\vartheta a_\vartheta a_\xi^2 &= \tfrac{1}{2}u_\xi\alpha_x\alpha_\xi^2 - \tfrac{1}{6}u_x\alpha_\xi^3,\\ \Theta\ \Theta_\xi u_\vartheta a_\vartheta a_x^2 &= \tfrac{1}{2}u_x\alpha_x^2\alpha_\xi - \tfrac{1}{6}u_\xi\alpha_x^3,\end{aligned}$$

so lässt sich der Summe aller vier Reihen die nach u_ξ und u_ξ^2 geordnete Form geben:

$$u_\xi^2\{f\alpha_x\alpha_\xi^2 - 3f_\xi\alpha_x^2\alpha_\xi + 3f_{\xi^2}\alpha_x^3\} - \tfrac{1}{3}u_\xi u_x\{f\alpha_\xi^3 - 3f_\xi\alpha_x\alpha_\xi^3 + 3f_{\xi^2}\alpha_x^2\alpha_\xi\},$$

Nach der Identität (p. 453): $(a\alpha\widehat{x\xi})^3 = 0$ verschwindet hierbei der Coefficient von u_xu_ξ. *In Symbolen a und α geschrieben, lautet mithin die gesuchte Hesse'sche Covariante der Form p_x^4:*

$$(10)\qquad q_x^4 = a_x^3\alpha_x\alpha_\xi^2 - 3a_x^2a_\xi\alpha_x^2\alpha_\xi + 3a_xa_\xi^2\alpha_x^3.$$

Um die *Covariante sechster Ordnung* von p_x^4, sie möge mit r_x^6 bezeichnet werden, zu erhalten, ist die erste Ueberschiebung von p

---

*) Es sind hierbei mit $\widehat{x\xi}$ die Unterdeterminanten bezeichnet:

$$\widehat{x\xi}_1 = x_2\xi_3 - x_3\xi_2 \text{ u. s. w.}$$

mit q aufzustellen; der Connex $(pqu)p_x^3q_x^3$ ist alsdann gleich dem Producte $u_\xi r_x^6$. Die Absonderung des überflüssigen Factors bildet wiederum die zunächst liegende Aufgabe. Bringt man die erste Polare eines Punktes y in Bezug auf q_x^4 in die Form:

$$(11)\quad q_x^3q_y = 3a_y\alpha_x(a\alpha\widehat{x\xi})^2 + \alpha_y a_x(a_x^2\alpha_\xi^2 - 6a_x a_\xi \alpha_x\alpha_\xi + 9a_\xi^2\alpha_x^2)$$

und transformirt diese vermittelst der Identität:

$$(a\alpha\widehat{x\xi})^2 a_y\alpha_x = (a\alpha\widehat{x\xi})^2 a_x\alpha_y,$$

so erhält man zwei Weisen der Darstellung, die im Folgenden zur Verwendung kommen sollen:

$$(12)\quad \begin{aligned} q_x^3q_y &= \alpha_y(f\alpha_\xi^2 - 3f_\xi\alpha_x\alpha_\xi + 3f_{\xi^2}\alpha_x^2) \\ &= (a_x^2\alpha_x\alpha_\xi - 2a_x a_\xi\alpha_x^2)(a_y\alpha_\xi - \alpha_y a_\xi) + a_y a_\xi^2\alpha_x^3. \end{aligned}$$

Die erste Polare in Bezug auf p werde in der Form:

$$(13)\quad p_x^3p_y = fa_y a_\xi^2 + 3a_x^2 b_x b_\xi(ab\widehat{y\xi})$$

zu Grunde gelegt, so dass sich für $p_x^3q_x^3(pqu)$ die Relation bietet:

$$(14)\quad \begin{aligned} p_x^3q_x^3(pqu) &= fa_\xi^2(aqu)q_x^3 + 3a_x^2b_x b_\xi(b_\xi(aqu) - a_\xi(bqu))q_x^3 \\ &= -3a_x^2b_x b_\xi(qab)q_x^3u_\xi - fa_\xi^2(qau)q_x^3, \end{aligned}$$

weil wiederum $q_x^3q_\xi = 0$. Hier lässt sich nun in zweckmässiger Weise das erste Glied durch die sub (12) zuerst gegebene Polarenbildung, das zweite dagegen vermittelst der zweiten dort aufgestellten Form entwickeln; man findet auf diese Weise mit Berücksichtigung der Relation $a_\xi^3 = 0$ die neue Form:

$$(15)\quad -3u_\xi a_x^2b_x b_\xi(ab\alpha)\{f\alpha_\xi^2 - 3f_\xi\alpha_x\alpha_\xi + 3f_{\xi^2}\alpha_x^2\} + u_\xi fa_\xi^2(ab\alpha)(b_x^2\alpha_x\alpha_\xi - 2b_x b_\xi\alpha_x^2)$$

Der Factor u_ξ ist demnach, wie erforderlich, ausgesondert worden. Es erübrigt nur noch den gefundenen Ausdruck: $\frac{p_x^3q_x^3(pqu)}{u_\xi}$, den wir mit Benutzung der aus der Gleichung $b_x b_\xi(ab\alpha)(a\alpha\widehat{x\xi})^2 = 0$ hervorgehenden Identität:

$$a_x^2b_x b_\xi\alpha_\xi^2(ab\alpha) = -a_\xi^2b_x b_\xi\alpha_x^2(ab\alpha)$$

wie folgt schreiben können:

$$\begin{aligned}(16)\quad r_x^6 = -f(ab\alpha)\{a_x^2b_x b_\xi\alpha_\xi^2 - a_\xi^2b_x^2\alpha_x\alpha_\xi\} + \tfrac{3}{2}f_\xi\alpha_x\alpha_\xi a_x b_x(ab\alpha)(ab\widehat{x\xi}) \\ - \tfrac{3}{2}f_{\xi^2}\alpha_x^2\, a_x b_x(ab\alpha)(ab\widehat{x\xi})\end{aligned}$$

durch bekannte Formen des Systems darzustellen. Da die einzelnen Glieder, welche hier auftreten, in Punktcoordinaten von der vierten Ordnung, in Liniencoordinaten, falls $\widehat{x\xi} = u$ gesetzt wird, von der

ersten Classe sind, der Grad in den Coefficienten der Grundform fünf beträgt, so leiten sie auf die Zwischenform L; dieselbe ist definirt durch die Werthe (a. a. O. p. 482):

$$(17)\qquad \begin{aligned} L &= \tfrac{3}{4}(abu)(ab\alpha)a_x b_x \alpha_x^2 - \tfrac{1}{24} S f u_x \\ &= \tfrac{3}{2}(a\alpha b)(b\alpha u)a_x^2 b_x \alpha_x + \tfrac{1}{12} S f u_x . \end{aligned}$$

Weil im vorliegenden Falle $u = \widehat{x\xi}$, also $u_x = 0$ ist, so kann man direct L den symbolischen Ausdrücken rechts gleichsetzen. Mit Benutzung der ersten Form entsteht für die *erste Polare* von L nach ξ gebildet die Gleichung:

$$(18)\qquad \begin{aligned} L_\xi &= \tfrac{3}{8}(abu)(ab\alpha)a_x b_x \alpha_x \alpha_\xi + \tfrac{3}{8}(abu)(ab\alpha)a_\xi b_x \alpha_x^2 \\ &= \tfrac{3}{4}(abu)(ab\alpha)a_x b_x \alpha_x \alpha_\xi \qquad (u = \widehat{x\xi}). \end{aligned}$$

Ebenso findet sich für die *zweite Polare:*

$$L_{\xi^2} = \tfrac{1}{4}(abu)(ab\alpha)\left\{a_x b_x \alpha_\xi^2 + 2a_\xi b_x \alpha_x \alpha_\xi\right\}.$$

Löst man hier das Glied $(ab\widehat{x\xi})$ auf, so gewinnt dieser Werth die Form:

$$(19)\qquad \begin{aligned} L_{\xi^2} &= \tfrac{1}{2}(ab\alpha)\left\{a_x^2 b_x b_\xi \alpha_\xi^2 - a_\xi^2 b_x^2 \alpha_x \alpha_\xi\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}(ab\alpha)\left\{a_x^2 b_\xi^2 \alpha_x \alpha_\xi - a_\xi^2 b_x b_\xi \alpha_x^2\right\}. \end{aligned}$$

Schliesslich berechnet sich noch die *dritte Polare:*

$$(20)\qquad L_{\xi^3} = \tfrac{3}{4}(ab\alpha)(abu)a_\xi b_x \alpha_\xi^2 .$$

Die Covariante sechster Ordnung der vier von einem Curvenpunkte ausgehenden Tangenten lautet demnach:

$$(21)\qquad r_x^6 = -2\left\{f L_{\xi^3} - 3 f_\xi L_{\xi^2} + 3 f_{\xi^2} L_\xi\right\},$$

wenn in dem allgemeinen Ausdrucke von L $u = \widehat{x\xi}$ gesetzt wird. Die Polare des Punktes ξ in Bezug auf diese Form muss identisch verschwinden, was sich in der That durch die folgenden Gleichungen bestätigt:

$$(22)\qquad \begin{aligned} r_x^5 r_\xi &= -\tfrac{2}{3}(f L_{\xi^3} - 3 f_\xi L_{\xi^2} + 3 f_{\xi^2} L_\xi), \\ &= -\tfrac{2}{3} u_l L_x (aL\widehat{x\xi})^3, \qquad (L = L_x^4 u_l), \\ &= \tfrac{1}{2} u_\vartheta \alpha_\vartheta (\Theta a \widehat{x\xi})^2 (\alpha a \widehat{x\xi})\alpha_x = 0. \end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung von $r_x^6 = 0$ ist bekannt. Die drei Wurzelpaare bilden die Doppelelemente der drei in jedem Punkte der Curve darstellbaren, für die Erzeugung derselben wesentlichen involutorischen Strahlbüschel oder, was das Nämliche besagt, die drei correspondirenden Tangentenpaare, ausgehend vom Curvenpunkte ξ an diejenigen drei Curven dritter Classe, welche als Cayley'sche der Curve

$f = 0$ zugeordnet sind, wenn diese als Hesse'sche aufgefasst wird. Betrachtet man hingegen x als beliebigen aber festen Werth, ξ als variabele Coordinaten, so liefert die nämliche Form gleich 0 gesetzt, für jeden Punkt der Ebene *eine durch den Punkt x hindurchgehende Curve dritter Ordnung*, mit der Eigenschaft, dass die neun Schnittpunkte, welche dieselbe mit der Fundamentalcurve gemein hat, verbunden mit dem Punkte x die neun Tangenten bestimmen, welche sich an die genannten drei Curven von x aus ziehen lassen. Liegt der Punkt x auf der Curve f selber, so rücken sechs der Schnittpunkte beider Curven in diesen Punkt zusammen.

Die *Invariante i* vom zweiten Grade in den Coefficienten der Grundform p ergiebt sich aus der vierten Ueberschiebung dieser Form über sich selber: $(pp'u)^4$ nach Division mit dem Factor u_ξ^4. Behandelt man die beiden Theile von $p_x^4 = 4a_x^3 b_x b_\xi^2 - 3a_x^2 a_\xi b_x^2 b_\xi = \varphi_x^4 - \psi_x^4$ gesondert, so ist

$$(pp'u)^4 = (\varphi\varphi'u)^4 - 2(\varphi\psi u)^4 + (\psi\psi'u)^4.$$

Die entwickelte Darstellung dieser Glieder liefert die Werthe:

$$(23)\quad (\varphi\varphi'u)^4 = 4(\varphi cu)^3(\varphi du)d_\xi^2 = 12(acu)^2(adu)(bcu)b_\xi^2 d_\xi^2 = -12u_\vartheta^2(\Theta au)(\Theta bu)a_\xi^2 b_\xi^2,$$

$$(24)\quad -2(\varphi\psi u)^4 = -8(\psi cu)^3(\psi du)d_\xi^2 = -24(acu)(adu)(bcu)^2 a_\xi b_\xi d_\xi^2 = 24u_\vartheta^2\Theta_\xi(\Theta au)(abu)a_\xi b_\xi^2 = 12u_\vartheta^2\Theta_\xi a_\xi b_\xi(abu)\{u_\xi(\Theta ab) - \Theta_\xi(abu)\},$$

$$(25)\quad (\psi\psi'u)^4 = 3(\psi cu)^2(\psi du)^2 c_\xi d_\xi = 3(u_\vartheta^2\Theta_\xi^2)^2 + 6(acu)(bcu)(adu)(bdu)a_\xi b_\xi c_\xi d_\xi.$$

Durch Anwendung des Productsatzes auf das zweite Glied dieser letzten Gleichung transformirt sich dasselbe in:

$$\Theta^2 - \tfrac{1}{2}a_\xi b_\xi c_\xi d_\xi((acu)(bdu) - (bcu)(adu))^2 = \frac{\Theta^2}{2},$$

so dass:

$$(\psi\psi'u)^4 = 6\Theta^2.$$

Transformirt man den Ausdruck (23) mit Benutzung der Identität:

$$a_\xi b_\xi u_\vartheta^2(\Theta_\xi(abu) - u_\xi(ab\Theta))^2 = a_\xi b_\xi u_\vartheta^2(a_\xi(\Theta bu) - b_\xi(\Theta au))^2,$$

so wird derselbe gleich:

$$6\Theta^2 + 6u_\xi^2 a_\xi b_\xi u_\vartheta^2(ab\Theta)^2 - 12a_\xi^3 u_\vartheta^2(\Theta bu)^2 b_\xi - 12u_\xi a_\xi b_\xi \Theta_\xi u_\vartheta^2(abu)(ab\Theta),$$

so dass die Summe der Formen (23), (24) und (25) den Werth annimmt:

$$(26)\quad (pp'u)^4 = 6u_\xi^2 a_\xi b_\xi u_\vartheta^2(ab\Theta)^2 - 12a_\xi^3(\Theta bu)^2 b_\xi u_\vartheta^2 = Su_\xi^4 - 4a_\xi^3 \Sigma u_\xi \qquad \text{(a. a. O. p. 447).}$$

Da im vorliegenden Falle $a_\xi^3 = 0$ ist, *so ist die gesuchte Invariante:*

$$i = \frac{(pp'u)^4}{u_\xi^4} = S. \tag{27}$$

Um schliesslich noch den Werth der *Invariante* $j = \frac{(pqu)^4}{u_\xi^4}$ zu ermitteln, lässt sich ein einfacher Weg einschlagen, welcher durch Deltairen (Substitution der Coefficienten von Δ) der für jeden Werth von ξ identischen Gleichung (26) gewonnen wird. Ist nämlich:

$$S u_\xi^4 = (pp'u)^4 + 4\, a_\xi^3 \Sigma u_\xi,$$

so ist:

$$\delta S \cdot u_\xi^4 = 4 T u_\xi^4 = 2\,(p\delta pu)^4 + 4\, a_\xi^3 \Sigma u_\xi + 12 a_\xi^3 \mathsf{T} u_\xi \tag{28}$$

eine gleichfalls für jeden Werth von ξ identische Relation, die, wenn die Bedingung $a_\xi^3 = 0$ aufrecht erhalten wird, zur Gleichung führt:

$$(p\delta pu)^4 = 2\, T u_\xi^4 - 2\, a_\xi^3 u_\xi \Sigma. \tag{29}$$

Der Werth von δp ist gemäss der Gleichung (3):

$$\delta p_x^4 = 4\, a_x^3 f_\xi + 4\, f a_x a_\xi^2 - 6\, f_\xi a_x^2 a_\xi. \tag{30}$$

Setzt man denselben gleich $2 q_x^4 + \varrho_x^4$, so wird $(p\delta pu)^4 = 2(pqu)^4 + (p\varrho u)^4$, wobei nach Gleichung (10):

$$\varrho_x^4 = 2 f a_x a_\xi^2 - 2 f_\xi a_x^3. \tag{31}$$

Demgemäss ist, indem man von der Form $p_x^3 p_y = 3 a_x^2 b_x b_\xi (\widehat{ab}\, y\, \xi) + a_x^3 b_y b_\xi^2$ ausgeht:

$$\begin{aligned}(p\varrho u)^4 + 2 a_\xi^3 u_\xi \Sigma &= 2(pcu)^3 (p\alpha u) a_\xi^2 - 2(pcu)(p\alpha u)^3 c_\xi^2 + 2 a_\xi^3 u_\xi \Sigma \\ &= 6\,(acu)^2 (bcu) b_\xi (\widehat{ab}\ \widehat{\alpha u}\ \xi) a_\xi^2 + 2 a_\xi^3 u_\xi \Sigma \\ &\quad + 6\,(c\alpha u)^2 (b\alpha u) b_\xi (\widehat{bc}\ \widehat{au}\ \xi) a_\xi^2.\end{aligned} \tag{32}$$

Wird das Klammerglied des ersten Ausdrucks aufgelöst, so erhält das eine Glied den Werth:

$$6\,(acu)^2 (bcu)(abu) b_\xi a_\xi^3 = -2\, a_\xi^3 u_\xi \Sigma,$$

so dass die Gleichung (32) in die Differenz übergeht:

$$\begin{aligned}&-6\left\{(acu)^2 (bcu)(ab\alpha) b_\xi a_\xi^2 + (c\alpha u)^2 (b\alpha u)(abc) a_\xi^2 b_\xi\right\} u_\xi \\ =\ &-6\left\{(acu)^2 (bcu)(ab\alpha) b_\xi a_\xi^2 + (c\alpha u)^2 (ab\alpha)(bcu) a_\xi^2 b_\xi\right\} u_\xi \\ =\ &-6\,(bcu)(ab\alpha) b_\xi u_\xi \left\{(acu) a_\xi - (c\alpha u) a_\xi\right\}^2 = 0.\end{aligned}$$

Demnach ist, wie zu erwarten war:

$$j = \frac{(pqu)^4}{u_\xi^4} = T, \tag{33}$$

während bei Berücksichtigung der mit dem Factor a_ξ^3 behafteten Glieder die volle Identität lautet:

(34) $$(pqu)^4 = Tu_\xi^4 - 4\, a_\xi^3 \mathsf{T} u_\xi + 2\, a_\xi^3 \Lambda.$$

da bei der Auflösung des letzten Gliedes der Gleichung (32) noch der Ausdruck:

$$(c\alpha u)^2 (b\alpha u)(bcu) b_\xi a_\xi^3 = a_\xi^3 (-\tfrac{2}{3}\Lambda + \tfrac{1}{3}\mathsf{T} u_\xi)$$ (a. a. O. p. 487)

auftritt.

§ 2.

Die Elimination der Grössen ξ aus den Gleichungen:

$$a_\xi^3 = 0, \quad \varkappa p_\xi^2 + \lambda q_\xi^2 = 0, \quad u_\xi = 0.$$

Die lineare Verbindung der Formen p_x^4 und q_x^4, sie werde mit $\varkappa p_x^4 + \lambda q_x^4$ bezeichnet, bestimmt, gleich 0 gesetzt, für jeden Werth von $\varkappa$, λ in allen Curvenpunkten ξ je ein Quadrupel von Linien, dessen absolute Invariante zufolge des Satzes von der Constanz des Doppelverhältnisses der vier Tangenten, völlig unabhängig vom Werthe ξ, nur durch die Invarianten S und T und die für $\varkappa$, λ gewählten Werthe bedingt ist. *Es soll im Folgenden das Umhüllungsgebilde ermittelt werden, welches durch die in allen Curvenpunkten bei festen Werthen von $\varkappa$, λ erzeugten Quadrupel entsteht.* Da die vorliegende Form in ξ quadratisch ist, durch jeden Punkt der Ebene demnach je sechs Linien der charakterisirten Art hindurchgehen, so ergiebt sich als vorläufige Bestimmung, dass die Einhüllenden ein System von algebraischen Curven *sechster Classe* bilden.

Die Durchführung des gestellten Problemes erfordert die Elimination der Grössen ξ aus den drei Gleichungen:

$$\varkappa p_\xi^2 + \lambda q_\xi^2 = \tau_\xi^2 = 0, \quad a_\xi^3 = 0, \quad u_\xi = 0,$$

wobei noch die Relation $u_x = 0$ wesentlich ist.

Die Resultante zwischen der Curve a_ξ^3 und dem Kegelschnitte τ_ξ^2, welche das Product der sechs gemeinsamen Schnittpunkte darstellt und durch welche diese Elimination geleistet wird, hat bekanntlich die Form*):

(1) $$R = (a\tau u)^2 (b\tau' u)^2 (a\tau'' u)(b\tau'' u) - 2(abu)^2 (a\tau u)(b\tau u)(\tau'\tau'' u)^2.$$

Die zweite Ueberschiebung zweier Formen τ_ξ^2, $\tau_\xi'^2$ soll im Folgenden der Kürze halber durchgehends mit $[\tau\tau'] = (\tau\tau' u)^2$ bezeichnet werden.

Nach Anwendung des Productsatzes auf den symbolischen Factor $(a\tau u)^2 (b\tau' u)^2$ des ersten Gliedes in R lässt sich sonach mit Einführung dieser Bezeichnung, sowie der Symbole von Θ, die Resultante durch die neue Form ersetzen:

---

*) Clebsch: Binäre Formen, p. 90.

(2) $R = (a\tau u)(b\tau u)(a\tau' u)(b\tau' u)(a\tau'' u)(b\tau'' u) - \frac{3}{2}[\Theta\tau][\tau'\tau'']$,

welche den Ausgang für die nachfolgenden Rechnungen bilden wird. Man bringe den Ausdruck τ_ξ^2 auf die Form:

$$\begin{aligned}
&\varkappa\left(f a_x a_\xi^2 + \tfrac{3}{2}\Theta_x^2(\vartheta x\xi)^2\right) + \lambda\left(-\frac{f}{2}\alpha_x\alpha_\xi^2 + \tfrac{3}{2}a_x a_\xi^2\Delta + \tfrac{3}{2}\mathsf{H}_x^2(\eta x\xi)^2\right)\\
&= \left(\varkappa f + \tfrac{3}{2}\lambda\Delta\right)a_x a_\xi^2 - \frac{\lambda}{2}f\alpha_x\alpha_\xi^2 + \tfrac{3}{2}\left(\varkappa\Theta_x^2(\vartheta x\xi)^2 + \lambda\mathsf{H}_x^2(\eta x\xi)^2\right)\\
&= \varrho_\xi^2 + \tfrac{3}{2}(\varkappa\Theta + \lambda\mathsf{H})(\sigma x\xi)^2 = \tau_\xi^2,
\end{aligned}$$

wobei also:

$$\begin{aligned}
(3)\qquad \varrho_\xi^2 &= (\varkappa f + \tfrac{3}{2}\lambda\Delta)a_x a_\xi^2 - \frac{\lambda}{2}f\alpha_x\alpha_\xi^2 = \mu a_x a_\xi^2 + \nu\alpha_x\alpha_\xi^2,\\
\tfrac{3}{2}(\varkappa\Theta + \lambda\mathsf{H})(\sigma x\xi)^2 &= \tfrac{3}{2}\left(\varkappa\Theta_x^2(\vartheta x\xi)^2 + \lambda\mathsf{H}_x^2(\eta x\xi)^2\right).
\end{aligned}$$

Die Symbole σ sind dadurch charakterisirt, dass $u_\sigma^2 = 1$ ist. Führt man diese Werthe von τ_ξ^2 in die Gleichung (2) ein, so ergeben sich vier Reihen, je nachdem 0, 1, 2 oder 3 der Symbole τ durch $\widehat{\sigma x}$ oder ϱ ersetzt werden. Eine einfache Rechnung lehrt, dass die auf solche Weise gewonnenen dritten und vierten Reihen sich gegenseitig aufheben, so dass zufolge der Relation $u_\sigma^2 = 1$ und $u_x = 0$ die Gleichung (2) die Form annimmt:

$$\begin{aligned}
(4)\quad R &= (a\varrho u)(b\varrho u)(a\varrho' u)(b\varrho' u)(a\varrho'' u)(b\varrho'' u) - \tfrac{3}{2}[\Theta\varrho][\varrho'\varrho'']\\
&\quad + \tfrac{9}{2}(\varkappa\Theta + \lambda\mathsf{H})\left\{a_x b_x(a\varrho u)(b\varrho u)(a\varrho' u)(b\varrho' u) - \tfrac{1}{2}\Theta[\varrho\varrho'] - \varrho_x^2[\Theta\varrho]\right\}\\
&= R_1 + \tfrac{3}{2}(\varkappa\Theta + \lambda\mathsf{H})R_2.
\end{aligned}$$

Dabei lassen sich ohne Weiteres die Werthe berechnen:

$$\begin{aligned}
(5)\qquad &[\Theta\varrho] = -\frac{\lambda}{2}f[\Theta\Delta] = -\tfrac{3}{8}\lambda f\Lambda \quad (\text{da } [\Theta f] = 0, \text{ falls } u_x = 0),\\
&[\varrho\varrho'] = \mu^2\Theta + 2\mu\nu\mathsf{H} + \nu^2\mathsf{K}.
\end{aligned}$$

Für das Folgende sind überhaupt die Definitionen für Λ und M erforderlich, die hier gleich vorangestellt werden mögen. *Unter der Bedingung* $u_x = 0$ ist nämlich*):

$$(6)\qquad \Lambda = -\tfrac{3}{2}[f\mathsf{H}] = \tfrac{3}{4}[\Delta\Theta], \qquad \mathsf{M} = -\tfrac{3}{4}[f\mathsf{K}] = \tfrac{3}{2}[\Delta\mathsf{H}].$$

Ferner definiren wir noch:

$$\begin{aligned}
(7)\qquad &F_1 = [\Theta\mathsf{H}] = \tfrac{1}{3}\Sigma^2, && F_2 = [\Theta\mathsf{K}] = [\mathsf{H}\mathsf{H}] = -\frac{S}{6}F + \tfrac{2}{3}\Sigma\mathsf{T},\\
&F_3 = [\mathsf{H}\mathsf{K}] = -\frac{TF}{3} + \mathsf{T}^2, && F_4 = [\mathsf{K}\mathsf{K}] = -\frac{S^2}{12}F + \tfrac{2}{3}S\Sigma\mathsf{T} - \tfrac{4}{9}T\Sigma^2.
\end{aligned}$$

*) A. a. O. p. 487. In der zweiten für Λ aufgestellten Formel ist hier ein Druckfehler zu verbessern. Dieselbe muss heissen:

$$\Lambda = +\tfrac{3}{4}(a\alpha u)(b\alpha u)(ab u)^2\alpha_x - \tfrac{1}{4}\mathsf{T}u_x.$$

Die entwickelte Darstellung der Grösse R_1 erfolgt durch die Substitution der Werthe $\mu a_x a_\xi^2 + \nu \alpha_x \alpha_\xi^2 = \varrho_\xi^2$. Auf die vier Glieder, welche sich dadurch ergeben, ist der Productsatz anzuwenden und man erhält auf diese Weise die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&(acu)\,(bcu)\,(adu)\,(bdu)\,(aeu)\,(beu)\,c_x\,d_x\,c_x = -\tfrac{1}{2}Ff.\\
&(a\alpha u)\,(b\alpha u)\,(acu)\,(bcu)\,(adu)\,(bdu)\,\alpha_x\,c_x\,d_x = \tfrac{1}{2}\Theta[\Theta\Delta] - \tfrac{1}{2}\Delta F,\\
&(a\alpha u)\,(b\alpha u)\,(a\beta u)\,(b\beta u)\,(acu)\,(bcu)\,\alpha_x\beta_x c_x = \mathsf{H}[\mathsf{H}f] - \tfrac{1}{2}fF_2,\\
&(a\alpha u)\,(b\alpha u)\,(a\beta u)\,(b\beta u)\,(a\gamma u)\,(b\gamma u)\,\alpha_x\beta_x\gamma_x = \mathsf{H}[\mathsf{H}\Delta] - \tfrac{1}{2}\mathsf{K}[\Theta\Delta] - \tfrac{1}{2}\Delta F_2.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Summirt man diese Glieder, welche bezüglich mit den Factoren μ^3, $3\mu^2\nu$, $3\mu\nu^2$, ν^3 multiplicirt sind, und ordnet dieselben bei Eintragung der Werthe für μ und ν nach Potenzen von $\varkappa$, λ, so findet man schliesslich die Endformel:

$$
\begin{aligned}
(9)\quad R_1 = &-\tfrac{1}{2}Ff^4\varkappa^3 - \tfrac{3}{2}f^3\Delta F\varkappa^2\lambda + (-\tfrac{9}{8}f^2\Delta^2 F - \tfrac{3}{2}f^3\mathsf{H}\Lambda - \tfrac{3}{8}f^4F_2)\varkappa\lambda^2\\
&+(-\tfrac{9}{4}f^2\Delta\mathsf{H}\Lambda - \tfrac{1}{2}f^3\Delta F_2 - \tfrac{1}{12}f^3\mathsf{H}\mathsf{M} + \tfrac{1}{3}f^3\mathsf{K}\Lambda)\lambda^3.
\end{aligned}
$$

Die explicite Darstellung der Grösse R_2 liefert das Resultat:

$$
\begin{aligned}
(10)\quad \tfrac{9}{2}(\varkappa\Theta + \lambda\mathsf{H})R_2 &= \tfrac{9}{2}(\varkappa\Theta + \lambda\mathsf{H})\left\{a_x b_x (a\varrho u)^2 (b\varrho' u)^2 - \Theta[\varrho\varrho'] - [\Theta\varrho]\varrho_x^2\right\}\\
&= \tfrac{9}{2}(\varkappa\Theta + \lambda\mathsf{H})\left\{(\mu\Theta + \nu\mathsf{H})^2 - \Theta(\mu^2\Theta + 2\mu\nu\mathsf{H} + \nu^2\mathsf{K})\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \tfrac{2}{3}\lambda f^2\Lambda(\varkappa f + \lambda\Delta)\right\}\\
&= 3f^3\Lambda\Theta\varkappa^2\lambda + \varkappa\lambda^2\left(3f^3\Lambda\mathsf{H} + \tfrac{9}{8}f^2(\mathsf{H}^2 - \Theta\mathsf{K})\Theta + 3f^2\Delta\Lambda\Theta\right)\\
&\qquad + \lambda^3\left(\tfrac{9}{8}f^2(\mathsf{H}^2 - \Theta\mathsf{K})\mathsf{H} + 3f^2\Delta\Lambda\mathsf{H}\right).
\end{aligned}
$$

Durch Addition der Gleichungen (9) und (10) folgt unter Berücksichtigung der Identität:

$$(\mathsf{K}\Theta - \mathsf{H}^2) = \tfrac{2}{3}(\Delta\Lambda - f\mathsf{M}) \qquad \text{(a. a. O. p. 485)}$$

der Werth:

$$
\begin{aligned}
(11)\quad R = &\varkappa^3(-\tfrac{1}{2}Ff^4) + \varkappa^2\lambda(-\tfrac{3}{2}f^3\Delta F + 3f^3\Lambda\Theta)\\
&+ \varkappa\lambda^2(-\tfrac{9}{8}f^2\Delta^2 F + \tfrac{3}{2}f^3\Lambda\mathsf{H} + \tfrac{9}{4}f^2\Delta\Theta\Lambda + \tfrac{3}{4}f^3\Theta\mathsf{M} - \tfrac{3}{8}f^4F_2)\\
&+ \lambda^3(\tfrac{2}{3}f^3\mathsf{H}\mathsf{M} + \tfrac{1}{3}f^3\mathsf{K}\Lambda - \tfrac{1}{2}f^3\Delta F_2),
\end{aligned}
$$

ein Ausdruck, aus welchem der Factor f^2 ausscheidbar ist; wird dieser Factor, wenn $R = 0$ gesetzt wird, fortgelassen, so sind die Grössen x noch in der sechsten Potenz, scheinbar mit u verbunden, vorhanden. Da indess das Resultat der Elimination eine Curvengleichung von der sechsten Classe liefern soll, so müssen ausser der bereits benutzten Relation zwischen Λ und M noch anderweitige Beziehungen für diese Formen bestehen, durch welche sich die Grössen x von den Grössen u abtrennen lassen; die Ermittelung dieser Beziehungen bildet daher die nächstliegende Aufgabe.

§ 3.

Relationen für die Hauptcoincidenzen der Connexe Λ und M.

Geht man von den identisch verschwindenden Formen aus:

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_x b_x \alpha_x (a\,b\,u)(a\,\alpha\,u)(b\,\alpha u) &= 0,\\ a_x \alpha_x \beta_x (a\,\alpha u)(a\,\beta u)(\alpha\,\beta u) &= 0, \end{aligned}$$

so liefern dieselben nach einer einfachen symbolischen Umformung *unter Hinzuziehung der Bedingung* $u_x = 0$ die Relation:

$$(2)\qquad \begin{aligned} a_x^2 \mathsf{H}_x (\mathsf{H}\,a\,u) - \alpha_x^2 \Theta_x (\Theta\,\alpha\,u) &= 0,\\ \alpha_x^2 \mathsf{H}_x (\mathsf{H}\,\alpha\,u) - a_x^2 \mathsf{K}_x (\mathsf{K}\,a\,u) &= 0, \end{aligned}$$

Durch die ersten Ueberschiebungen dieser beiden Formen mit einer Form ϱ_x^2 entstehen die neuen für $u_x = 0$ identisch verschwindenden Ausdrücke:

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_x^2 \varrho_x (\mathsf{H}\,\varrho\,u)(\mathsf{H}\,a\,u) - 2\,a_x \varrho_x \mathsf{H}_x (\varrho\,a\,u)(\mathsf{H}\,a\,u) - \alpha_x^2 \varrho_x (\Theta\,\varrho\,u)(\Theta\,\alpha\,u)\\ + 2\,\alpha_x \varrho_x \Theta_x (\varrho\,\alpha\,u)(\Theta\,\alpha\,u) = 0,\\ a_x^2 \varrho_x (\mathsf{H}\,\varrho\,u)(\mathsf{H}\,\alpha\,u) - 2\,\alpha_x \varrho_x \mathsf{H}_x (\varrho\,a\,u)(\mathsf{H}\,\alpha\,u) - a_x^2 \varrho_x (\mathsf{K}\,\varrho\,u)(\mathsf{K}\,a\,u)\\ + 2\,a_x \varrho_x \mathsf{K}_x (\varrho\,a\,u)(\mathsf{K}\,a\,u) = 0. \end{aligned}$$

Nach dem Productsatze lassen sich diese Gleichungen, wenn die Gleichungen (6) des vorigen § benutzt werden, transformiren in die Formen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \varrho_x^2 \Lambda &= \tfrac{3}{2}\mathsf{H}[f\varrho] - \tfrac{3}{2}\Theta[\Delta\varrho] - \tfrac{3}{2} f[\mathsf{H}\varrho] + \tfrac{3}{2}\Delta[\Theta\varrho],\\ \varrho_x^2 \mathsf{M} &= \tfrac{3}{2}\mathsf{K}[f\varrho] - \tfrac{3}{2}\mathsf{H}[\Delta\varrho] - \tfrac{3}{2} f[\mathsf{K}\varrho] + \tfrac{3}{2}\Delta[\mathsf{H}\varrho]. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen bedeutet ϱ_x^2 eine völlig willkührliche Form; dagegen besteht die Gültigkeit derselben nur unter der Bedingung $u_x = 0$. Setzt man nun insbesondere in die erste dieser Gleichungen für ϱ_x^2 der Reihe nach die Werthe Δ, Θ, H, K ein, in die zweite schliesslich den Werth K, so gewinnt man fünf Gleichungen, welche die gesuchten für Λ und M bestehenden Relationen darstellen; es ist nämlich:

$$(5)\qquad \tfrac{2}{3}\Delta\Lambda = \mathsf{H}[f\Delta] - \Theta[\Delta\Delta] - f[\mathsf{H}\Delta] + \Delta[\Theta\Delta],$$

$$(6)\qquad \tfrac{2}{3}\Theta\Lambda = \mathsf{H}[f\Theta] - \Theta[\Delta\Theta] - f[\mathsf{H}\Theta] + \Delta[\Theta\Theta],$$

$$(7)\qquad \tfrac{2}{3}\mathsf{H}\Lambda = \mathsf{H}[f\mathsf{H}] - \Theta[\Delta\mathsf{H}] - f[\mathsf{H}\mathsf{H}] + \Delta[\Theta\mathsf{H}],$$

$$(8)\qquad \tfrac{2}{3}\mathsf{K}\Lambda = \mathsf{H}[f\mathsf{K}] - \Theta[\Delta\mathsf{K}] - f[\mathsf{H}\mathsf{K}] + \Delta[\Theta\mathsf{K}],$$

$$(9)\qquad \tfrac{2}{3}\mathsf{K}\mathsf{M} = \mathsf{K}[f\mathsf{K}] - \mathsf{H}[\Delta\mathsf{K}] - f[\mathsf{K}\mathsf{K}] + \Delta[\mathsf{H}\mathsf{K}].$$

Dieselben lassen sich auch folgendermassen schreiben*):

(10) $\Delta\Lambda = fM + \frac{3}{2}(K\Theta - H^2)$,

(11) $\Theta\Lambda = \frac{1}{2}\Delta F - \frac{1}{2}fF_1 = \frac{1}{2}\Delta F - \frac{1}{6}f\Sigma^2$,

(12) $H\Lambda = -\frac{1}{2}\Theta M + \frac{3}{4}\Delta F_1 - \frac{3}{4}fF_2 = -\frac{1}{2}\Theta M + \frac{1}{4}\Delta\Sigma^2 + \frac{1}{8}fSF - \frac{1}{2}f\Sigma T$,

(13) $K\Lambda = -2HM + \frac{3}{2}\Delta F_2 - \frac{3}{2}fF_3 = -2HM - \frac{1}{4}\Delta SF + \Delta\Sigma T + \frac{1}{2}fTF - \frac{3}{2}f$

(14) $KM = \frac{1}{2}\Delta F_3 - \frac{1}{2}fF_4 = -\frac{1}{6}\Delta TF + \frac{1}{2}\Delta T^2 + \frac{1}{24}fS^2F - \frac{1}{3}fS\Sigma T + \frac{2}{9}fT\Sigma^2$.

Aus denselben können die zur Anwendung kommenden Relationen abgeleitet werden:

(15) $F\Delta^2 = \Lambda(2\Delta\Theta + \frac{1}{3}fH) + \frac{2}{3}f\Theta M + f^2F_2$,

(16) $F_2\Delta = \frac{2}{3}K\Lambda + \frac{1}{3}HM + fF_3$.

§ 4.

Die Gleichung der Curven sechster Classe.

Werden die eben gefundenen Relationen (11), (15) und (16) in die Schlussgleichung des § 2. eingetragen, so gewinnen die einzelnen Glieder derselben, geordnet nach Potenzen von $\varkappa$, λ, eine einfache Form, während der Factor f^4 vor den gesammten Ausdruck tritt. *Die Gleichung des von den Linien* $\varkappa p_x^4 + \lambda q_x^4 = 0$ *erzeugten Umhüllungsgebildes wird nämlich:*

(1) $R = -\frac{1}{2}f^4\{\varkappa^3F + 3\varkappa^2\lambda F_1 + 3\varkappa\lambda^2F_2 + \lambda^3F_3\} = 0$,

was nach Absonderung des überflüssigen Factors zur Darstellung führt:

(2) $G_1F + \lambda(\varkappa\Sigma + \lambda T)^2 = 0$,

wobei

$$G_1 = \varkappa^3 - \frac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 - \frac{1}{3}T\lambda^3$$

gesetzt ist.

Das Curvensystem, welches durch seine Tangenten die Ebene *dreifach* überdeckt, enthält, wie aus dieser Gleichung hervorgeht, drei doppeltzählende Curven dritter Classe, nämlich die drei Cayley'schen Curven, welche der Fundamentalcurve, als Hesse'scher, zugehören. Jede Curve des Systems hat mit der Fundamentalcurve F 36 paarweise zusammenfallende Tangenten gemein, berührt also dieselbe in 18 Punkten. Hieraus folgt, dass die Curven im Allgemeinen *von der 12. Ordnung* sein müssen.

*) Setzt man u_x nicht gleich 0, untersucht also den Formenzusammenhang zwischen den Connexen Λ und M selber, so können ähnliche Gleichungen wie die oben sub (4) gefundenen aufgestellt werden; doch treten in diesem Falle noch Glieder hinzu, welche als Polaren von Λ und M erscheinen, das heisst so gebildet werden, dass man in diesen Formen die Liniencoordinaten u_i sämmtlich oder theilweise durch die Grössen $\varrho_x\varrho_i$ ersetzt.

Eine besonders einfache Form, deren geometrischer Sinn nicht unwesentlich ist, gewinnt dieses System, indem man die Gleichung des syzygetischen Büschels $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ in *Liniencoordinaten* betrachtet. Man hat (p. 508):

$$F_{\varkappa\lambda} = \varkappa^4 F + 4\varkappa^3\lambda F_1 + 6\varkappa^2\lambda^2 F_2 + 4\varkappa\lambda^3 F_3 + \lambda^4 F_4,$$

und also lässt sich die Gleichung (1) in der Form darstellen:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial F_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} = 0, \tag{3}$$

Diese Gleichung besagt aber, dass die gemeinsamen Tangenten von $F_{\varkappa\lambda}$ mit $\frac{\partial F_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}$ auch die gemeinsamen Tangenten der Curve $F_{\varkappa\lambda}$ und der ihr benachbarten Curve $F_{\varkappa+d\varkappa\lambda}$ sind. Da diese durch die Wendetangenten der Curve $F_{\varkappa\lambda}$ gegeben werden, so hat die Curve $\frac{\partial F_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}$ mit $F_{\varkappa\lambda}$ nur neun von einander verschiedene Tangenten gemein, die für $F_{\varkappa\lambda}$ Wendetangenten, daher für $\frac{\partial F_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}$ *Doppeltangenten* sein müssen (die Möglichkeit, dass diese auch für die Curven sechster Classe Wendetangenten seien, ist durch die Ordnungszahl 12 ausgeschlossen). Es ergiebt sich hiernach das Resultat: *Eine durch bestimmte Werthe von $\varkappa$, λ charakterisirte Curve besitzt die neun Wendetangenten der durch die nämlichen Werthe von $\varkappa$, λ bestimmten Curve $\varkappa f + \lambda\Delta$ zu Doppeltangenten.* Die Gleichung $G_{\varkappa\lambda} = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \frac{4}{3}T\varkappa\lambda^3 - \frac{S^2}{12}\lambda^4 = 0$ bestimmt vier Curven, bei denen je drei Doppeltangenten zu einer dreifachen zusammenfallen; diese Curven können, wie früher bestimmt wurde*), auch so construirt werden, dass man zu den Punkten der Fundamentalcurve die linearen Polaren in Bezug auf je eines der vier Wendepunktsdreiecke bildet. Der Satz über die Lage der neun Doppeltangenten jeder der Curven lässt sich noch anderweitig beweisen. Betrachtet man nämlich $\frac{1}{4}\frac{\partial F_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} = 0$ als binäre cubische Form in $\varkappa$, λ, so kann nach denjenigen Linien u der Ebene gefragt werden, für welche die *Discriminante* dieser cubischen Gleichung verschwindet, welche also nicht von *drei*, sondern nur noch von *zwei verschiedenen* Curven des Systems tangirt werden. Bezeichnet man die binäre biquadratische Form $F_{\varkappa\lambda}$ symbolisch durch $(a_1\varkappa + a_2\lambda)^4 = 0$, so wird $\frac{1}{4}\frac{\partial F_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} = a_1(a_1\varkappa + a_2\lambda)^3$, wobei $a_1^4 = F$ ist. Die Discriminante dieser cubischen Gleichung ist:

---

*) Math. Annalen Bd. IX, p. 46.

$$(4)\qquad \begin{aligned}\nabla &= (ab)^2(cd)^2(ac)(bd)a_1c_1b_1d_1\\ &= (ab)^2(cd)^2(bd)a_1c_1d_1(a_1(bc)+c_1(ab))\\ &= \tfrac{1}{3}Fj - \tfrac{i}{2}a_1^2b_1^2(ab)^2,\end{aligned}$$

wenn i und j die Invarianten der biquadratischen Form bezeichnen. *Eine directe Berechnung der Invariante i zeigt, dass dieselbe identisch (unabhängig von u) verschwindet* *). Mithin reducirt sich diese Gleichung auf den Ausdruck:

$$(5)\qquad \nabla = \tfrac{1}{3}Fj.$$

Da die Form $F_{x\lambda} = 0$ für die durch die Wendepunkte gehenden Linien — für diese verschwindet zugleich F und Σ — drei zusammenfallende Wurzeln besitzt, was durch das gleichzeitige Verschwinden von i und j gefordert wird, so besteht j jedenfalls aus dem Producte der neun Wendepunkte und zwar ist, wie durch Rechnung gefunden wird**):

$$(6)\quad j = 6\begin{vmatrix}[\Theta\Theta] & [\Theta H] & [\Theta K]\\ [H\Theta] & [HH] & [HK]\\ [K\Theta] & [KH] & [KK]\end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix}\Theta_x^2 & \Theta_x\Theta_y & \Theta_y^2\\ H_x^2 & H_xH_y & H_y^2\\ K_x^2 & K_xK_y & K_y^2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Theta_x^2-2\Theta_x\Theta_y & \Theta_y^2\\ H_x^2-2H_xH_y & H_y^2\\ K_x^2-2K_xK_y & K_y^2\end{vmatrix}$$

$$j = -12\begin{vmatrix}\Theta_x^2 & H_xH_y & K_y^2\end{vmatrix}^2 u_\vartheta^2u_{\vartheta'}^2u_\eta^2u_{\eta'}^2u_x^2u_{x'}^2,$$

wenn $\widehat{xy} = u$ gesetzt und alle Ausdrücke von der Art: $(\Theta\Theta'\widehat{xy})^2$ aufgelöst werden. Also ist (p. 466):

$$(7)\qquad \nabla = -4F\begin{vmatrix}\Theta_x^2 & f_{\Sigma^{xy}} & 2f_{T^{y^2}}\end{vmatrix}^2.$$

Führt man hier für $f_{\Sigma^{x^2}}$ den Werth $a_x^2u_s^2a_s$ für $f_{T^{x^2}}$ den Werth $b_x^2u_t^2b_t$ u. s. w. ein, so zieht sich die Determinante zusammen auf den Ausdruck:

$$(8)\qquad \begin{aligned}\nabla &= -4F(2u_\vartheta^2u_s^2u_t^2a_sb_t(abu)(\Theta au)(\Theta bu))^2\\ &= -4F(u_\vartheta^2u_s^2u_t^2u_{\vartheta'}(\vartheta' st)(\Theta\Theta' u)^2)^2 = -4F(F\Sigma T)^2.\end{aligned}$$

Die Discriminante der cubischen Gleichung besteht demnach aus dem Producte von F mit dem Quadrate der *Functionaldeterminante* $(F\Sigma T)$, *welche das Product der neun Wendepunkte darstellt*, wodurch die obige Behauptung von Neuem bewiesen ist.

---

*) Die geometrische Interpretation des Verschwindens der Invariante i ist durch den Satz gegeben: In jedem Wendepunkte liegen die Tangenten derjenigen vier Curven des syzygetischen Büschels, welche die nämliche Gerade berühren, äquianharmonisch.

**) Clebsch: Binäre Formen, p. 136.

§ 5.

Die Curven $\frac{\partial F_{\varkappa\lambda}}{\partial \varkappa}$ in ihrer Eigenschaft als Hauptcoincidenzcurven des Connexes Q.*

Es erübrigt noch der Nachweis, dass dem Curvensysteme die wesentliche Eigenschaft zukommt, die Hauptcoincidenzcurven des Connexes Q zu bilden, d. h. dass die Differentialgleichung derselben durch die Gleichung $Q = (abu)^2 (cau)(cudu)^2 (budu) = 0$ dargestellt wird, oder geometrisch formulirt, dass je einer von den drei Punkten, in denen eine beliebige Gerade von drei Curven des Systems tangirt wird, mit den drei auf der Fundamentalcurve gelegenen Schnittpunkten ein harmonisches Doppelverhältniss bestimmt. Um dieses zu erweisen, liesse sich direct die Differentialgleichung des Curvensystems $\frac{\partial F_{\varkappa\lambda}}{\partial \varkappa} = 0$ bilden; doch wird folgender Weg, der von der ursprünglichen Definition der Curven ausgeht, der Natur des gestellten Problems entsprechender sein. Die Umkehr desselben liefert eine *algebraische* Methode zur Integration der Hauptcoincidenz von Q.

Betrachtet man nämlich das System von vier Linien $\varkappa p_x^4 + \lambda q_x^4 = 0$ in zwei benachbarten Curvenpunkten ξ und $\xi + d\xi$, so bestimmen die Schnittpunkte je zweier Strahlen, welche sich als *benachbarte* entsprechen, den auf diesem Strahle gelegenen Berührungspunkt. Demnach sind, um die Berührungspunkte, welche auf den von ξ ausgehenden Strahlen gelegen sind, zu erhalten, die Constanten $\varkappa$, λ aus den für ξ und $\xi + d\xi$ gebildeten Gleichungen zu eliminiren. Das Product der vier Kegelschnitte, welches aus der Elimination von $\varkappa$, λ für zwei beliebige Curvenpunkte hervorgeht*), muss in zwei benachbarten Punkten, wenn $\widehat{\xi d_{\xi i}} = a_\xi^2 a_i$ gesetzt wird, aus dem Polarkegelschnitt des Punktes ξ bestehen, multiplicirt mit dem Producte der sechs Linien $r_x^6 = 0$, welche dem Büschel als Covariante sechster Ordnung angehören. *Der gesuchte Berührungspunkt eines von ξ ausgehenden Strahles liegt also auf dem Polarkegelschnitte dieses Punktes***). Die drei Punkte,

---

*) Vgl. Cremona: a. a. O. p. 211.

**) Es ergiebt sich hieraus eine Methode zur Darstellung der Curven sechster Classe in *Punktcoordinaten*, indem man die Grössen ξ aus den drei Gleichungen:

$$\varkappa p_x^4 + \lambda q_x^4 = 0, \quad a_\xi^3 = 0, \quad a_x^2 a_\xi = 0$$

eliminirt. Das Resultat der Elimination liefert eine Gleichung, die nach Absonderung des Factors f^4 in x vom zwölften, in $\varkappa, \lambda$ wiederum vom dritten Grade ist. Es möge nur noch angeführt werden, dass sich hierbei der Coefficient von $\varkappa^3$ aus dem *Producte von f mit der Gleichung der neun Wendetangenten* zusammensetzt, demnach die Form erhält:

$$\tfrac{1}{8} f(f\varphi - \tfrac{1}{3} S f^2 \Delta - \tfrac{1}{27} \Delta^3).$$

in denen irgend eine Gerade der Ebene von drei Curven des Systems tangirt wird, werden mithin dadurch erhalten, dass man die Schnittpunkte mit denjenigen drei Polarkegelschnitten bestimmt, welche zu den drei Schnitten dieser Linie mit der Fundamentalcurve gehören. Diese Schlussweise erfordert folgende algebraische Formulirung:

Die Elimination der Grössen $\varkappa, \lambda$ aus den beiden Gleichungen, die wir nunmehr als quadratische in ξ betrachten: $\varkappa p_\xi^2 + \lambda q_\xi^2 = 0$ und $\varkappa p_\xi p_{d\xi} + \lambda q_\xi q_{d\xi} = 0$ führt auf die Form:

$$p_\xi q_\xi (p_\xi q_{d\xi} - p_{d\xi} q_\xi) = p_\xi q_\xi (pq\xi\widehat{d\xi}),$$

oder, falls $\xi\widehat{d\xi} = a_\xi^2 a_i$ gesetzt wird, auf die Functionaldeterminante (pqf); dieselbe soll in das Product von $a_x^2 a_\xi \cdot r_x^6$ zerfallen. Da nun:

$$p_\xi^2 = 4 f a_x a_\xi^2 - 3 f_\xi^2, \qquad q_\xi^2 = \mathsf{H}_x^2 (\eta x \xi)^2 - f_\xi \Delta_\xi + 2 f_{\xi^2} \Delta,$$

so wird zunächst:

$$\begin{aligned}(1)\quad (pqf) = &-4f\{\mathsf{H}_x^2 a_x a_\xi a_\eta (\eta x\xi) f_{\xi^2} - \tfrac{1}{2}\Delta_\xi a_x^2 b_x b_\xi c_\xi^2 (abc)\} \\ &+ f_\xi [f[\mathsf{H}_x^2 a_\eta a_\xi^2 (\eta x\xi) + 2\alpha_x^2 a_\xi a_x b_\xi^2 (ab\alpha)] - \tfrac{3}{2} f_\xi a_x^2 b_\xi^2 \alpha_x^2 (ab\alpha) \\ &+ 3 f_{\xi^2} a_x^2 a_\eta \mathsf{H}_x^2 (\eta x\xi) + 6\Delta a_x a_\xi b_x^2 c_\xi^2 (abc)].\end{aligned}$$

Mit Hülfe der Identität:

$$(2)\qquad a_x a_\eta (\eta x\xi)\, (a\mathsf{H}\widehat{x\xi})\, \mathsf{H}_x = a_x (ab\alpha)\, (b\alpha\widehat{x\xi})\, (ab\widehat{x\xi})\, \alpha_x = 0$$

erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned}(3)\quad \mathsf{H}_x^2 a_x a_\xi a_\eta (\eta x\xi) f_{\xi^2} &= \tfrac{1}{2} a_x a_\eta (\eta x\xi) b_\xi \mathsf{H}_x (a_\xi b_x^2 \mathsf{H}_\xi + (ab\widehat{x\xi})\, (b\mathsf{H}\widehat{x\xi})) \\ &= \tfrac{1}{2} f_\xi \mathsf{H}_x \mathsf{H}_\xi a_x a_\xi a_\eta (\eta x\xi) + \tfrac{1}{12} \Delta_\xi \Sigma \qquad (u = \widehat{x\xi}).\end{aligned}$$

Da nun auch $a_x^2 b_x b_\xi c_\xi^2 (abc) = \frac{1}{6}\Sigma$, so wird:

$$(pqf) = f_\xi G,$$

wobei, wenn das letzte Glied der Gleichung (1) durch Entwickelung des Productes $(abc)\alpha_x$ aufgelöst wird:

$$\begin{aligned}(4)\quad G = &f\{\mathsf{H}_x^2 (\eta x\xi) a_\eta a_\xi^2 - 2\mathsf{H}_x \mathsf{H}_\xi a_x a_\xi a_\eta (\eta x\xi) - 4\alpha_x^2 a_x a_\xi b_\xi^2 (ab\alpha)\} \\ &+ \tfrac{9}{2} f_\xi a_x^2 b_\xi^2 \alpha_x^2 (ab\alpha) + 9 f_{\xi^2} a_x a_\xi b_x^2 \alpha_x^2 (ab\alpha).\end{aligned}$$

Der Factor von f lässt sich in die Form bringen:

$$-(ab\alpha)\{a_x^2 b_\xi^2 \alpha_x a_\xi - a_\xi^2 b_x b_\xi \alpha_x^2\},$$

und zufolge der Gleichungen (17), (18) und (19) des § 1. wird also die Functionaldeterminante:

$$(5)\qquad (pqf) = a_x^2 a_\xi (-2 f L_\xi^2 + 6 f_\xi L_\xi - 6 f_{\xi^2} L).$$

Bildet man nun zu den drei Schnittpunkten der Geraden $u_x = 0$ mit $a_x^3 = 0$, welche durch die Form $(auv)^3 = 0$ dargestellt sind, wobei v die laufenden Coordinaten bedeuten, die Polarkegelschnitte, so bestim-

men deren Durchschnitte mit der Geraden u die drei auf ihr gelegenen Berührungspunkte. Dieselben sind demnach durch die Hauptcoincidenz von:

$$(6)\quad (a\,du)(b\,du)(c\,du)\,a_x^2 b_x^2 c_x^2 = f(a\,bu)^2(c\,au)\,c_x^2 b_x = 0 \quad | \; u_x = 0 \; |,$$

d. h. durch die Hauptcoincidenz von $fQ = 0$ gegeben, wodurch der Beweis des aufgestellten Theoremes erbracht ist.

§ 6.

Ueber das elliptische Differential.

Nachdem im Vorstehenden eine rein algebraische Methode zur Integration des Connexes Q aufgestellt ist, gehe ich dazu über, die Integration der gesammten Connexschaar $\varkappa Q^2 + \lambda\Theta^3 = 0$ herzuleiten. *Der Nachweis, dass sich dieselben mit Hülfe der doppelt periodischen Functionen integriren lassen, welche durch Umkehr des längs der Fundamentalcurve hinerstreckten Integrales gebildet werden, knüpft an die cubische Gleichung an, durch welche die Differentialwerthe in den Schnittpunkten einer Geraden mit dieser Curve dargestellt sind.* Bezeichnet man das elliptische Differential erster Gattung, welches sich auf die zu Grunde gelegte Curve $f = a_x^3 = 0$ bezieht, mit:

$$(1)\qquad D = \frac{|\,cx\,dx\,|}{a_x^2 a_c},$$

so muss eine Gleichung für die Werthe von D bestehen, wenn man auf der Curve von den drei Schnittpunkten einer Geraden $u_x = 0$ zu den entsprechenden drei Schnittpunkten einer benachbarten Geraden $(u + du)_x = 0$ fortschreitet, d. h. es muss sich eine cubische Gleichung bilden lassen, in welcher die drei Werthe von D als abhängig von den Coordinaten u_i und du_i erscheinen. Setzt man, um diese Gleichung zu gewinnen, die willkührlichen Constanten $c_i = \widehat{ru}_i$, wobei r_i neue willkührliche Grössen bedeuten, so geht der Werth des Differentials in die Form über:

$$(2)\qquad D = \frac{|\,\widehat{ru}\;x\;dx\,|}{a_x^2(aru)},$$

Vermittelst der Bedingungen $u_x = 0$ und $d(u_x) = 0$ lassen sich hieraus die Grössen dx eliminiren und es folgt die Beziehung:

$$(3)\qquad du_x r_x + a_x^2(aru)D = 0.$$

Bildet man nun eine ebensolche Gleichung durch Einführung anderer willkührlicher Grössen s_i statt r_i, also:

$$(4)\qquad du_x s_x + a_x^2(asu)D = 0,$$

so erwächst nunmehr die Aufgabe, aus diesen beiden in x quadratischen

Gleichungen — sie mögen ϱ_x^2 und σ_x^2 heissen — sowie der Bedingungsgleichung $u_x = 0$ die Grössen x_i zu eliminiren. Die Lösung dieses Problemes wird bekanntlich durch Ränderung der Resultante zweier binärer quadratischer Formen geleistet, oder, geometrisch ausgedrückt, durch die Bedingungsgleichung dafür, dass die Jacobi'sche Curve der vorstehenden drei Curven von der Linie $u_x=0$ tangirt werde. Die Functionaldeterminante dieser Gleichungen erhält, wenn $a_x b_x (ab u)^2 = \Theta$ gesetzt wird, die Form:

$$(5) \qquad \varrho_x \sigma_x (\varrho \sigma u) = \tfrac{1}{2}(rsu)\left\{du_x^2 + a_x^2 (au\,du) D + \Theta D^2\right\} - u_x \left\{\tfrac{1}{4}(rs\,du)\,du_x + \tfrac{1}{2} a_x (ars)(au\,du) D\right\}.$$

Die Bedingung, dass dieser Kegelschnitt von der Linie $u_x = 0$ tangirt wird, ist dann mit Weglassung des Factors (rsu) ausgedrückt durch das Verschwinden der Form:

$$(6) \qquad D^3 \cdot F + 3D \cdot \Theta + 2f = 0,$$

wobei F, Θ, f die geläufigen Bedeutungen haben, nur dass hierbei die Grössen x durch die Unterdeterminanten $\widehat{u\,du}$ ersetzt sind. Es ist nach dem Abel'schen Theoreme deutlich, dass in dieser Gleichung der Coefficient von D^2 verschwinden muss, da die Summe der drei Differentialwerthe bei der Bewegung der schneidenden Geraden gleich 0 ist. Aus ebendemselben Grunde folgt auch, dass für $f = 0$, d. h. bei der Drehung der Geraden in einem ihrer *Schnittpunkte* mit der Curve, zwei Differentialwerthe *entgegengesetzt gleich* sind, der dritte aber verschwindet.

Besonders hervorzuheben ist der Fall, in welchem die schneidende Gerade u_x mit einer Tangente der Curve zusammenfällt, demnach der Coefficient der höchsten Potenz von D, nämlich F, verschwindet. Alsdann werden die beiden Wurzeln der Gleichung, welche dem Berührungspunkte angehören, unendlich gross, wo auch immer der Drehpunkt $\widehat{u\,du}$ auf der Tangente gewählt werden mag. Dieses Vorkommniss tritt nicht ein, solange D durch die ursprüngliche Form $\frac{|cx\,dx|}{a_x^2 a_c}$ definirt ist, da es hierbei von den Grössen c_i nur scheinbar abhängt und auch, falls Zähler und Nenner verschwinden, gleich $\frac{|kx\,dx|}{a_x^2 a_k}$ gesetzt werden kann, wobei k_i die Coordinaten eines anderen beliebigen Punktes bedeuten. In der nunmehr gegebenen Darstellung dagegen ist der Werth von D in Beziehung zu den Grössen du_i gesetzt und die vorstehende Gleichung lehrt, dass der Werth des Differentiales im Verhältniss zu den Differentialen du_i unendlich gross wird, sobald u eine Tangente der Curve ist, d. h. bereits um eine unendlich kleine Grösse der ersten Ordnung wächst, sobald die Tangente um eine un-

endlich kleine Grösse der zweiten Ordnung geändert wird. Bei solcher Aenderung der Tangente um eine unendlich kleine Grösse der zweiten Ordnung nehmen auch die Coordinaten der Schnittpunkte um eine Grösse der ersten Ordnung zu, so dass D und dx von derselben Ordnung bleiben*). Die Werthe, welche D für diesen Fall annimmt, sind, wenn ε und ε^2 die complexen Werthe der dritten Einheitswurzel bezeichnen, durch die Form dargestellt:

$$\frac{\Theta^{\frac{1}{2}}}{F^{\frac{1}{4}}}(\varepsilon - \varepsilon^2) \text{ und } \frac{\Theta^{\frac{1}{2}}}{F^{\frac{1}{4}}}(\varepsilon^2 - \varepsilon).$$

Das unendlichgross Werden derselben ist wie erforderlich durch die Form $\frac{dx}{\sqrt{x}}$ gemessen, so dass das Integral seinen endlichen Werth behält. Die Summe bleibt, negativ genommen, gleich der noch übrigen dritten Wurzel:

$$\frac{-2f}{3\Theta}.$$

Für einen beliebigen Punkt einer der Wendetangenten ist $\Theta = 0$, ohne dass f verschwindet; auch die dritte Wurzel der Gleichung wird hierbei relativ unendlich. Lässt man den Drehpunkt $\widehat{udu}$ auf einer Tangente in den Schnittpunkt mit $f = 0$ fallen, so erhält die dritte Wurzel den Werth 0, während, falls $\widehat{udu}$ mit dem Berührungspunkte zusammenrückt, sämmtliche Coefficienten der Gleichung verschwinden; ihre Wurzeln bleiben unbestimmt, solange man nicht auf die zweiten Differentiale d^2u eingeht.

Stellt man nun die Bedingung auf, dass zwei Wurzeln der Gleichung (6) einander *gleich* werden, die Discriminante derselben also verschwindet, so entsteht die Relation:

$$F(\Theta^2 + Ff^2) = -2Q^2F = 0. \tag{7}$$

Der Factor F ist als uneigentliche Lösung erkannt worden; es muss also, sollen zwei Differentialwerthe einander gleich sein, zwischen einer

---

*) Weil für eine Tangente die Relation gilt: $u_{dx} = 0$, so müsste, falls du und dx von der gleichen Ordnung sind, aus der Gleichung $d(u_x) = 0$ die Bedingung $du_x = 0$ fliessen, die Linie $u + du$ also mit u zusammenfallen, was zu einem Widerspruche führt. — Die Integration des Differentiales: $\int \frac{|cx\,dx|}{a_x^2 a_c}$ wird thatsächlich mit Zugrundelegung eines Curvenbüschels, in nächstliegender Weise mit Zugrundelegung des Strahlbüschels im Punkte c ausgeführt, wodurch dann wiederum bei der Integration Stellen auftreten, in welchen der Werth des zu integrirenden Differentiales D von anderer Ordnung als das Differential der veränderlichen Grösse ist.

Geraden u und ihrem Drehpunkte $\widehat{udu}$ die durch den Connex vermittelte Beziehung:

$$(8) \qquad (abu)^2 (cau)(cudu)^2 (budu) = 0$$

bestehen. Soll allgemein bei dem Uebergange von einer Geraden zu der benachbarten das Verhältniss zwischen zwei Differentialen constant gleich ϱ sein, so ist dazu die Bedingung erforderlich:

$$D^3\varrho^3 F + 3D\varrho\Theta + 2f = 0 \text{ und } D^3 F + 3D\Theta + 2f = 0,$$

woraus sich als Folgerung die Gleichung ergiebt:

$$(9) \qquad Ff^2 + \frac{(3\sigma - 2)}{\sigma^3}\Theta^3 = 0, \text{ wenn } \sigma = \tfrac{2}{3}\frac{\varrho^2+\varrho+1}{\varrho(\varrho+1)}.$$

Für den Connex Θ insbesondere wird ϱ gleich den complexen Werthen von $\sqrt[3]{1}$, wie auch daraus hervorgeht, dass man den Coefficienten des zweiten Gliedes in der obigen Gleichung (6) verschwinden lässt. Durch diese Relationen ist der Satz von neuem bewiesen:

Sind die Punkte der Fundamentalcurve durch doppelt periodische Functionen eines Parameters v dargestellt, so erhält man die Integralgleichungen der Hauptcoincidenzen von $\varkappa Q^2 + \lambda\Theta^3 = 0$, *indem man aus den Coordinaten zweier Curvenpunkte mit den Argumenten v und* $\varrho v +$ Const., $x_i = \varphi_i(v)$ *und* $y_i = \varphi_i(\varrho v + c)$ *die Coordinaten der Verbindungslinie* $u = \widehat{xy}$ *zusammensetzt; durch den Werth von* ϱ. (*oder auch* $-(1+\varrho)$, $-\frac{1+\varrho}{\varrho}$ *und deren reciproke Werthe*) *ist alsdann der zugehörige Connex charakterisirt, durch c die Integrationsconstante geliefert.*

Für allgemeine Werthe des Modul sind die Hauptcoincidenzcurven nur dann algebraisch, wenn ϱ eine *rationale* Zahl bedeutet; es gehört also auch der Connex Θ im Allgemeinen zu denjenigen, für welche *transscendente* Curven durch die Hauptcoincidenz geliefert werden.

Aus der Gleichung (9) folgt im Zusammenhange mit den für den Fall $F = 0$ gemachten Bemerkungen, dass die Fundamentalcurve (hier definirt durch das gleichzeitige Verschwinden von F, f, Θ) für alle Connexe eine Hauptcoincidenzcurve bildet, und dass ferner die Gleichung der neun Wendetangenten (definirt durch $F = 0$ und $\Theta = 0$) bei der Darstellung der Integralcurven in Punktcoordinaten überall auftreten muss; ein Satz, der auch so ausgesprochen werden kann: *Die Fundamentalcurve nebst ihren Wendetangenten bilden ein particuläres Integral der durch die Hauptcoincidenzen der Connexschaar definirten Differentialgleichungen.* Der Fundamentalcurve kommt aber zufolge des Satzes über das gleichzeitige Verschwinden von F, f, Θ die weitere Eigenschaft zu, ein *singuläres* Integral, d. h. ein Umhüllungsgebilde der Integralcurven für jeden der Connexe zu sein.

Bei der algebraischen Herleitung der Integralcurven des Connexes Q ist beides zu Tage getreten. Hier insbesondere lässt sich noch erweisen, dass ausser $F = 0$ kein anderes singuläres Integral vorhanden sein kann; denn von den 36 gemeinsamen Tangenten einer Curve sechster Classe mit der ihr benachbarten sind 2×9 durch die Doppeltangenten absorbirt, die übrigen 18 aber durch $F = 0$ gegeben. Ueberhaupt wird es von weiterem Interesse sein, den Zusammenhang zwischen der allgemeinen Gleichung dieser Curven und der hier gegebenen Parameterdarstellung zu untersuchen, oder specieller formulirt: die Beziehung zu ermitteln zwischen der Constante $\varkappa, \lambda$ in der Gleichung $\frac{\partial F_{\varkappa\lambda}}{\partial \varkappa} = 0$ und zwischen der in die doppelt periodischen Functionen eingehenden Integrationsconstante c.

Auch sei zum Schlusse noch darauf hingewiesen, dass mit Einführung der Gleichung (6) zugleich die Aufgabe gelöst ist, das Differential auf die Form zu transformiren, in welcher es als Function einer *unabhängigen* Variabelen erscheint. Setzt man nämlich $(audu)^3 = 0$, verlegt also den Drehpunkt der Geraden u auf die Curve selbst, so wird eines der Differentiale gleich 0, die beiden anderen werden entgegengesetzt gleich. Der Werth derselben ist je nach dem Vorzeichen der Quadratwurzel:

$$D = \sqrt{\frac{-3(abu)^2(audu)(budu)}{F}},$$

Nach Einführung der Bezeichnungen:

$$\widehat{udu}_i = \varrho \cdot \xi_i, \quad u_i = \widehat{x\xi}_i, \quad du_i = \widehat{dx\xi}_i, \quad \text{also: } \varrho = |\xi x dx|,$$

wobei ξ_i die Coordinaten des festen Curvenpunktes, x_i die eines beliebigen Punktes auf der beweglich gedachten Linie u bedeuten, lässt sich aus dem Zähler die Quadratwurzel rational ausziehen; denn er bedeutet, gleich 0 gesetzt, das Quadrat der Tangente im Punkte ξ. Der nämliche Factor ist quadratisch im Nenner vorhanden. Durch Auflösen der Determinanten $(ab\widehat{x\xi}) = a_x b_\xi - a_\xi b_x$ geht also das Differential in die Form über (§ 1. Gleichung (1)):

$$D = \sqrt{3}\,\frac{|\xi x dx|}{\sqrt{p_x^4}}, \tag{10}$$

in welcher $p_x^4 = 0$ das Product der vier vom Punkte ξ ausgehenden Tangenten darstellt; die Grössen x sind hierbei völlig unabhängige Veränderliche.

Zu der gleichen Form leitet indess ein directes Verfahren, indem man in den Ausdruck:

$$D = \frac{|\xi x dx|}{a_x^2 a_\xi},$$

für x den Werth $\xi + \lambda x$ substituirt, wobei λ, da ξ auf der Curve angenommen wird, an eine quadratische Gleichung gebunden ist, x aber die unabhängige Veränderliche bedeutet. — Auf die übliche Normalform des elliptischen Integrales lässt sich endlich der obige Ausdruck (10) dadurch bringen, dass man den Parameter des im Punkte ξ beweglichen Strahles $\widehat{x\xi}$ als die variabele Grösse einführt. Wird dieser Punkt insbesondere in einen der Wendepunkte verlegt, so gelangt die von Aronhold angegebene Transformation zur Anwendung, bei welcher die Linien $a_\xi^2 a_x = 0$ und $\alpha_\xi^2 \alpha_x = 0$ zu Coordinatenlinien im Strahlbüschel gewählt sind.

Erlangen, im März 1875.

Ueber die Zahl der Kreispunkte einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung.

Von A. Voss in Darmstadt.

In der Salmon-Fiedler'schen Raumgeometrie findet sich eine Untersuchung, durch welche die Zahl der Kreispunkte einer allgemeinen F_n gleich $n(10n^2-25n+16)$ bestimmt wird*). Es ist der Zweck dieser Note zu zeigen, dass diese Zahl noch einer weiteren Reduction bedarf.

Das Problem der Kreispunkte ist, projectivisch aufgefasst, äquivalent mit dem folgenden: Die Zahl der Punkte zu finden, deren beide Haupttangenten einen festen Kegelschnitt schneiden (eine Fläche zweiten Grades berühren)**). Es sei nun die Gleichung der Fläche in homogenen Coordinaten:

$$f = 0, \tag{1}$$

die Gleichung des Kegelschnittes in der Ebene $x_4 = 0$:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \tag{2}$$

Alsdann sind die projectivischen Kreispunkte gegeben durch den Schnitt des Systemes (vgl. Salmon a. a. O.):

$$f = 0, \quad \frac{A_1}{f_2^2 + f_3^2} = \frac{A_2}{f_1^2 + f_3^2} = \frac{A_3}{f_1^2 + f_2^2}, \tag{3}$$

wo:

$$A_1 = f_{22}f_3^2 - 2f_{23}f_2f_3 + f_{33}f_2^2,$$
$$A_2 = f_{33}f_1^2 - 2f_{13}f_3f_1 + f_{11}f_3^2,$$
$$A_3 = f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2.$$

Der Schnitt der Fläche mit der Ebene $x_4 = 0$ enthält $3n(n-2)$ Wendepunkte, welche bestimmt sind durch das Verschwinden der Hesse'schen Determinante:

*) Zweite Auflage S. 43—46.

**) Vgl. eine Bemerkung von Herrn Fiedler a. a. O. S. 621.

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \\ f_{21} f_{22} f_{23} \\ f_{31} f_{32} f_{33} \end{vmatrix} = 0 . \tag{4}$$

Indem man (4) in den 3 äquivalenten Formen

$$\Delta \equiv A_1 \equiv A_2 \equiv A_3 = 0$$

schreibt, erkennt man, dass die genannten $3n(n-2)$ Punkte gemeinsame Lösungen des Systemes (3) sind, *wonach die Zahl der Kreispunkte gleich:*

$$n[10n^2 - 28n + 22]$$

ausfällt.

Es ist vielleicht nicht uninteressant, einen mehr geometrischen Weg zur Bestimmung der genannten Zahl einzuschlagen.

Sei demnach die Gleichung des Kegelschnittes K gegeben durch:

$$\begin{cases} a_x = 0 , \\ \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0 . \end{cases} \tag{5}$$

Die Haupttangenten der F_n, welche K schneiden, bilden eine windschiefe Fläche W, welche F_n in einer Curve Σ berührt, deren Doppelpunkte zum Theil die gesuchten x Kreispunkte sind. Man erhält die Gleichung einer Fläche Φ, welche die Curve Σ ausschneidet, wenn man aus den Gleichungen:

$$\begin{cases} a_y = 0 , & \Sigma y_i f_i = 0 , \\ \Sigma a_{ik} y_i y_k = 0 , & \Sigma f_{ik} y_i y_k = 0 \end{cases} \tag{6}$$

die y eliminirt. Es geschieht dies, indem man die Discriminante der in λ quadratischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} f_{ik} + \lambda a_{ik} & a_i & f_i \\ a_k & 0 & 0 \\ f_k & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 A + 2\lambda B + C = 0$$

gleich Null setzt. Dabei ist:

$$C = -(a_x)^2 H ,$$

wo H die Hesse'sche Determinante von (1), A die Determinante der a_{ik}, geändert mit den a_i, f_i. Es ist daher:

$$\Phi = A(a_x)^2 H + B^2 . \tag{7}$$

Die Curve Σ ist mithin von der Ordnung $\nu = 2n(3n-4)$. Da $\Phi = 0$ die Doppelcurve $(3n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung $a_x = 0$, $B = 0$ enthält, so hat Σ $n(3n-4)$ wirkliche Doppelpunkte, nämlich die $3n(n-2)$

Wendepunkte des Schnittes von $f = 0$, $a_x = 0$ und die $2n$ Punkte, in denen K die F_n schneidet. Die gesuchten x Kreispunkte sind ihre weiteren wirklichen Doppelpunkte, so dass der *Rang* von Σ gleich:

$$r = 2n(3n-4)(7n-10) - 2x - 6n(n-2) - 4n.$$

Die Fläche W der Haupttangenten ist von der Ordnung:

$$N = 2n(n-1)n-2 + 6n(n-2),$$

sie hat ferner $\varrho = 4n(n-3)(3n-2)$ Rückkehrerzeugende, es sind die vierpunktigen Tangenten von F_n, welche K treffen. Zu singulären Erzeugenden von W geben Veranlassung:

1) die Punkte, in denen die parabolische Curve von F_n der Curve Σ begegnet. Sie *berührt* aber, wie aus (7) folgt, dieselbe in $4n(n-2)(3n-4)$ Punkten;
2) die $2n$ Schnittpunkte von F_n und K, ihnen entspricht je ein Paar *doppelte* singuläre Erzeugende;
3) die $2n(n-1)(3n-4)$ Punkte, in denen die Flächen $A = 0$, $f = 0$, $B = 0$ sich schneiden. In einem solchen Punkte a berührt die Tangentialebene von F_n den Kegelschnitt in einem Punkte b, während die Gerade (ba) Haupttangente und zugleich Tangente von Σ ist. Auch diese Punkte ergeben *doppelte* singuläre Erzeugende von W. Die Gesammtzahl der singulären Geraden ist also:

$$k = 4n(n-2)(3n-4) + 8n + 4n(n-1)(3n-4).$$

Es ist also der *Rang* von W:

$$R = N + \tfrac{1}{2}k.$$

Aus der Gleichheit des Geschlechtes von W und Σ folgt endlich:

$$2\nu - r = N - \varrho - \tfrac{1}{2}k,$$

aus welcher Gleichung sich x ergiebt.

Handelt es sich übrigens darum, auf eine möglichst kurze Art die Zahl x zu ermitteln, so kann man sich des folgenden Verfahrens bedienen. Man ersetze den Kegelschnitt K durch zwei sich schneidende Gerade l_1, l_2. Dann entstehen zwei windschiefe Flächen von Haupttangenten der F_n, welche diese Geraden treffen; sie berühren die F_n in Curven k_1, k_2, welche durch Flächen $3n-4^{ter}$ Ordnung ausgeschnitten werden. k_1, k_2 begegnen sich mithin in $n(3n-4)^2$ Punkten. Zu diesen gehören 1) die $3n(n-2)$ Wendepunkte von F_n in der Ebene (l_1, l_2), 2) die $n(n-1)(n-2)$ Berührungspunkte der von dem Schnitt von l_1, l_2 auslaufenden Haupttangenten.

Es ist demnach:

$$n(3n-4)^2 - 3n(n-2) - n(n-1)(n-2)$$

die Zahl der Punkte, deren Haupttangenten mit l_1, l_2 ein Vierseit bilden. Fügt man hinzu die Zahl derjenigen, deren beide Haupttangenten entweder l_1 oder l_2 treffen, welche gleich der doppelten Classe von F_n ist, so muss sich die Zahl der Kreispunkte wie vorhin ergeben. In der That hat man:

$$x = n(3n-4)^2 - 3n(n-2) - n(n-1)(n-2) + 2n(n-1)^2.$$

Darmstadt, im Juli 1875.

Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von Sophus Lie in Christiania.

In der nachstehenden Abhandlung versuche ich eine systematische Darstellung meiner früheren Untersuchungen über die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die ich 1872 in einigen kurzen Mittheilungen an die Gesellschaften der Wissenschaften in Göttingen und Christiania skizzirte*), und welche ich neuerdings in zwei ausführlicheren Arbeiten in den Verhandlungen der letztgenannten Gesellschaft dargestellt habe (Christiania 20. November 1874 und Januar 1875).

Dabei setze ich nur einen von Cauchy bewiesenen Satz als bekannt voraus, dass nämlich jede lineare partielle Differentialgleichung 1. O. zwischen n unabhängigen Variabeln

$$Af = X_1 \frac{df}{dx_1} + \cdots + X_n \frac{df}{dx_n} = 0$$

$n-1$ von einander unabhängige Functionen, die sogenannten Lösungen, bestimmt, welche $Af = 0$ identisch befriedigen. Im Uebrigen beweise ich alle früher bekannten Sätze, die zur Anwendung kommen. Insbesondere reproducire ich in der Einleitung die Mayer'sche Begründung der von Jacobi und Clebsch herrührenden Theorie linearer partieller Differentialgleichungen 1. O., welche gemeinsame Lösungen besitzen.

Im ersten Abschnitte formulire und erledige ich ein allgemeines Problem, welches das allgemeinste Problem, das man bis jetzt in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. behandelt hat, als speciellen Fall umfasst. Gleichzeitig erweitere ich die Fundamentalbegriffe dieser Theorie, insbesondere den Begriff: partielle Differentialgleichung 1. O., und den Begriff: vollständige Lösung. In dieser Weise erreiche ich eine Allgemeinheit und Einfachheit in dieser Theorie, die früher vollständig gefehlt hat. Dabei ist es sehr bemerkenswerth, dass meine Auffassung des Integrationsproblems sich eigentlich im Grunde

*) Christiania 3. und 10. Mai 1872, Göttinger Nachr. 19. Juni, 30. October 1872.

mit der alten Pfaff'schen Theorie deckt: ich kann sagen, dass ich nur die Pfaff'sche Fragestellung, die von Cauchy und Jacobi wie von ihren Nachfolgern verlassen wurde, consequent durchgeführt und gleichzeitig ihre wesentliche Berechtigung nachgewiesen habe. Noch will ich zufügen, dass meine Begriffserweiterungen für einen Schüler Plücker's sehr naheliegend sind; Plücker würde es gemacht haben, wenn er sich überhaupt mit partiellen Differentialgleichungen 1. O. beschäftigt hätte. — Endlich hebe ich auch hervor, dass sich unter dieser erweiterten Theorie die Theorie aller mechanischen Probleme, die sich durch kanonische Differentialgleichungen ausdrücken lassen, vollständig subsumirt; früher war dies, wie Mayer hervorgehoben hat, nicht immer der Fall.

Im zweiten Abschnitte gebe ich eine ausführliche Darstellung derjenigen neuen Integrationsmethode, die ich 1872 skizzirte, und welche hinterher Mayer — der übrigens gleichzeitig durch einen ganz anderen Weg entsprechende Vereinfachungen in der Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. O. erreichte — zum Gegenstand mehrerer eleganten und präcisen analytischen Abhandlungen gemacht hat.

Wenn ich die Veröffentlichung dieser Untersuchungen, die meinen übrigen Arbeiten auf diesem Gebiete zu Grunde liegen, so lange verschoben habe, so liegt das wesentlich im Folgenden. Ich fand diese Theorien ursprünglich durch synthetische Betrachtungen. Nun aber bemerkte ich bald, dass, so zweckmässig die synthetische Methode für die Entdeckung ist, so schwierig ist es, eine klare Redaction synthetischer Untersuchungen zu geben, die sich auf Gegenstände beziehen, welche bis jetzt fast nur analytisch behandelt worden sind. Nach langem Schwanken habe ich mich dazu entschlossen, eine halb synthetische, halb analytische Form zu benutzen. Möchte meine Arbeit dazu dienen, die Berechtigung auch auf diesem Gebiete der synthetischen Denkweise neben der analytischen Methode zur Anerkennung zu bringen!

Vollständige Systeme.

Mit Clebsch sage ich, dass q lineare partielle Differentialgleichungen zwischen n unabhängigen Variabeln

$$A_1 f = 0 \cdots\cdots A_q f = 0$$

ein vollständiges System bilden, wenn sie $n - q$ gemeinsame Lösungen besitzen. Der Vollständigkeit wegen reproducire ich Mayer's Darstellung dieser fundamentalen Theorie, die von Jacobi und Clebsch herrührt*).

*) Auch Bour und Cayley haben zur Entwickelung dieser Theorie wesentlich beigetragen.

Satz 1. Die gemeinsamen Lösungen der beiden Gleichungen

$$Af = X_1 \frac{df}{dx_1} + \cdots + X_n \frac{df}{dx_n},$$

$$Bf = Y_1 \frac{df}{dx_1} + \cdots + Y_n \frac{df}{dx_n}$$

genügen zugleich der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(AY_1 - BX_1) \frac{df}{dx_1} + \cdots + (AY_n - BX_n) \frac{df}{dx_n} = 0,$$

deren linke Seite auch in der Form $A(B(f)) - B(A(f))$ geschrieben werden kann.

Eine jede Lösung von $Bf = 0$ giebt nämlich eo ipso $A(B(f)) = 0$, und jede Lösung von $Af = 0$ giebt $B(A(f)) = 0$. Die gemeinsamen Lösungen von $Bf = 0$ und $Af = 0$ erfüllen also die Gleichung

$$A(B(f)) - B(A(f)) = 0,$$

die durch Ausführung die in unserem Satze angegebene Form annimmt.

Satz 2. Gehen die beiden Gleichungen $Af = 0$, $Bf = 0$ durch Einführung neuer unabhängiger Variabeln bez. in $A'f = 0$ und $B'f = 0$ über, so nimmt der Ausdruck $A(B(f)) - B(A(f))$ durch dieselbe Aenderung der Variabeln die Form $A'(B'(f)) - B'(A'(f))$ an.

Sind $x_1 \cdots x_n$ die ursprünglichen, $x_1' \cdots x_n'$ die neuen unabhängigen Variabeln, so ist

$$A'f = Ax_1' \frac{df}{dx_1'} + \cdots + Ax_n' \frac{df}{dx_n'},$$

$$B'f = Bx_1' \frac{df}{dx_1'} + \cdots + Bx_n' \frac{df}{dx_n'}$$

und

$$A'(B'(f)) - B'(A'(f)) = \alpha_1 \frac{df}{dx_1} + \cdots + \alpha_n \frac{df}{dx_n},$$

wo

$$\alpha_i = \sum_{r=1}^{r=n} Ax_r' \frac{d}{dx_r'} Bx_i' - Bx_r' \frac{d}{dx_r'} Ax_i'.$$

Durch Ausführung kommt

$$\alpha_i = \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{k=1}^{k=n} \left(Ax_r' \frac{dx_i'}{dx_k} \frac{dY_k}{dx_r'} - Bx_r' \frac{dx_i'}{dx_k} \frac{dX_k}{dx_r'} \right)$$

$$+ \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{k=1}^{k=n} \left(Ax_r' Y_k \frac{d}{dx_r'} \left(\frac{dx_i'}{dx_k} \right) - Bx_r' X_k \frac{d}{dx_r'} \left(\frac{dx_i'}{dx_k} \right) \right),$$

oder

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{k=n} (AY_k - BX_k) \frac{dx_i'}{dx_k} + \sum_{k=1}^{k=n} \left[Y_k A \left(\frac{dx_i'}{dx_k} \right) - X_k B \left(\frac{dx_i'}{dx_k} \right) \right],$$

oder endlich, da das letzte Glied rechts identisch verschwindet:

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{k=n} (AY_k - BX_k) \frac{dx_i'}{dx_k}.$$

Also finden wir

$$A'(B'(f)) - B'(A'(f)) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} (AY_k - BX_k) \frac{dx_i'}{dx_k} \frac{df}{dx_i'}.$$

Nun aber ist die rechte Seite dieser Gleichung eben der Ausdruck, worin $A(B(f)) - B(A(f))$, d. h.

$$\sum (AY_k - BX_k) \frac{df}{dx_k},$$

durch die Einführung der Variabeln $x_1' \cdots x_n'$ sich umwandelt. Also ist unser Satz erwiesen.

Satz 3. Die gemeinsamen Lösungen von q Gleichungen

$$A_1 f = 0 \cdots A_q f = 0,$$

welche paarweise in der Beziehung $A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = 0$ *stehen, lassen sich auch definiren als die gemeinsamen Lösungen von nur* $q - 1$ *Gleichungen mit* $n - 1$ *Variabeln*

$$A_1' f = 0 \cdots A_{q-1}' f = 0,$$

welche paarweise $A_i'(A_k'(f)) - A_k'(A_i'(f)) = 0$ *geben.*

Zum Beweis bezeichnen wir $n - 1$ unabhängige Lösungen von $A_q f = 0$ mit $x_1' \cdots x_{n-1}'$ und führen sodann die Grössen

$$x_1' \cdots x_{n-1}' x_n,$$

die wir von einander unabhängig annehmen können, als neue Variabeln ein. Hierdurch nimmt $A_q f = 0$ die Form an

$$A_q' f = X_n' \frac{df}{dx_n} = 0$$

und die $q - 1$ übrigen Gleichungen bez. die Form

$$B_k' f = X_{k,1}' \frac{df}{dx_1'} + \cdots + X_{k,n-1}' \frac{df}{dx_{n-1}'} + X_k' \frac{df}{dx_n} = 0.$$

Da nun nach dem vorangehenden Satze

$$A_q'(B_k'(f)) - B_k'(A_q'(f)) = 0$$

ist, so sind alle Grössen $X_{k,n}'$ blosse Functionen von $x_1' \cdots x_{n-1}'$. Setzen wir daher

$$A_k' f = X_{k,1}' \frac{df}{dx_1'} + \cdots + X_{k,n-1}' \frac{df}{dx_{n-1}'}$$

und nehmen f frei von x_n an, so wird

$$A_i'(A_k'(f)) - A_k'(A_i'(f)) = B_i'(B_k'(f)) - B_k'(B_i'(f)),$$

und da hier die rechte Seite nach dem vorangehenden Satze gleich Null ist, so verschwindet auch die linke Seite. Andererseits ist klar, dass die Lösungen der $q-1$ Gleichungen $A_i' f = 0$ zwischen $x_1' \cdots x_{n-1}'$ eben die Lösungen der q Gleichungen $A_i f = 0$ sind. Also ist unser Satz bewiesen.

Durch successive Anwendung dieses Satzes erhalten wir folgendes Corollar.

Satz 4. Die gemeinsamen Lösungen von q Gleichungen

$$A_1 f = 0 \cdots A_q f = 0,$$

die paarweise $A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = 0$ *geben, lassen sich auch definiren als die Lösungen einer einzigen Gleichung zwischen* $n - q + 1$ *Variabeln. Die q Gleichungen* $A_i f = 0$ *haben also* $n - q$ *von einander unabhängige Lösungen.*

Dieser Satz gehört Jacobi. Endlich hat Clebsch folgenden Satz gegeben.

Satz 5. Stehen q von einander unabhängige Gleichungen

$$A_1 f = 0 \cdots A_q f = 0$$

zwischen $x_1 \cdots x_n$ *paarweise in solcher Beziehung, dass jedes* $A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f))$ *sich als Summe der* $A_i f$, *multiplicirt mit gewissen Functionen der x, ausdrücken lässt, so haben unsere q Gleichungen* $n - q$ *von einander unabhängige Lösungen.*

Zum Beweis bemerken wir, dass q von einander unabhängige Gleichungen der Form

$$B_k f = \alpha_1^k A_1 f + \cdots + \alpha_q^k A_q f = 0, \quad (k = 1 \cdots q)$$

wiederum in solcher Beziehung stehen, dass jedes $B_i(B_k(f)) - B_k(B_i(f))$ sich linear durch die $B_k f$ ausdrückt. Hieraus schliessen wir mit Mayer, dass die Auflösung der $A_i f = 0$ hinsichtlich q der Differentialquotienten, etwa $\frac{df}{dx_1} \cdots \frac{df}{dx_q}$ q Gleichungen giebt,

$$C_k f = \frac{df}{dx_k} - \left(X_{q+1}^k \frac{df}{dx_{q+1}} + \cdots + X_n^k \frac{df}{dx_n} \right) = 0, \quad (k = 1 \cdots q),$$

welche wiederum Relationen der Form

$$C_i(C_k(f)) - C_k(C_i(f)) = \beta_1 C_1 f + \cdots + \beta_q C_q f$$

geben. Nun aber findet man durch Ausführung, dass die linke Seite dieser Gleichung keine der Grössen $\frac{df}{dx_1} \cdots \frac{df}{dx_q}$ enthält. Also sind alle β gleich Null. Nach dem vorangehenden Satze haben daher die Gleichungen $C_k f = 0$ $n - q$ gemeinsame Lösungen. Hiermit ist unser Satz bewiesen. —

Die entwickelten Sätze genügen für das Folgende. Darum gehe ich nicht an diesem Orte auf die von Mayer und mir herrührende einfache Integrationstheorie der vollständigen Systeme ein.

Abschnitt I.

Dieser Abschnitt ist im Wesentlichen die Reproduction einer Arbeit, die ich im November 1874 der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania vorgelegt habe. Die hier entwickelten Theorien skizzirte ich übrigens schon im October 1872 in einer der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vorgelegten Note.

§ 1.

Erledigung eines Hülfsproblems.

Ich erledige zuerst ein Hülfsproblem, welches in genauestem Zusammenhange mit dem sogenannten Pfaff'schen Probleme für eine ungerade Zahl der Variabeln steht. Dasselbe ist vielleicht früher von Anderen gelöst worden; jedenfalls halte ich es für richtig, es ausführlich zu behandeln.

Hülfsproblem. Man soll alle Gleichungssysteme der Form

$$f_k(x_1 x_2 \cdots x_n\, p_1 p_2 \cdots p_n) = 0, \quad (k = 1 \cdots m)$$

bestimmen, vermöge deren die Differentialrelation

$$p_1\, dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

identisch stattfindet.

Die gesuchten Gleichungssysteme ordnen sich naturgemäss in zwei Kategorien, solche nämlich, die keine Relationen zwischen den x allein bestimmen, und solche, die dies thun, zwischen deren Gleichungen sich also alle p eliminiren lassen. Ein System der ersten Art bestimmt offenbar auch keine Relation zwischen den Differentialen dx. Soll aber der Ausdruck $\Sigma p\, dx$ für alle Werthe der Grössen dx verschwinden, so müssen alle p gleich Null sein. Daher enthält jedes System der ersten Art die Gleichungen

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0 \cdots p_n = 0,$$

und andererseits ist auch klar, dass es keine weiteren Gleichungen enthalten darf, denn sonst liessen sich die p eliminiren. Nun aber fassen wir im Folgenden die p *als Verhältnissgrössen* auf, und können daher von dem gefundenen Systeme als einem uneigentlichen wegsehen.

Also brauchen wir uns nur mit dem Falle zu beschäftigen, dass sich die p zwischen den Gleichungen des Systems eliminiren lassen. Die in dieser Weise gefundenen Relationen zwischen $x_1 x_2 \cdots x_n$, deren Anzahl q sein mag, können immer hinsichtlich q unter den x, etwa $x_1 x_2 \cdots x_q$, aufgelöst werden; hierdurch nehmen sie die Form an

(1) $$x_k = f_k(x_{q+1} \cdots x_n), \quad (k = 1\ 2 \cdots q),$$

und durch Differentiation findet man q Relationen zwischen den dx

$$dx_k = \sum_{i=q+1}^{i=n} \frac{df_k}{dx_i}\, dx_i, \quad (k = 1\ 2 \cdots q),$$

welche den Ausdruck $\Sigma p\, dx$ auf die Form

$$\sum_{i=q+1}^{i=n} \left(p_1 \frac{df_1}{dx_i} + p_2 \frac{df_2}{dx_i} + \cdots + p_q \frac{df_q}{dx_i} + p_i\right) dx_i$$

reduciren. Hier sind nun alle zurückgebliebenen dx von einander unabhängig, und daher müssen für $i = q + 1 \cdots n$ folgende Relationen bestehen:

(2) $$p_1 \frac{df_1}{dx_i} + p_2 \frac{df_2}{dx_i} + \cdots + p_q \frac{df_q}{dx_i} + p_i = 0\,.$$

Also enthält jedes Gleichungssystem, welches $\Sigma p\, dx = 0$ identisch befriedigt, n Gleichungen der Form (1) und (2). Umgekehrt ist einleuchtend, dass diese Gleichungen an und für sich den Ausdruck $\Sigma p\, dx$ identisch verschwinden lassen. Enthält daher unser Gleichungssystem noch weitere Gleichungen, so sind dieselben nur der Beschränkung unterworfen, mit dem Systeme (1), (2) algebraisch vereinbar zu sein.

Das gefundene Resultat kann eine elegante Form erhalten. Setzen wir nämlich

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_q p_q = f_1 p_1 + \cdots + f_q p_q = H,$$

so nehmen die Gleichungen (1) und (2) die Form

$$x_k = \frac{dH}{dp_k}, \quad p_i = \frac{dH}{dx_i},$$

wo k successive die Werthe $1\ 2 \cdots q$ und i die Werthe $q + 1 \cdots n$ zu durchlaufen hat.

Es ist übrigens leicht, ein *anscheinend* noch allgemeineres Gleichungssystem anzugeben, das $\Sigma p\, dx$ identisch verschwinden lässt. Man setze nämlich:

$$x_k = \frac{dH}{dp_k}, \quad (k = 1\ 2 \cdots q),$$

$$p_i = -\frac{dH}{dx_i}, \quad (i = q + 1 \cdots n),$$

vorausgesetzt, dass H irgend eine hinsichtlich $p_1\, p_2 \cdots p_q$ homogene Function 1. O. von $p_1 \cdots p_q\, x_{q+1} \cdots x_n$ bezeichnet. Unsere Gleichungen geben nämlich

$$\sum p\, dx = \sum_{k=1}^{k=q} p_k\, d \cdot \frac{dH}{dp_k} - \sum_{i=q+1}^{i=n} \frac{dH}{dx_i}\, dx_i\,.$$

Nun ist H homogen von 1. O. hinsichtlich $p_1 \cdots p_q$, d. h.

$$\sum_{k=1}^{k=q} p_k \frac{dH}{dp_k} - H = 0,$$

woraus durch totale Differentiation

$$\sum_{k=1}^{k=q} p_k d \cdot \frac{dH}{dp_k} + \sum_{k=1}^{k=q} \frac{dH}{dp_k} dp_k - dH = 0.$$

Mit Benutzung dieser Gleichung finden wir

$$\sum p dx = - \sum_{k=1}^{k=q} \frac{dH}{dp_k} dp_k - \sum_{i=q+1}^{i=n} \frac{dH}{dx_i} dx_i + dH,$$

oder

$$\sum p dx = - dH + dH = 0,$$

womit meine Behauptung erwiesen ist. Zugefügt soll nur sein, dass unsere n Gleichungen, die $\Sigma p\, dx$ identisch verschwinden lassen, nach dem Theoreme der homogenen Functionen die charakteristische Gleichung

$$x_1 p_1 \cdots + x_q p_q = H,$$

die allein das n-gliedrige System definirt, nach sich ziehen. — Wir fassen das Vorangehende folgendermassen zusammen.

Theorem 1. Fasst man $p_1 p_2 \cdots p_n$ als Verhältnissgrössen auf, so enthält jedes System Gleichungen zwischen $p_1 \cdots p_n$ $x_1 \cdots x_n$, welches die Differentialrelation

$$p_1 dx_1 = p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

identisch befriedigt, n Gleichungen von der Form

$$x_k = \frac{dH}{dp_k}, \quad (k = a\, b \cdots l),$$

$$p_i = \frac{dH}{dx_i}, \quad (i = m\, n \cdots t),$$

welche an und für sich den Ausdruck $\Sigma p dx$ verschwinden lassen. Hier bezeichnen $a, b \cdots l\, m, n \cdots t$ eine Permutation der Zahlen $1, 2 \cdots n$, und H ist irgend eine Function von $p_a \cdots p_l\, x_m \cdots x_t$, die hinsichtlich der p homogen von erster Ordnung ist. Unsere n Gleichungen können im Allgemeinen auf mehrere Weisen die aufgestellte kanonische Form erhalten. Insbesondere kann man immer erreichen, dass H eine lineare Function der p ist.

2. Um die Sprache zu erleichtern, werden wir die Terminologie der Mannigfaltigkeitslehre anwenden, und gleichzeitig ein neues Symbol, welches wir sogleich definiren, einführen.

Da wir die Grössen $p_1 p_2 \cdots p_n$ als Verhältnissgrössen auffassen und also zwei Werthsysteme $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ und $x_1' \cdots x_n' p_1' \cdots p_n'$ als äquivalent betrachten, wenn

$$x_i = x_i', \quad \frac{p_i}{p_k} = \frac{p_i'}{p_k'}$$

ist, so müssen wir sagen, dass es ∞^{2n-1} und nicht ∞^{2n} Werthsysteme $x\,p$ giebt. Stellen wir nun etwa m Gleichungen zwischen $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ fest, so bestimmen wir ∞^{2n-1-m}, oder sagen wir ∞^k Werthsysteme $x\,p$. Den Inbegriff derselben bezeichnen wir, wenn die betreffenden m Gleichungen $\Sigma p\,dx$ verschwinden lassen, mit dem Symbole

$$M_k^*.$$

Nach dem Vorangehenden kann k höchstens gleich $n-1$ sein.

Wir gehen dazu über, die Entwickelungen der vorangehenden Nummer zu interpretiren. Dabei wird es bequem sein, sich vorläufig auf den Fall $n=3$ zu beschränken.

Fassen wir $x_1 x_2 x_3$ als Cartesische Punktcoordinaten auf, und $p_1 p_2 p_3$ als Verhältnissgrössen, welche die Lage einer durch den Punkt $x_1 x_2 x_3$ hindurchgehenden Ebene

$$p_1(x_1'-x_1) + p_2(x_2'-x_2) + p_3(x_3'-x_3) = 0$$

bestimmen, so können wir $x_1 x_2 x_3 p_1 p_2 p_3$ als Coordinaten eines Flächenelements betrachten. Dabei fassen wir, können wir sagen, jedes Flächenelement als den Inbegriff eines Punktes und einer hindurchgehenden Ebene auf. Bei dieser Interpretation sagt die Gleichung

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 = 0,$$

dass die Ebene des Flächenelements $(x_1 \cdots p_3)$ den Punkt des benachbarten Elements $(x_1 + dx_1 \cdots p_3 + dp_3)$ enthält. Findet diese Relation statt, so sagen wir der Kürze wegen, dass unsere beiden benachbarten Elemente *vereinigt liegen*. Mit Anwendung dieses Ausdrucks können wir unser allgemeines Problem für den Fall $n=3$ folgendermassen aussprechen: Man soll aus den Flächenelementen des Raumes auf alle möglichen Weisen zweifach unendliche Schaaren aussuchen, derart, dass jedes Element mit allen benachbarten Elementen derselben Schaar vereinigt liegt.

Um die gefundene Lösung dieses Problems interpretiren zu können, bemerken wir Folgendes. Nehmen wir irgend eine Fläche, so bestimmt ihre Gleichung

$$x_1 = f_1(x_2 x_3)$$

zusammen mit den beiden Relationen

$$p_2 + p_1 \frac{df_1}{dx_2} = 0, \quad p_3 + p_1 \frac{df_1}{dx_3} = 0$$

alle Flächenelemente, welche die Fläche bedecken. Nehmen wir andererseits eine Curve, so bestimmen ihre Gleichungen

$$x_1 = f_1(x_3), \quad x_2 = f_2(x_3)$$

zusammen mit

$$p_3 + p_1 \frac{df_1}{dx_3} + p_2 \frac{df_2}{dx_3} = 0,$$

alle Flächenelemente, welche die Curve umhüllen. Endlich kann man die Gleichungen eines Punktes

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3$$

auch als analytische Definition aller durch diesen Punkt hindurchgehenden Elemente auffassen.

Vergleichen wir nun dies mit Theorem 1., so sehen wir, dass die Elemente, welche eine Fläche bedecken, eine Curve umhüllen oder durch einen Punkt gehen, Schaaren der verlangten Eigenschaft bilden, und dass es keine weiteren solche Schaaren giebt.

Um die allgemeine Theorie in entsprechender Weise interpretiren zu können, fassen wir $x_1 x_2 \cdots x_n$ als Punktcoordinaten eines n-fach ausgedehnten Raumes auf, ferner $p_1 p_2 \cdots p_n$ als Verhältnissgrössen, welche die Lage einer durch den Punkt $x_1 x_2 \cdots x_n$ hindurchgehenden ebenen Mannigfaltigkeit

$$p_1(x_1' - x_1) + p_2(x_2' - x_2) + \cdots + p_n(x_n' - x_n) = 0$$

bestimmen. Wir bezeichnen den Inbegriff des Punktes $x_1 x_2 \cdots x_n$ und der hindurchgehenden ebenen Mannigfaltigkeit als *ein Element*, und betrachten die Grössen $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ als *Elementcoordinaten*. Die Gleichung

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

sagt dann, dass die Ebene des Elements $x_1 \cdots p_n$ den Punkt des benachbarten Elements $x_1 + dx_1 \cdots p_n + dp_n$ enthält, oder, wie ich der Kürze wegen mich ausdrücken werde, dass diese beiden *Elemente vereinigt liegen*. Und unser allgemeines Problem kommt darauf hinaus, *aus den* ∞^{2n-1} *Elementen* $x_1 \cdots p_n$ *auf alle möglichen Weisen* $(n-1)$*-fach unendliche Schaaren auszusuchen, derart, dass jedes Element mit allen benachbarten Elementen derselben Schaar vereinigt liegt.*

Um die schon gegebene Lösung dieses Problems zu interpretiren bemerken wir, dass die Elemente, die sich an eine $(n-q)$-fach ausgedehnte Punkt-Mannigfaltigkeit

$$x_k = f_k(x_{q+1} \cdots x_n), \quad (k = 1\,2 \cdots q)$$

anschliessen, durch die eben geschriebenen q Gleichungen zusammen mit den $n - q$ folgenden

$$p_1 \frac{df_1}{dx_i} + p_2 \frac{df_2}{dx_i} + \cdots + p_q \frac{df_q}{dx_i} + p_i = 0, \quad (i = q+1 \cdots n)$$

bestimmt sind.

Es ist also möglich, die ∞^{2n-1} Elemente eines n-fach ausgedehnten Raumes in $(n-1)$-fach unendliche Schaaren zusammenzufassen, derart, dass jedes Element mit allen benachbarten Elementen derselben Schaar vereinigt liegt. Solche Schaaren werden von allen Elementen gebildet, die sich an irgend einer q-fach ausgedehnten Punkt-Mannigfaltigkeit anschliessen, und andere derartige Schaaren giebt es nicht.

Die Element-Mannigfaltigkeiten M_{n-1} ordnen sich hiernach in n Kategorien nach dem Werthe der Zahl q, oder, was auf dasselbe hinauskommt, nach der Dimension der zugehörigen Punkt-Mannigfaltigkeit. *Ich brauche das Symbol*

$$M_{n-1}^{(k)},$$

um eine Element-Mannigfaltigkeit M_{n-1} zu bezeichnen, die sich an eine k-fach ausgedehnte Punkt-Mannigfaltigkeit anschliesst. Dementsprechend bezeichne ich zuweilen mit

$$M_i^k$$

den Inbegriff von ∞^i vereinigt liegenden Elementen, die sich an eine k-fach ausgedehnte Punkt-Mannigfaltigkeit anschliessen.

§ 2.

Formulirung eines allgemeinen Problems.

3. Nun können wir unser allgemeines Problem formuliren. Dasselbe umfasst als speciellen Fall das allgemeinste Problem, welches man bis jetzt in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen behandelt hat.

Problem. Vorgelegt seien q Gleichungen der Form

$$F_k(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = 0,$$

die hinsichtlich der p von nullter Ordnung sind. Man soll in allgemeinster Weise $n - q$ weitere Gleichungen finden, welche zusammen mit den gegebenen die Differentialrelation

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

identisch befriedigen.

Unser Problem kommt darauf hinaus, alle M_{n-1} zu finden, deren Elemente q gegebenen Relationen zwischen den Elementcoordinaten befriedigen. Nennen wir solche Mannigfaltigkeiten *Integral-M_{n-1}* der betreffenden Gleichungen, so können wir unser Problem folgendermassen aussprechen.

Man soll alle Integral-M_{n-1} von q gegebenen Gleichungen zwischen $x \cdots x_n\, p \cdots p_n$ bestimmen.

Früher stellte man die Forderung, dass die gesuchten Mannigfaltigkeiten auch als Punktgebilde $(n-1)$-fach ausgedehnt seien; *man suchte alle Integral-M_{n-1}^{n-1} der vorgelegten Gleichungen.*

Es giebt einen ausgezeichneten Fall, in dem unser Problem sich durch ausführbare Operationen, d. h. Differentiationen und Eliminationen erledigen lässt. Enthalten nämlich unsere Gleichungen nur die x

$$f_k(x_1 x_2 \cdots x_n) = 0, \quad (k = 1\ 2 \cdots q),$$

so findet man nach den Entwickelungen des ersten Paragraphen die allgemeinste Integral-M_{n-1} dieses Gleichungssystems, indem man weitere Gleichungen zwischen den x zufügt und das erhaltene System hinsichtlich $q+m$ unter den x etwa $x_1 x_2 \cdots x_{q+m}$ auflöst

$$x_k = \varphi_k(x_{q+m+1} \cdots x_n), \quad (k = 1 \cdots q+m)$$

und endlich die bekannten Gleichungen

$$p_i + \sum \frac{d\varphi_k}{dx_i} p_k = 0, \quad (i = q+m+1 \cdots n)$$

zufügt. Diese n Gleichungen bestimmen die allgemeinste gemeinsame Integral-M_{n-1} der vorgelegten Gleichungen. Wir können uns darum im Folgenden auf den Fall beschränken, dass jedenfalls eine der vorgelegten Gleichungen eine oder mehrere Grössen p enthält.

4. Im Allgemeinen verlangt die Erledigung unseres Problems gewisse Integrationsoperationen. Ehe wir dasselbe angreifen, werden wir ein Hülfsproblem, welches nur ausführbare Operationen verlangt, erledigen. Wir betrachten zuerst den einfachsten Fall dieses Hülfsproblems.

*Vorgelegt sei eine Gleichung $F = 0$ zwischen $x_1 \cdots p_n$. Man bestimme alle Integral-M_{n-2} derselben**).

Man nehme irgend eine M_{n-1}. Ist sie zufälligerweise eine Integral-M_{n-1} von $F = 0$, so unterwerfe man ihre Elemente irgend einer neuen Relation; die in dieser Weise gefundenen ∞^{n-2} Elemente bilden offenbar eine Integral-M_{n-2}. Ist dagegen die gewählte M_{n-1} keine Integral-M_{n-1}, so erzeugen alle Elemente derselben, deren Coordinaten $F = 0$ befriedigen, eine Integral-M_{n-2} dieser Gleichung. Es ist selbstverständlich, dass in dieser Weise alle Integral-M_{n-2} von $F = 0$ erhalten werden können.

Hülfsproblem 2. Vorgelegt seien q Gleichungen zwischen $x_1 \cdots x_n$ $p_1 \cdots p_n$. Man bestimme ihre gemeinsamen Integral-M_{n-q-1}.

---

*) Wir setzen hier und im Folgenden immer voraus, dass die zur Betrachtung kommenden Gleichungen $F(x_1 \cdots p_n) = 0$ hinsichtlich der p homogen sind. — Wenn ich im Folgenden sage, dass eine Function der x und p von nullter oder erster Ordnung ist, so heisst dies immer *hinsichtlich der Grössen p.*

Um dieses Problem, auf welches wir später unser Hauptproblem zurückführen, zu erledigen, nehmen wir wiederum irgend eine M_{n-1}. Unter den Elementen derselben giebt es jedenfalls ∞^{n-q-1} und unter Umständen noch mehrere, etwa ∞^{n-q+k}, deren Coordinaten den q vorgelegten Gleichungen genügen. Wählen wir unter ihnen nach arbiträrem Gesetze ∞^{n-q-1}, so bilden diese Elemente immer eine gemeinsame Integral-M_{n-q-1} der q Gleichungen; und es ist klar, dass alle Integral-M_{n-q-1} in dieser Weise erhalten werden können.

§ 3.

Ein Fundamentalsatz.

5. Jacobi hat bekanntlich bewiesen, dass n Functionen nullter Ordnung $F_1 F_2 \cdots F_n$ von $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$, die in solcher gegenseitiger Beziehung stehen, dass die Elimination der p zwischen den Gleichungen

$$F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2 \cdots F_n = a_n$$

eine vollständige Lösung jeder Gleichung $F_i = a_i$ giebt, die Bedingungsgleichung

$$\sum_{a=1}^{a=n} \frac{dF_i}{dx_a}\frac{dF_k}{dp_a} - \frac{dF_i}{dp_a}\frac{dF_k}{dx_a} = 0,$$

die wir in der gewöhnlichen Form

$$(F_i F_k) = 0$$

schreiben, befriedigen. Dieser Satz ist einer wichtigen von mir herrührenden Verallgemeinerung fähig, die ich sogleich geben werde. Zuerst ein Hülfssatz.

Satz 6. Befriedigen die Functionen $\Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_n F_1 F_2 \cdots F_n$ *die Bedingungsgleichung*

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_n dF_n = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n,$$

so bestehen die Relationen

$$(F_i F_k) = (\Phi_i F_k) = (\Phi_i \Phi_k) = 0, \quad (F_i \Phi_i) = 1.$$

Ich reproducire Mayer's Beweis dieses Satzes, den ich aus der Clebsch'schen Theorie des Pfaff'schen Problems abgeleitet hatte. (Math. Annalen Bd. VIII, p. 215 ff., Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 3. Mai 1872, 21. März 1873.)

Unsere Bedingungsgleichung löst sich in die $2n$ folgenden auf

$$\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dx_k} = p_k,$$

$$\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dp_k} = 0,$$

woraus durch Differentiation, indem wir die x und p als von einander unabhängig auffassen,

$$\frac{d}{dx_h}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dx_k} - \frac{d}{dx_k}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dx_h} = 0,$$
$$\frac{d}{dp_h}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dx_k} - \frac{d}{dx_k}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dp_h} = 0,$$
$$\frac{d}{dp_k}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dx_k} - \frac{d}{dx_k}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dp_k} = 1,$$
$$\frac{d}{dp_h}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dp_k} - \frac{d}{dp_k}\sum_i \Phi_i \frac{dF_i}{dp_h} = 0,$$

und durch Ausführung

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\Phi_i}{dx_h}\frac{dF_i}{dx_k} - \frac{d\Phi_i}{dx_k}\frac{dF_i}{dx_h}\right) = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\Phi_i}{dp_h}\frac{dF_i}{dx_k} - \frac{d\Phi_i}{dx_k}\frac{dF_i}{dp_h}\right) = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\Phi_i}{dp_k}\frac{dF_i}{dx_k} - \frac{d\Phi_i}{dx_k}\frac{dF_i}{dp_k}\right) = 1,$$
$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\Phi_i}{dp_h}\frac{dF_i}{dp_k} - \frac{d\Phi_i}{dp_k}\frac{dF_i}{dp_h}\right) = 0.$$

Diese Relationen zeigen, dass die Gleichungen

$$u_i = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{dF_i}{dx_k}y_k + \frac{dF_i}{dp_k}z_k\right),$$
$$v_i = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{d\Phi_i}{dx_k}y_k + \frac{d\Phi_i}{dp_k}z_k\right)$$

die $2n$ folgenden nach sich ziehen

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i \frac{d\Phi_i}{dp_h} - v_i \frac{dF_i}{dp_h} = y_h,$$
$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i \frac{d\Phi_i}{dx_h} - v_i \frac{dF_i}{dp_h} = -z_h.$$

Setzen wir diese Werthe der y und z in die vorangehenden Gleichungen ein, so müssen Identitäten herauskommen. In dieser Weise finden wir, dass

$$(F_iF_k) = (F_i\Phi_k) = (\Phi_i\Phi_k) = 0, \quad (F_i\Phi_i) = 1$$

ist, wie behauptet wurde.

Theorem 2. Sind $F_1 F_2 \cdots F_n$ solche Functionen nullter Ordnung von $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$, dass die Gleichungen

$$F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2 \cdots F_n = a_n$$

für alle Werthe der Parameter a Element-Mannigfaltigkeiten M_{n-1} bestimmen, so stehen die F paarweise in der Beziehung $(F_i F_k) = 0$.

Nach unserer Voraussetzung sollen die Gleichungen

$$F_1 = a_1 \cdots F_n = a_n$$

zusammen mit ihren Differentialgleichungen

$$dF_1 = 0 \cdots dF_n = 0$$

den Ausdruck

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

identisch verschwinden lassen, und zwar für alle möglichen Werthe der Grössen a. Dies heisst aber, dass es solche Functionen $\Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_n$ giebt, dass eine Identität der Form

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_n dF_n = p_1 dx_1 \cdots + p_n dx_n$$

besteht. Also ist unsere Behauptung mit Berücksichtigung des vorangehenden Satzes erwiesen.

Satz 7. Die n Gleichungen $F_k = a_k$ bestimmen, welche Werthe man auch den a beilegt, nie mehr als ∞^{n-1} Elemente.

Denn eine Schaar von vereinigt liegenden Elementen enthält nie mehr als ∞^{n-1} Elemente.

6. *Definition. Bestimmen die Gleichungen*

$$F_1 = a_1 \cdots F_n = a_n$$

wie in den vorangehenden Sätzen ∞^n Mannigfaltigkeiten M_{n-1}, so nenne ich den Inbegriff solcher M_{n-1}, die einem bestimmten Werthe a_1^0 der Parameter a_1 entsprechen, eine vollständige Lösung der Gleichung $F = a_1^0$. Nach den Entwickelungen des zweiten Paragraphen können unsere n Gleichungen immer die folgende kanonische Form erhalten:

$$x_a p_a + \cdots + x_t p_t = H(p_a \cdots p_t x_m \cdots x_t a_1 \cdots a_n),$$

$$x_i = \frac{dH}{dp_i}, \quad p_k = \frac{dH}{dx_k}.$$

Hier ist $a \cdots l\, m \cdots t$ eine Permutation der Zahlen $1 \cdots n$.

In dem folgenden Paragraphen beweisen wir, dass jede Gleichung

$$F_1 = a_1$$

vollständige Lösungen besitzt. Hier begnügen wir uns damit, nochmals hervorzuheben, dass, wenn $F_1 = a_1$ eine vollständige Lösung besitzt,

$$F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2 \cdots F_n = a_n,$$

dass dann jede Function F_i eine Lösung der Gleichung

$$(F_1 F) = 0$$

ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, ein Integral des simultanen Systems

$$(A) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dx_1 : \cdots : dx_n : \quad dp_1 : \cdots : \quad dp_n = \\ \dfrac{dF}{dp_1} : \cdots : \dfrac{dF}{dp_n} : -\dfrac{dF}{dx_1} : \cdots : -\dfrac{dF}{dx_n} \end{array} \right.$$

ist.

Zu bemerken ist, dass sich aus diesem simultanen Systeme ein neues System zwischen den Variabeln

$$x_1 \cdots x_n \, \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

herleiten lässt:

$$\frac{dx_1}{p_n \dfrac{dF_1}{dp_1}} = \frac{dx_2}{p_n \dfrac{dF_1}{dp_2}} = \cdots = \frac{d\left(\dfrac{p_1}{p_n}\right)}{\dfrac{p_1}{p_n}\dfrac{dF}{dx_n} - \dfrac{dF}{dx_1}} = \cdots,$$

dass daher unter den $2n-1$ Integralen des ersten Systems $2n-2$ von nullter Ordnung sind. Ein solches ist insbesondere F_1 selbst.

Bezeichnen wir die übrigen Integrale nullter Ordnung mit $\Pi_1 \cdots \Pi_{2n-3}$ und mit $\alpha_1 \cdots \alpha_{2n-3}$ Parameter, so ordnen die Gleichungen $\Pi_k = \alpha_k$ die Elemente der Gleichung $F_1 = a_1$ in ∞^{2n-3} Schaaren zusammen, deren jede ∞^1 Elemente enthält. Also

Satz 8. Die ∞^{2n-2} Elemente der Gleichung $F_1 = a_1$ werden durch das simultane System (A) *in ∞^{2n-3} Schaaren, jede bestehend aus ∞^1 Elementen, zusammengeordnet. Diese Elementschaaren nennen wir die charakteristischen Streifen der Gleichung $F_1 = a_1$.*

Zu bemerken ist ferner, dass der Ausdruck $\Sigma p\,dx$ bei Einsetzung der Werthe der dx vermöge des simultanen Systems (A) die Form

$$p_1 \frac{dF_1}{dp_1} + \cdots + p_n \frac{dF_1}{dp_n}$$

annimmt und somit identisch verschwindet. Also

Satz 9. Zwei benachbarte Elemente eines charakteristischen Streifens liegen vereinigt.

Endlich sprechen wir den Satz, dass die Functionen einer vollständigen Lösung

$$F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2 \cdots F_n = a_n$$

der Gleichung $F_1 = a_1$ sämmtlich die Relation

$$(F_0 F) = 0$$

befriedigen, synthetisch aus:

Satz 10. Lassen die Elemente einer Gleichung $F = a$ sich in ∞^{n-1} Integral-M_{n-1} zusammenfassen, so ist jede solche M_{n-1} von charakteristischen Streifen erzeugt.

§ 4.

Jede Gleichung besitzt vollständige Lösungen.

7. Ich werde jetzt zeigen, dass die Elemente einer Gleichung

$$F\left(x_1 \cdots x_n \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = 0$$

sich immer zu $(n-1)$-fach unendlich vielen M_{n-1} zusammenfassen lassen, oder, anders ausgesprochen, dass die Gleichung $F = a$ immer vollständige Lösungen besitzt. Hierzu brauchen wir folgenden wichtigen Satz.

Satz 11. Enthalten zwei benachbarte charakteristische Streifen der Gleichung $F = a$ zwei Elemente, die vereinigt liegen, so stehen alle benachbarten Elemente dieser Streifen in derselben Beziehung).*

Zum Beweise nehmen wir unter den ∞^{2n-3} charakteristischen Streifen der Gleichung $F = a$ nach einem arbiträren Gesetze einfach unendlich viele, die jedoch eine continuirliche Schaar bilden sollen. Sei t ein Parameter, dessen verschiedene Werthe den verschiedenen Streifen unserer Schaar entsprechen; sei ferner τ ein Parameter, dessen verschiedene Werthe den verschiedenen Elementen eines Streifens entsprechen. Geben wir also zuerst t und sodann τ bestimmte Werthe, so heisst dies, dass wir unter den ∞^1 Streifen unserer Schaar einen bestimmten wählen und darnach unter den Elementen dieses Streifens ein bestimmtes aussuchen.

Wir nehmen die beiden Elemente, welche bez. den Parametern t, τ und $t + \Delta t$, $\tau + \Delta\tau$ entsprechen:

$$x_1 \cdots p_n \text{ und } x_1 + \frac{dx_1}{dt}\Delta t + \frac{dx_1}{d\tau}\Delta\tau \cdots$$

und bilden für sie die Function

$$\sum p_k dx_k = \sum p_k \left(\frac{dx_k}{dt}\Delta t + \frac{dx_k}{d\tau}\Delta\tau\right).$$

Nun ist nach unserer Voraussetzung

$$\sum p_k \frac{dx_k}{d\tau}\Delta\tau = 0,$$

also kommt

$$\sum p_k dx_k = \Delta t \sum p_k \frac{dx_k}{dt},$$

das heisst, es besteht eine Gleichung der Form

$$\sum p_k dx_k = \Delta t\, f(t\tau).$$

*) Dieser Satz steht im genauesten Zusammenhange mit dem Pfaff'schen Fundamentalsatze, dass jeder $2n$-gliedrige Ausdruck $X_1 dx_1 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$ auf eine $(2n-1)$-gliedrige Form gebracht werden kann.

Wir haben zu zeigen, dass f nur von t abhängt; darauf kommt in der That unser Satz hinaus.

Es ist

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \sum p_k \frac{dx_k}{dt},$$

und es handelt sich somit darum, nachzuweisen, dass der Ausdruck rechts verschwindet. Wir finden

$$\frac{df}{d\tau} = \sum \left(\frac{dp_k}{d\tau} \frac{dx_k}{dt} + p_k \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx_k}{dt} \right) \right)$$

oder

$$\frac{df}{d\tau} = \sum \left(\frac{dp_k}{d\tau} \frac{dx_k}{dt} + p_k \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_k}{d\tau} \right) \right).$$

Nun aber können wir setzen

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \frac{dF}{dp_k}, \quad \frac{dp_k}{d\tau} = -\frac{dF}{dx_k},$$

also kommt

$$\frac{df}{d\tau} = \sum \left(-\frac{dF}{dx_k} \frac{dx_k}{dt} + p_k \frac{d}{dt} \left(\frac{dF}{dp_k} \right) \right),$$

woraus mit Benutzung der Gleichung

$$\frac{d}{dt} \sum p_k \frac{dF}{dp_k} = 0 = \sum \left(\frac{dp_k}{dt} \frac{dF}{dp_k} + p_k \frac{d}{dt} \left(\frac{dF}{dp_k} \right) \right)$$

folgt

$$\frac{df}{d\tau} = -\sum \left(\frac{dF}{dx_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{dF}{dp_k} \frac{dp_k}{dt} \right) = -\frac{dF}{dt} = 0.$$

Hiermit ist nach dem Vorangehenden die Richtigkeit unseres Satzes nachgewiesen.

8. Dieser Satz erlaubt beliebig viele Integral-M_{n-1} von $F = a$ zu construiren, nachdem wir das simultane System der charakteristischen Streifen

$$dx_1 : \cdots : dp_k = \frac{dF}{dp_1} : \cdots : -\frac{dF}{dx_n}$$

integrirt haben. Man nehme in der That eine beliebige Integral-M_{n-2} von $F = a$; untersuche sodann, ob diese M_{n-2} von charakteristischen Streifen erzeugt ist. Ist dies nicht der Fall, so lege man durch alle Elemente der M_{n-2} die hindurchgehenden charakteristischen Streifen. Diese Streifen erzeugen nach dem vorangehenden Satze eine Integral-M_{n-1}*). — Und es ist klar, dass alle Integral-M_{n-1} von $F = a$, die von charakteristischen Streifen erzeugt sind, in dieser Weise construirt werden können.

---

*) Dieser Schluss ist richtig, wenn durch jedes Element der gegebenen M_{n-1} nur ein charakteristischer Streifen hindurchgeht (oder einige), was offenbar im Allgemeinen der Fall ist.

Wünscht man insbesondere Integral-M_{n-1} zu construiren, die auch als Punktgebilde $(n-1)$-fach ausgedehnt sind, welche also durch Gleichungen der Form

$$W(x_1 \cdots x_n) = \text{Const.}, \quad p_k = \frac{dW}{dx_k}$$

definirt sind, so ist zunächst klar, dass solche Integral-M_{n-1} nur dann existiren, wenn die Charakteristiken einfach ausgedehnte Punktgebilde sind*); dies ist immer der Fall, wenn F eine, und in Folge dessen zwei Grössen p enthält. Nimmt man in diesem Falle eine beliebige Integral-M_{n-2}, die, als Punktgebilde aufgefasst, $(n-2)$-fach ausgedehnt ist, und die nicht von Charakteristiken erzeugt ist, so ist klar, dass alle charakteristischen Streifen, die durch die Elemente dieser M_{n-2} hindurchgehen, eine Integral-M_{n-1}^{n-1} erzeugen. Und in dieser Weise können offenbar alle Integral-M_{n-1}^{n-1}, die von charakteristischen Streifen erzeugt sind, erhalten werden; dies folgt aus der evidenten Bemerkung, dass jede M_{n-1}^{n-1} eine M_{n-2}^{n-2} enthält.

Aus dem Obenstehenden folgt:

Theorem 3. Die Elemente der Gleichung $F = a$ können immer zu ∞^{n-1} Integral-M_{n-1} zusammengefasst werden; das heisst, unsere Gleichung besitzt vollständige Lösungen.

Oder analytisch ausgesprochen:

Zu einer gegebenen Function F_1 nullter Ordnung lassen sich immer weitere Functionen $F_2 \cdots F_n$ $\Phi_1 \cdots \Phi_n$ bez. nullter und erster Ordnung bestimmen derart, dass die Gleichung

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_n dF_n = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

identisch besteht.

Da nämlich $F = a$ nur ∞^{2n-3} charakteristische Streifen besitzt, so ist es klar, dass es solche Functionen $f(x_1 \cdots x_n)$ giebt, dass die Elemente, die den beiden Gleichungen

$$F = a, \quad f = 0$$

genügen, sich nicht zu charakteristischen Streifen zusammenordnen lassen. Folglich erzeugen die durch einen auf der Mannigfaltigkeit $f = 0$ gelegenen Punkt allgemeiner Lage

$$x_1 = c_1 \cdots x_n = c_n$$

gehenden Charakteristiken eine Integral-M_{n-1} von $F = a$. Und der Inbegriff aller dieser M_n ist eine vollständige Lösung, insofern jeder

---

*) Hat $F = a$ die Form $F(x_1 \cdots x_n) = a$, so gehen alle Elemente eines charakteristischen Streifens durch einen gemeinsamen Punkt; alsdann giebt es nur eine Integral-M_{n-1}^{n-1}, nämlich $F = a$ selbst, die $(n-1)$-fach ausgedehnt ist.

charakteristische Streifen jedenfalls durch *einen* Punkt der Mannigfaltigkeit $f = 0$ *hindurchgeht.*

Dieser Beweis für die allgemeine Existenz der vollständigen Lösungen ist dem Wesen der Sache nach stringent. Ich werde andeuten, wie man ihn rein analytisch führen könnte.

Man könnte zuerst beweisen, dass $2n$ Functionen

$$\Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_n F_1 F_2 \cdots F_n ,$$

die den folgenden Relationen genügen,

$$(F_i F_k) = (F_i \Phi_k) = (\Phi_i \Phi_k) = 0 , \quad (F_i \Phi_i) = 1 ,$$

immer die Gleichung

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_n dF_n = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

befriedigen, dabei vorausgesetzt, dass die Grössen F und Φ bez. von nullter und erster Ordnung sind. Den Beweis für die Richtigkeit dieses von mir herrührenden Satzes führt man am besten, wie Mayer es gethan hat.

Sodann wäre es nothwendig nachzuweisen, dass zu einer beliebigen gegebenen Function F' sich weitere Functionen F und Φ finden lassen, die zu einander gegenseitig und zu F' in den verlangten Beziehungen stehen. Um diesen Beweis zu führen, scheint es zweckmässig, sich auf die Theorie der homogenen Gruppen zu stützen. (Math. Annalen Bd. VIII, p. 248 und fg.)

§ 5.

Variation der Constanten.

9. Sei jetzt vorgelegt eine Gleichung

$$F(x_1 x_2 \cdots x_n p_1 p_2 \cdots p_n) = 0$$

und eine vollständige Lösung derselben

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_q p_q = H(p_1 \cdots p_q x_{q+1} \cdots x_n a_1 \cdots a_{n-1}),$$

$$x_i = \frac{dH}{dp_i} , \quad p_k = - \frac{dH}{dx_k}$$

mit den Parametern $a_1 \cdots a_{n-1}$. Wir werden allgemeine Operationen angeben, die zur Bestimmung neuer Integral-M_{n-1} dienen können; darnach zeigen wir, dass alle Integral-M_{n-1} in dieser Weise erhalten werden können. Hierbei ergiebt sich der merkwürdige Satz, dass $F = a$ höchstens *eine* Integral-M_{n-1} besitzt, die nicht von charakteristischen Streifen erzeugt ist. Dies ist die Verallgemeinerung eines von Cauchy herrührenden Satzes.

Unter den M_{n-1} der vollständigen Lösung, die mit dem gemeinsamen Symbole A bezeichnet werden mögen, wählen wir irgend eine Schaar, die durch eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Para-

metern a definirt wird. Wir zeigen, dass eine solche Schaar zur Construction einer neuen Integralmannigfaltigkeit Anlass geben kann.

Wir betrachten zuerst den Fall *einer* Gleichung zwischen den a,

$$\Phi(a_1 \cdots a_{n-1}) = 0.$$

Um die Sprache zu erleichtern, bezeichnen wir alle M_{n-1} der hiermit definirten Schaar mit dem Symbole A_0, eine bestimmte solche mit A_0^0 und endlich eine beliebige zu A_0^0 benachbarte Mannigfaltigkeit mit A_0'. Wir suchen die auf A_0^0 gelegenen Elemente, die mit den benachbarten Elementen von A_0' vereinigt liegen. Zu diesem Zwecke setzen wir die Bedingungsgleichung

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

in die Form:

$$d(x_1 p_1 + \cdots + x_q p_q) - x_1 dp_1 - \cdots - x_q dp_q + p_{q+1} dx_{q+1} + \cdots + p_n dx_n = 0,$$

woraus, durch Benutzung der Gleichungen der vollständigen Lösung, folgt

$$dH - \frac{dH}{dp_1} dp_1 - \cdots - \frac{dH}{dp_q} dp_q - \frac{dH}{dx_{q+1}} dx_{q+1} - \cdots - \frac{dH}{dx_n} dx_n = 0,$$

oder

$$\frac{dH}{da_1} da_1 + \cdots + \frac{dH}{da_{n-1}} da_{n-1} = 0;$$

hier sind $da_1 \cdots da_{n-1}$ die Incremente der Parameter, die dem Uebergange von A_0^0 zu A_0' entsprechen; sie befriedigen daher die Relation

$$\frac{d\Phi}{da_1} da_1 + \cdots + \frac{d\Phi}{da_{n-1}} da_{n-1} = 0.$$

Diejenigen Elemente auf A_0^0, die mit den benachbarten aller A_0' vereinigt liegen, erfüllen folglich die $n-1$ Gleichungen

$$\frac{dH}{da_k} + \lambda \frac{d\Phi}{da_k} = 0, \quad (k = 1 \cdots n-1),$$

oder eigentlich die $n-2$ nach der Elimination von λ zurückgebliebenen Gleichungen. Den Inbegriff dieser Elemente bezeichnen wir mit dem Symbole P^0. Durch entsprechende Construction bestimmen wir auf jeder A_0 eine Mannigfaltigkeit P. Ich behaupte, dass der Inbegriff aller P eine Integralmannigfaltigkeit bildet. Sind in der That P^0 und P' die beiden P, welche bez. A_0^0 und A_0' entsprechen, so muss jedes Element von P^0, welches ja mit allen benachbarten Elementen von A_0' vereinigt liegt, insbesondere auch zu den benachbarten Elementen von P' in dieser Beziehung stehen. Da nun die P selbst Integralmannigfaltigkeiten von $F = 0$ sind, so ist bestimmt nachgewiesen, dass alle P eine Integralmannigfaltigkeit bilden; freilich ist die Dimension dieser Mannigfaltigkeit wie auch die von P' noch unbestimmt.

Zu bemerken ist, dass die Gleichungen, die P bestimmen, nur 1) von der Form der Function H, d. h. von der gegebenen vollständigen Lösung, 2) von den Differentialquotienten des Φ, hinsichtlich der a, 3) von den Werthen der Parameter a abhängen. Giebt man daher, nachdem man eine bestimmte vollständige Lösung gewählt hat, den Grössen

$$a_1 \cdots a_{n-1} \frac{d\Phi}{da_1} \cdots \frac{d\Phi}{da_{n-1}}$$

bestimmte Werthe, so erhält man eine ganz bestimmte Mannigfaltigkeit P. Da nun die Differentialquotienten von Φ hinsichtlich der a Verhältnissgrössen sind, so giebt es nicht mehr als ∞^{2n-3} Mannigfaltigkeiten P. Freilich ist es noch denkbar, dass die Zahl der P geringer ist.

Jetzt betrachten wir eine Schaar von Mannigfaltigkeiten A, die durch zwei Gleichungen zwischen den a $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ definirt wird, und zeigen, dass sie zur Construction einer neuen Integralmannigfaltigkeit Anlass giebt. Wir brauchen die Symbole A_0 A_0^0 A_0' in derselben Bedeutung wie soeben. Die auf A_0^0 gelegenen Elemente, die mit den benachbarten Elementen aller A_0' vereinigt liegen, befriedigen wie im vorangehenden Falle die Gleichung

$$\frac{dH}{da_1} da_1 + \cdots + \frac{dH}{da_{n-1}} da_{n-1},$$

wo indess jetzt die Incremente da den *beiden* Gleichungen

$$\frac{d\Phi_1}{da_1} da_1 + \cdots + \frac{d\Phi_1}{da_{n-1}} da_{n-1} = 0,$$

$$\frac{d\Phi_2}{da_1} da_1 + \cdots + \frac{d\Phi}{da_{n-1}} da_{n-1} = 0$$

genügen. Folglich erfüllen die auf A_0^0 gelegenen Elemente, die mit den Elementen aller A_0' vereinigt liegen, die $n-3$ Gleichungen, die aus den $n-1$ Gleichungen

$$\frac{dH}{da_k} + \lambda_1 \frac{d\Phi_1}{da_k} + \lambda_2 \frac{d\Phi_2}{da_k} = 0$$

durch Elimination von λ_1 und λ_2 hervorgehen. Wir bezeichnen den Inbegriff dieser Elemente mit Q und bemerken dabei, dass jede Q von Mannigfaltigkeiten P erzeugt ist. Räsonniren wir nun, wie soeben, so erkennen wir, dass der Inbegriff aller Q eine Integralmannigfaltigkeit bestimmt, und zwar eine, die von Mannigfaltigkeiten P erzeugt ist.

In entsprechender Weise könnte man den Fall dreier oder noch mehrerer Gleichungen zwischen den a erledigen. Man erhält immer Integral-M, die von Mannigfaltigkeiten P erzeugt sind.

Endlich werden wir zeigen, dass die Gesammtheit der Integral-M_{n-1} der vollständigen Lösung ein Umhüllungsgebilde bestimmen kann, welches selbst ein Integral-M_{n-1} ist. Nach dem Vorangehenden wird die Gleichung

$$\frac{dH}{da_1} da_1 + \cdots + \frac{dH}{da_n} da_n = 0,$$

in welcher *alle* da von einander unabhängig sind, von den auf einer bestimmten A gelegenen Elementen befriedigt, die mit den benachbarten Elementen *aller* benachbarten A vereinigt liegen. Daher giebt die Elimination der Parameter a zwischen den $2n$ Gleichungen

$$\frac{dH}{da_1} = 0 \cdots \frac{dH}{da_{n-1}} = 0,$$

$$x_i = \frac{dH}{dp_i}, \quad p_k = \frac{dH}{dx_k}$$

im Allgemeinen eine Integral-M_{n-1} der vorgelegten Gleichung. Diese M_{n-1} soll, wenn sie überhaupt existirt, die *singuläre* Integral-M_{n-1} heissen.

Wenn ich soeben gesagt habe, dass eine singuläre Integral-M_{n-1} *im Allgemeinen* existirt, so ist das unter der Voraussetzung, dass die vollständige Lösung selbst und nicht die Gleichung $F = 0$ als arbiträr gewählt gedacht wird. Denkt man sich dagegen die Gleichung $F = 0$ als arbiträr gegeben, so wird es sich wohl zeigen, dass eine singuläre Integral-M_{n-1} nur ausnahmsweise existirt, insofern die Integral-M_{n-1} einer beliebigen vollständigen Lösung mit Singularitäten behaftet sind, die ein Umhüllungsgebilde nicht zu Stande kommen lassen.

10. Wir beweisen jetzt, dass alle Integral-M_{n-1} der vorgelegten Gleichung durch die angegebenen Operationen aus der bekannten vollständigen Lösung derivirt werden können.

Man nehme in der That eine beliebige Integralmannigfaltigkeit M_{n-1}. Jedes Element derselben gehört einer (oder mehreren) Mannigfaltigkeiten A an; und diejenigen A, die zu M_{n-1} in dieser Beziehung stehen, bilden eine Schaar, die durch etwa q Gleichungen zwischen den a

$$\Phi_k(a_1 \cdots a_n) = 0, \quad (k = 1 \cdots q)$$

definirt wird. Man wähle zwei benachbarte A dieser Schaar und bezeichne sie mit A^0 und A'; es seien ferner ε^0 und ε' zwei benachbarte Elemente, welche bez. A^0 und A' mit M_{n-1} gemein haben. Diese beiden Elemente liegen als angehörig M_{n-1} vereinigt und befriedigen daher die $n - 1$ Gleichungen

$$\frac{dH}{da_k} + \lambda_1 \frac{d\Phi_1}{da_k} + \lambda_2 \frac{d\Phi_2}{da_k} + \cdots + \lambda_q \frac{d\Phi_q}{da_q} = 0.$$

Also ist M_{n-1} entweder mit der von unserer Schaar bestimmten Integralmannigfaltigkeit identisch, oder in derselben als reducibler Theil enthalten.

Wir erkennen in dieser Weise, dass alle Integral-M_{n-1}, ausgenommen die singuläre M_{n-1}, durch Mannigfaltigkeiten P erzeugt werden. Andererseits haben wir gefunden, dass jede Integral-M_{n-1}, die einer vollständigen Lösung angehören kann, von charakteristischen Streifen erzeugt ist. Also liegt die Vermuthung sehr nahe, dass die P Charakteristiken sind, oder aus discreten Charakteristiken bestehen. Um dies zu beweisen, haben wir die beiden Möglichkeiten, dass die P, die von α^{ter} Dimension sein mögen, von Charakteristiken erzeugt sind, und dass sie es nicht sind, zu berücksichtigen. Im ersten Falle ist es, wenn α grösser als 1 ist, klar, dass Integral-M_{n-1}, die eine gewisse Anzahl passend gewählte einander benachbarte Charakteristiken enthalten, eine gewisse P in ihrer ganzen Ausdehnung enthalten müssen. Der Umstand also, dass eine Integral-M_{n-1} gewisse benachbarte Charakteristiken enthielte, würde bewirken, dass Charakteristiken, die zu jenen nicht benachbart sind, der M_{n-1} angehörten. Dies steht aber im Widerspruche mit den Constructionen des vorangehenden Paragraphen. Also kann α in diesem Falle nicht grösser als 1 sein. Setzen wir andererseits voraus, dass die P nicht von charakteristischen Streifen erzeugt sind, so zeigt ein vollständig analoges Raisonnement, dass die P von nullter Dimension sein müssen. Nun aber sind die P nach dem Vorangehenden jedenfalls von erster Dimension. Also sind die P charakteristische Streifen oder bestehen aus discreten Charakteristiken.

Theorem 4. Hiermit ist nachgewiesen, dass die Integral-M_{n-1} der Gleichung $F=0$ im Allgemeinen von charakteristischen Streifen erzeugt sind. Die einzige Ausnahme bildet die singuläre Integral-M_{n-1}, wenn eine solche existirt.

§ 6.

Specielle Involutionssysteme.

11. In diesem Paragraphen betrachten wir Gleichungen der Form

$$p_k = h_k = p_n \varphi_k\left(x_1 \cdots x_n, \frac{p_{q+1}}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right), \quad (k = 1 \cdots q),$$

die paarweisse in der Beziehung

$$(p_i - h_i,\ p_k - h_k) = 0$$

stehen. Wir zeigen, dass ein solches System von Gleichungen, welches ein *specielles Involutionssystem* heissen mag, gemeinsame Integral-M_{n-1}

besitzen; gleichzeitig geben wir eine allgemeine Methode zu ihrer Bestimmung.

Die Theorie eines *zweigliedrigen* Involutionssystems lässt sich auf die folgenden Sätze begründen.

Satz 12. Stehen die beiden Functionen $p_1 - h_1$, $p_2 - h_2$ in Involutionsbeziehung, so bilden die linearen Gleichungen

$$(p_1 - h_1,\ V) = 0,\quad (p_2 - h_2,\ V) = 0,\quad \sum p \frac{dV}{dp} = 0,$$

welche V als Function von $x_1 \cdots x_n p_3 \cdots p_n$ bestimmen, ein vollständiges System.

Setzen wir nämlich

$$(p_1 - h_1,\ V) = A_1 V,\quad (p_2 - h_2,\ V) = A_2 V,\quad \sum p \frac{dV}{dp} = A_3 V,$$

so finden wir durch Ausführung, indem wir erinnern, dass h homogen von 1ter Ordnung ist

$$A_i(A_k(V)) - A_k(A_i(V)) = 0,$$

d. h. die Grössen $A_i(A_k(V)) - A_k(A_i(V))$ drücken sich linear durch $A_1 V$, $A_2 V$ und $A_3 V$ aus. Es ist also nur noch nachzuweisen, dass zwischen A_1, A_2 und A_3 selbst keine solche Relation besteht. Dies folgt aber daraus, dass die Grösse $\frac{dV}{dx_1}$ sich nur in $A_1 V$ und die Grösse $\frac{dV}{dx_2}$ sich nur in $A_2 V$ findet. Hiermit ist unser Satz bewiesen.

Sind $\Phi_1 \cdots \Phi_{2n-5}$ ein System Lösungen unseres vollständigen Systems, so ordnen die Gleichungen

$$\Phi_1 = a_1 \cdots \Phi_{2n-5} = a_{2n-5}$$

mit den Parametern $a_1 \cdots a_{2n-5}$ die Elemente des vorgelegten Involutionssystems in ∞^{2n-5} Schaaren, jede bestehend aus ∞^2 Elementen, zusammen. Wir nennen diese Schaaren von Elementen: *charakteristische M_2 des Involutionssystems*, und bemerken dabei, dass jede solche Elementenschaar einfach unendlich viele charakteristische Streifen der Gleichung $p_1 - h_1 = 0$ und ebenso einfach unendlich viele charakteristische Streifen der Gleichung $p_2 - h_2 = 0$ enthält. Hieraus lässt sich leicht schliessen, dass benachbarte Elemente einer charakteristischen M_2 immer vereinigt liegen. In der That, wir kennen zwei Fortschreitungsrichtungen $dx_1 \cdots dx_n\ dp_1 \cdots dp_n$, die von einem Elemente einer M_2 zu einem benachbarten Elemente derselben M_2 führen, nämlich die beiden, die den charakteristischen Streifen der beiden vorgelegten Gleichungen entsprechen:

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 : \cdots : dx_n : dp_1 : \cdots : dp_n =$$
$$1 : 0 : -\frac{dh_1}{dp_3} : \cdots : -\frac{dh_1}{dp_n} : \frac{dh_1}{dx_1} : \cdots : \frac{dh_1}{dx_n}$$

und

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 : \cdots : dx_n : dp_1 : \cdots : dp_n =$$
$$0 : 1 : -\frac{dh_2}{dp_3} : \cdots : -\frac{dh_2}{dp_n} : \frac{dh_2}{dx_1} : \cdots : \frac{dh_2}{dx_n}.$$

Lassen wir daher λ_1 und λ_2 Parameter bezeichnen, so bestimmen die Gleichungen

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 : \cdots\cdots : dx_n : dp_1 : \cdots\cdots : dp_n =$$
$$\lambda_1 : \lambda_2 : -\left(\lambda_1 \frac{dh_1}{dp_3} + \lambda_2 \frac{dh_2}{dp_3}\right) : \cdots\cdots : \left(\lambda_1 \frac{dh_1}{dx_n} + \lambda_2 \frac{dh_2}{dx_n}\right)$$

die allgemeinste Fortschreitungsrichtung innerhalb der M_2. Und da h_1 und h_2 homogen von erster Ordnung sind, so ist es einleuchtend, dass diese Werthe der Grössen $dx_1 \cdots dx_n$ den Ausdruck $\Sigma p\, dx$ verschwinden lassen. Also

Satz 13. Die Elemente eines zweigliedrigen Involutionssystems

$$p_1 - h_1 = 0, \quad p_2 - h_2 = 0$$

ordnen sich in ∞^{2n-5} Schaaren, jede bestehend aus ∞^2 vereinigt liegenden Elementen, zusammen. Jede solche Schaar, die eine charakteristische M_2 des Involutionssystems heissen mag, ist von ∞^1 charakteristischen Streifen jeder Gleichung des Involutionssystems erzeugt.

In der Theorie des vorgelegten Involutionssystems spielen die charakteristischen M_2 ganz dieselbe Rolle wie die charakteristischen Streifen für eine einzige Gleichung. Dies geht aus den folgenden fundamentalen Sätzen hervor.

Satz 14. Integral-M_{n-1} des zweigliedrigen Involutionssystems

$$p_1 - h_1 = 0, \quad p_2 - h_2 = 0,$$

die durch ein gegebenes Element gehen, enthalten im Allgemeinen die diesem Elemente zugehörige charakteristische M_2.

Legen wir nämlich durch das gegebene Element e die charakteristischen Streifen der Gleichung $p_1 - h_1 = 0$, so muss jedes Element ε derselben den besprochenen Integral-M_{n-1} angehören. Legen wir in entsprechender Weise eine Charakteristik der zweiten Gleichung durch ε, so muss ebenso jedes Element E dieser Streifen allen unseren Integral-M_{n-1} angehören. Nun aber erzeugen alle Elemente E eben die dem gegebenen Elemente e zugehörige charakteristische M_2. Also ist unser Satz bewiesen.

Satz 15. Enthalten zwei benachbarte charakteristische M_2 zwei vereinigt liegende Elemente e und e', so liegt jedes Element E der einen M_2 mit allen benachbarten Elementen der E' der zweiten M_2 vereinigt.

Zum Beweise legen wir eine Charakteristik der Gleichung $p_1 - h_1 = 0$ durch e und eine Charakteristik der zweiten Gleichung durch E. Diese beiden Streifen sind in der einen charakteristischen M_2 enthalten und haben also ein Element ε gemein. Durch eine ähnliche Construction

finden wir ein Element ε' in der zweiten charakteristischen M_2. Wenden wir nun Satz 11. auf die beiden, durch die vereinigt liegenden Elemente e und e' gehenden Streifen der Gleichung $p_1 - h_1 = 0$ an, so erkennen wir, dass auch die Elemente ε und ε' vereinigt liegen. Also können wir denselben Satz auf die beiden durch ε und ε' gehenden Streifen der zweiten Gleichung anwenden; in dieser Weise finden wir, dass E und E' vereinigt liegen, wie behauptet wurde.

Satz 16. Die charakteristischen M_2 des Involutionssystems

$$p_1 - h_1 = 0, \quad p_2 - h_2 = 0,$$

die durch die Elemente einer Integral-M_{n-3} hindurchgehen, erzeugen im Allgemeinen eine Integral-M_{n-1} des Involutionssystems.

Im Allgemeinen geht durch jedes Element der vorgelegten Integral-M_{n-3} nur *eine* charakteristische M_2, und zwar eine, die keine weiteren Elemente mit der M_{n-3} gemein hat. Diese ∞^{n-2} M_2 müssen nach dem vorangehenden Satze immer eine Integral-M_{n-1} erzeugen. Ausnahmsweise kann es eintreten, dass jede M_2 unendlich viele Elemente mit der vorgelegten Integral-M_{n-3} gemein hat; alsdann erhält man nur ∞^1 M_2, die offenbar eine Integral-M_{n-2} erzeugen. Endlich ist es auch denkbar, dass die vorgelegte M_{n-3} von charakteristischen M_2 erzeugt ist. In diesem Falle giebt unsere Construction Nichts.

Theorem 5. Die Elemente des zweigliedrigen Involutionssystems

$$p_1 - h_1 = 0, \quad p_2 - h_2 = 0$$

lassen sich zu ∞^{n-2} gemeinsamen Integral-M_{n-1} zusammenfassen. Den Inbegriff dieser M_{n-1} nennen wir eine vollständige Lösung des Involutionssystems.

Es ist a priori einleuchtend, dass es solche Functionen $f(x_1 \cdots x_n)$ gieht, dass eine charakteristische M_2 allgemeiner Lage nur eine endliche Anzahl Elemente enthält, deren Coordinaten der Gleichung $f = 0$ genügen. Nehmen wir nun einen *allgemeinen* auf der Mannigfaltigkeit $f = 0$ gelegenen Punkt, so gehen durch ihn ∞^{n-3} Elemente des Involutionsssystems, deren Inbegriff eine Integral-M_{n-3} ist. Also erzeugen die durch die Elemente dieser M_{n-3}, d. h. die durch den gegebenen Punkt gehenden charakteristischen M_2 eine Integral-M_{n-1} des Involutionssystems. Lassen wir den betreffenden Punkt alle möglichen Lagen auf $f = 0$ annehmen, so erhalten wir ∞^{n-2} Integral-M_{n-1}. Und jedes Element des Involutionssystems gehört einer solchen M_{n-1} an; denn die dem betreffenden Elemente zugehörige charakteristische M_2^2 schneidet $f = 0$ jedenfalls in einem Punkte.

12. Unsere vollständige Lösung wird durch Gleichungen der Form

$$x_1 p_1 + \cdots + x_q p_q = H(p_1 \cdots p_q\, x_{q+1} \cdots x\ \ a_1 \cdots a_{n-2}),$$
$$x_{q-k} = \frac{dH}{dp_{q-k}}, \quad p_{q+k} = -\frac{dH}{dx_{q+k}}$$

definirt; hier ist H wie gewöhnlich von erster Ordnung hinsichtlich $p_1 \cdots p_q$ und $a_1 \cdots a_{n-2}$ sind Parameter.

Stellen wir zwischen den Parametern a eine oder mehrere Gleichungen fest

$$\Phi_1 = 0 \cdots \Phi_i = 0,$$

so erhalten wir eine Schaar Integral-M_{n-1}, die der vollständigen Lösung angehören. Raisonniren wir nun wie im Paragraphen 5., so erkennen wir, dass diese M_{n-1} ein Umhüllungsgebilde bestimmen, das selbst eine Integralmannigfaltigkeit ist. Umhüllen insbesondere *alle* M_{n-1} der vollständigen Lösung eine M_{n-1}, so ist dieselbe eine Integral-M_{n-1}, die wir die *singuläre Integral-M_{n-1} des Involutionssystems* nennen. Andererseits finden wir auch, dass alle Integral-M_{n-1} des Involutionssystems durch die angegebenen Operationen aus der gegebenen vollständigen Lösung derivirt werden können. Hieraus fliesst der Satz

Satz 17. Die Integral-M_{n-1} des Involutionssystems $p_1 - h_1 = 0$, $p_2 - h_2 = 0$ sind im Allgemeinen von charakteristischen M_2 erzeugt Die einzige Ausnahme bildet die singuläre M_{n-1}, wenn eine solche existirt.

13. Diese Theorie dehnt sich nun mit grösster Leichtigkeit auf specielle Involutionssysteme mit beliebig vielen Gliedern

$$p_1 - h_1 = 0 \cdots p_q - h_q = 0$$

aus. Wir können uns darauf beschränken, die betreffenden Sätze aufzustellen.

Satz 18. Stehen die Functionen $p_1 - h_1 \cdots p_q - h_q$ paarweise in Involutionsbeziehung, so bilden die linearen Gleichungen

$$(p_1 - h_1, V) = 0 \cdots (p_q - h_q, V) = 0, \quad \sum p \frac{dV}{dp} = 0,$$

die V als Function von $x_1 \cdots x_n\, p_{q+1} \cdots p_n$ bestimmen, ein vollständiges System.

Satz 19. Dieses vollständige System ordnet die Elemente unseres Involutionssystems in M_q zusammen, welche die charakteristischen M_q des Involutionssystems heissen mögen. Jede charakteristische M_q enthält ∞^{q-1} charakteristische Streifen einer jeden Gleichung

$$p_k - h_k = 0,$$

sie enthält ferner ∞^{q-2} charakteristische M_2 eines jeden zweigliedrigen Involutionssystems

$$p_i - h_i = 0, \quad p_k - h_k = 0$$

u. s. w.

Satz 20. Enthalten zwei benachbarte charakteristische M_q zwei vereinigt liegende Elemente, so liegt jedes Element der einen M_q mit jedem benachbarten Elemente der zweiten M_q vereinigt.

Satz 21. Die charakteristischen M_q, die durch die Elemente einer Integral-M_{n-q-1} hindurchgehen, erzeugen im Allgemeinen eine Integral-M_{n-1}, ausnahmsweise eine Integral-M_{n-2} u. s. w.

Satz 22. Die Elemente des q-gliedrigen Involutionssystems

$$p_1 - h_1 = 0 \cdots p_q - h_q = 0$$

lassen sich zu ∞^{n-q} *Integral-*M_{n-1} *zusammenfassen. Den Inbegriff dieser* M_{n-1} *nennen wir eine vollständige Lösung des Involutionssystems.*

Satz 23. Die Integral-M_{n-1} des Involutionssystems

$$p_1 - h_1 = 0 \cdots p_q - h_q = 0$$

sind im Allgemeinen von charakteristischen M_q erzeugt. Die einzige Ausnahme bildet die sogenannte *singuläre Integral-*M_{n-1} *des Involutionssystems*, wenn eine solche existirt.

§ 7.

Allgemeine Involutionssysteme.

14. Wir betrachten jetzt Gleichungen der Form

$$x_k - \varphi_k(x_{q+1} \cdots x_n) = 0, \qquad (k = 1, 2 \cdots q),$$
$$p_i - h_i(x_{q+1} \cdots x_n\, p_1 \cdots p_q\, p_{q+m} \cdots p_n) = 0, \quad (i = q+1 \cdots q+m),$$

die den Relationen

$$(x_k - \varphi_k,\ p_i - h_i) = 0 = (p_i - h_i,\ p_r - h_r)$$

genügen. Wir zeigen, dass sie gemeinsame Integral-M_{n-1} besitzen und geben eine allgemeine Methode zu ihrer Bestimmung. Hierzu müssen wir eine wichtige Hülfstheorie entwickeln.

Das Problem, die gemeinsamen Integral-M_{n-1} von q gegebenen Gleichungen

$$F_1 = 0 \cdots F_q = 0$$

zu bestimmen, besteht nach unserer Definition darin, in allgemeinster Weise $n - q$ weitere Gleichungen zwischen den x und p aufzufinden, die mit den vorgelegten die Differentialrelation

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

identisch befriedigen. Führen wir nun statt

$$x_1 \cdots x_n \ \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

neue Variabeln

$$y_1 \cdots y_{2n-1}$$

ein, so nimmt unser Problem die Form: in allgemeinster Weise $n-q$ Gleichungen zwischen den y zu finden, die zusammen mit q vorgelegten Relationen zwischen diesen Grössen einen gewissen linearen Differentialausdruck

$$Y_1 dy_1 + \cdots + Y_{2n-1} dy_{2n-1} = \sum p\, dx$$

zum Verschwinden bringen.

Wir werden nun insbesondere voraussetzen, dass wir statt $x_1 \cdots x_n$ $p_1 \cdots p_n$ $2n+1$ Variabeln

$$x_1' \cdots x_n' \; p_1' \cdots p_n'$$

einführen, die derart gewählt sind, dass die Bedingungsgleichung

$$\sum_1^n p\, dx = \sum_1^n p'\, dx'$$

besteht. *Alsdann besitzt das transformirte Problem denselben Charakter wie das ursprünglich vorgelegte.*

Unter allen hiermit definirten Transformationen genügt es für den Augenblick solche zu betrachten, deren Gleichungen die Form

$$x_k = X_k(x_1' x_2' \cdots x_n'),$$

$$p_k = \sum_{s=1}^{s=n} p_s' \frac{dx_s'}{dx_k}$$

haben. Wir werden zeigen, dass bei einer derartigen Transformation der bekannte Differentialausdruck

$$(F\Phi) = \sum \frac{dF}{dx_i}\frac{d\Phi}{dp_i} - \frac{dF}{dp_i}\frac{d\Phi}{dx_i}$$

sich als Invariante verhält. Es ist nämlich

$$\frac{dF}{dx_m'} = \sum_i \frac{dF}{dx_i}\frac{dx_i}{dx_m'} + \sum_i \frac{dF}{dp_i} \sum_s p_s' \frac{d}{dx_m'}\left(\frac{dx_s'}{dx_i}\right),$$

$$\frac{d\Phi}{dp_m'} = \sum_k \frac{d\Phi}{dp_k}\frac{dx_m'}{dx_k},$$

woraus

$$\frac{dF}{dx_m'}\frac{d\Phi}{dp_m'} - \frac{dF}{dp_m'}\frac{d\Phi}{dx_m'} = \sum_i \sum_k \left(\frac{dF}{dx_i}\frac{d\Phi}{dp_k} - \frac{d\Phi}{dx_i}\frac{d\Phi}{dp_k}\right)\frac{dx_i}{dx_m'}\frac{dx_m'}{dx_k}$$

$$+ \sum_i \sum_k \sum_s \frac{dF}{dp_i}\frac{d\Phi}{dp_k} p_s' \frac{d}{dx_m'}\left(\frac{dx_s'}{dx_i}\right)\frac{dx_m'}{dx_k}$$

$$- \sum_i \sum_k \sum_s \frac{d\Phi}{dp_i}\frac{dF}{dp_k} p_s' \frac{d}{dx_m'}\left(\frac{dx_s'}{dx_i}\right)\frac{dx_m'}{dx_k},$$

und wenn wir hinsichtlich m summiren, und darnach die Identität

$$\sum_m \frac{dU}{dx_m'} \frac{dx_m'}{dx_k} = \frac{dU}{dx_k}$$

berücksichtigen:

$$(F\Phi)_{x'p'} = (F\Phi)_{xp} + \sum_i \sum_k \sum_s \frac{dF}{dp_i} \frac{d\Phi}{dp_k} p_s' \frac{d^2 x_s'}{dx_i\, dx_k}$$
$$- \sum_i \sum_k \sum_s \frac{d\Phi}{dp_i} \frac{dF}{dp_k} p_s' \frac{d^2 x_s'}{dx_i\, dx_k};$$

das heisst es ist

$$(F\Phi)_{x'p'} = (F\Phi)_{xp},$$

wie behauptet wurde.

15. Diese Theorie wenden wir nun auf das vorgelegte Involutionssystem an:

$$x_k - \varphi_k(x_{q+1} \cdots x_n) = 0, \qquad (k = 1 \cdots q),$$
$$p_i - h_i(x_{q+1} \cdots x_n\ p_1 \cdots q_q\ p_{q+m} \cdots p_n) = 0, \quad (i = q+1 \cdots q+m).$$

Wir führen neue Variabeln ein vermöge der Gleichungen

$$x_{q-k}' = x_{q-k} = \varphi_{q-k}, \qquad x_{q+k}' = x_{q+k},$$
$$p_m = \sum_{s=1}^{s=n} p_s' \frac{dx_s'}{dx_m}$$

und bringen hierdurch unser Involutionssystem auf die Form

$$x_1' = 0 \cdots x_q' = 0,$$
$$p_i' - H_i(x_{q+1}' \cdots x_n'\ p_1' \cdots p_q'\ p_{q+m}' \cdots p_n'), \quad (i = q+1 \cdots q+m).$$

Und es handelt sich darum, in allgemeinster Weise $n - q - m$ weitere Gleichungen zwischen den $x'p'$ zu finden, die zusammen mit jenen den Ausdruck

$$p_1' dx_1' + \cdots + p_n' dx_n',$$

oder, wegen $x_1' = 0 \cdots x_q' = 0$, den reducirten Ausdruck

$$p_{q+1}' dx_{q+1}' + \cdots + p_n' dx_n'$$

zum Verschwinden bringen.

Berücksichtigen wir nun, dass nach unseren früheren Entwickelungen auch die transformirten Gleichungen in Involutionsbeziehung stehen,

$$(x_k', p_i' - H_i) = 0, \quad (k = 1, 2 \cdots q),$$
$$(p_i' - H_i, p_k' - H_k) = 0,$$

und dass in Folge dessen die Grössen $x_1' \cdots x_q'$ nicht in den H vorkommen, so erkennen wir, dass unser Problem die folgende Gestalt angenommen hat:

Vorgelegt ist ein m-gliedriges specielles Involutionssystem zwischen den Variabeln

$$x_{q+1}' \cdots x_n' \; p_{q+1}' \cdots p_n',$$

$$d\ _i' - h_i(x_{q+1}' \cdots x_n' \; p_{q+1}' \cdots p_n'), \quad (i = q+1 \cdots q+m).$$

Man soll die allgemeinste Integralmannigfaltigkeit desselben bestimmen.

Dieses Problem lernten wir aber in dem vorangehenden Paragraphen erledigen. Und also ist hiermit auch das im Anfange dieses Paragraphen gestellte Problem erledigt.

Kehren wir nun zu den Variabeln $x_1 \cdots x_n \; p_1 \cdots p_n$ zurück, so können wir folgenden Satz aufstellen.

Theorem 6. Die Elemente des Involutionssystems

$$x_k - \varphi_k(x_{q+1} \cdots x_n) = 0, \qquad (k = 1 \cdots q),$$

$$p_i - h_i(x_{q+1} \cdots x_n \; p_1 \cdots p_q \; p_{q+m} \cdots p_n), \quad (i = q+1 \cdots q+m)$$

lassen sich zu Integral-M_{n-1} vereinigen, deren Inbegriff eine vollständige Lösung des Involutionssystems heissen mag. Um eine solche zu finden, genügt es, ein m-gliedriges Involutionssystem der Form $p_k - h_k = 0$ aufzustellen und eine vollständige Lösung desselben zu bestimmen.

Aus diesem Satze, dessen Beweis in dem Vorangehenden liegt, schliessen wir in der gewöhnlichen Weise, dass die allgemeinste Integral-M_{n-1} durch Variation der Constanten der vollständigen Lösung erhalten werden kann. Ebenso lässt sich die Theorie der charakteristischen Mannigfaltigkeiten u. s. w. auf solche Invnlutionssysteme ausdehnen. Da dies indess keine Schwierigkeit darbietet, gehen wir hierauf nicht näher ein.

§ 8.

Erledigung des allgemeinen Problems.

16. Herr Mayer hat gezeigt, dass die Bestimmung aller gemeinsamen Integral-M_{n-1}^{n-1} von beliebigen gegebenen Gleichungen sich auf die Integration eines speciellen Involutionssystems der Form $p_k - h_k = 0$ reduciren lässt. Dieser fundamentale Satz*) lässt sich dahin verallgemeinern, dass die Bestimmung aller *Integral-M_{n-1}* von beliebigen gegebenen Gleichungen in jener Weise geschehen kann. Dies soll jetzt gezeigt werden. Hierzu brauchen wir zwei Hülfssätze.

Satz 24. Die gemeinsamen Integral-M_{n-1} zweier Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ genügen auch der Gleichung $(F_1 F_2) = 0$.

Denn die Integral-M_{n-1} von $F_1 = 0$ genügen dem simultanen Systeme

*) Bour hatte einen analogen Satz aufgestellt, der indess nicht stringent formulirt war.

$$dx_1 : \cdots = \frac{dF_1}{dp_1} :$$

und die Integral-M_{n-1} von $F_2 = 0$ befriedigen die Gleichung

$$\frac{dF_2}{dx_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{dF}{dp_n}\, dp_n = 0.$$

Also genügen die gemeinsamen Integral-M_{n-1} von $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ derjenigen Relation, die hervorgeht, wenn man in der letzten Differentialgleichung statt dx_k und dp_k bez. $\frac{dF_1}{dp_k}$ und $-\frac{dF_1}{dx_k}$ einsetzt, d. h. der Relation

$$(F_1 F_2) = 0.$$

Zu bemerken ist, dass dieser Satz nicht mehr gültig bleibt, wenn die betreffende Integral-M_{n-1} die singuläre Integral-M_{n-1} von $F_1 = 0$ oder $F_2 = 0$ ist.

Satz 25. Haben q Gleichungen zwischen $x_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n$ gemeinsame Integral-M_{n-1}, so ist es immer möglich, q solche unter den Zahlen $1 \cdots n$ zu wählen, etwa $a \cdots l\ m \cdots s$, dass unsere Gleichungen sich hinsichtlich der Grössen

$$p_a \cdots p_q\ x_m \cdots x_s$$

auflösen lassen, und dabei die Grössen $x_m \cdots x_s$ sich als Functionen der übrigen x ausdrücken.

Lass' uns voraussetzen, dass sich aus den q gegebenen Gleichungen etwa m Relationen zwischen den x herleiten lassen; dann ist es möglich, die $q-m$ übrigen Gleichungen hinsichtlich $q-m$ der Grössen p etwa $p_1 \cdots p_q$ aufzulösen

$$p_k = h_k\,(p_{q+1} \cdots p_n\ x \cdots x_n), \quad (k = 1 \cdots q).$$

Wäre es nun möglich, aus den m Relationen zwischen den x eine herzuleiten, die nur die Grössen $x_1 \cdots x_q$ enthielte, so könnte man sie etwa hinsichtlich x_1 auflösen

$$x_1 - \psi_1\,(x_2 \cdots x_q) = 0.$$

Dann aber müssten nach dem vorangehenden Satze die gemeinsamen Integral-M_{n-1} der q vorgelegten Gleichungen zugleich der Relation

$$(x_1 - \psi_1,\ p_1 - h_1) = 0,$$

d. h.

$$1 = 0$$

genügen. Dies ist aber absurd. Also ist unsere Annahme, dass sich aus den m Relationen zwischen den x eine zwischen $x_1 \cdots x_q$ herleiten liesse, verkehrt. Folglich können diese m Gleichungen hinsichtlich m unter den Grössen $x_{q+1} \cdots x_n$ aufgelöst werden, womit unser Satz bewiesen ist.

Satz 26. Die Bestimmung der gemeinsamen Integral-M_{n-1} von

beliebigen gegebenen Gleichungen lässt sich immer auf die Integration eines Involutionssystems der Form $p_k - h_k = 0$, $x_i - f_i = 0$ *zurückführen.*

Wir bringen die vorgelegten Gleichungen nach dem vorangehenden Satze auf die Form

$$(A)\quad \begin{cases} p_k - h_k(p_{q+1}\cdots p_n\, x_1\cdots x_q\, x_{q+m+1}\cdots x_n) = 0, & (k = 1\cdots q), \\ x_i - f_i(x_1\cdots x_q\, x_{q+m+1}\cdots x_n) = 0, & (i = q+1\cdots q+m) \end{cases}$$

und bilden die Gleichungen

$$(B)\qquad (p_k - h_k,\ p_m - h_m) = 0, \quad (p_k - h_k,\ x_i - f_i) = 0,$$

die offenbar nur die Grössen

$$p_{q+1}\cdots p_n\ x_1\cdots\ x_q\ x_{q+m}\cdots x_n$$

enthalten. Hier sind nun zwei Fälle denkbar; entweder sind diese neuen Gleichungen algebraische Consequenzen der vorgelegten; und dies kommt nach der Form unserer Gleichungen A und B darauf hinaus, dass die Gleichungen identisch Null sind und dass also die Gleichungen A schon ein Involutionssystem bilden*); oder auch, es sind die Gleichungen B nicht sämmtlich algebraische Consequenzen der A. Alsdann fügen wir die neuen Gleichungen zu den alten hinzu und behandeln das hiermit erhaltene Gleichungssystem in derselben Weise. Entweder kann es durch Auflösung auf die verlangte Form gebracht werden, oder auch, wir finden wieder neue Gleichungen, die hinzugefügt werden müssen. Indem man nun weiter geht, darf man, wenn die vorgelegten Gleichungen überhaupt gemeinsame Integral-M_{n-1} besitzen, nie mehr als n Gleichungen finden. Existiren also solche Integral-M_{n-1}, so erhält man zuletzt nothwendigerweise ein Involutionssystem der verlangten Form, dessen Integral-M_{n-1} eben die Integral-M_{n-1} der ursprünglichen Gleichungen sind.

Theorem 7. Die Bestimmung der gemeinsamen Integral-M_{n-1} *von beliebigen gegebenen Gleichungen lässt sich immer auf die Integration eines Involutionssystems der Form* $p_k - h_k = 0$ *zurückführen.*

Denn nach dem vorangehenden Satze lässt unser Problem sich auf die Integration eines Involutionssystems der Form

$$p_k - h_k = 0, \quad x_i - f_i = 0$$

reduciren, und dieses neue Problem verlangt nach den Entwickelungen des vorangehenden Paragraphen nur die Integration eines Involutionssystems der Form $p_k - h_k = 0$.

*) Sind die Gleichungen A und B contradictorisch, so haben sie eo ipso keine gemeinsame Integral-M_n (jedenfalls nicht in dem früher definirten Sinne).

Abschnitt II.

In dem ersten Abschnitte habe ich das Hauptproblem dieser Abhandlung auf die Integration eines Involutionssystems der Form

$$p_k - h_k = 0, \quad k = 1 \cdots q$$

zurückgeführt. Ich zeigte ferner, dass die Erledigung dieses letzten Problems nur die successive Integration mehrerer simultaner Systeme verlangte.

Jetzt werde ich eine einfachere Integrationsweise des Involutionssystems $p_k - h_k = 0$ entwickeln, und zwar ist es diejenige Methode, die ich im Mai und Juni 1872 in einigen an die Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania gerichteten Mittheilungen skizzirte und welche hinterher mein Freund Mayer in mehreren schönen analytischen Abhandlungen näher ausgeführt hat, die ich jetzt endlich ausführlich darstellen werde.

§ 10.

Vorbereitende Entwickelungen.

17. Die Sätze dieses Paragraphen beziehen sich auf ein Involutionssystem der Form

$$p_1 - f_1 = \cdots = p_q - f_q = 0,$$

wo $f_1 \cdots f_q$ Functionen von $x_1 \cdots x_n \; p_{q+1} \cdots p_n$ sind.

Satz 27. Es ist immer möglich, q solche Constanten $a_1 \cdots a_q$ zu wählen, dass eine charakteristische M_q allgemeiner Lage nur eine discrete Anzahl Elemente enthält, welche die Gleichungen

$$x_1 = a_1 \cdots x_q = a_q$$

befriedigen.

Der Kürze wegen bezeichnen wir beiläufig ein Element, für welches

$$x_1 = a_1 \cdots x_q = a_q, \quad p_1 = f_1 \cdots p_q = f_q,$$

d. h. ein beliebiges Element des Involutionssystems, dessen Punkt auf der $(n-q)$-fachen Punktmannigfaltigkeit $x_1 = a_1 \cdots x_q = a_q$ liegt, mit dem Symbole e_a.

Setzen wir zunächst voraus, dass jede charakteristische M_q unendlich viele Elemente e_a enthielte. Dann sind zwei Fälle denkbar; entweder bilden alle diese Elemente eine continuirliche Schaar, so dass jedes Element in derselben Schaar ein benachbartes hat; oder auch, sie zerfallen in zwei Schaaren, von denen die eine nur vereinzelte Elemente enthält, während die andere eine continuirliche Schaar ist.

1) Wir erledigen zuerst den Fall, dass jede charakteristische M_q unendlich viele Elemente e_a enthält, die sämmtlich continuirlich an einander liegen. Legen wir in diesem Falle durch ein beliebiges Ele-

ment e_a die hindurchgehende charakteristische M_q, so giebt es unter den benachbarten Elementen $a_1 + dx_1 \cdots a_q + dx_q \cdots$ dieser M_q jedenfalls eines, das selbst ein Element e_a ist, für welches also

$$dx_1 = 0 \cdots dx_q = 0$$

ist. Wir werden zeigen, dass man immer die Constanten $a_1 \cdots a_q$ derart wählen kann, dass solche Gleichungen nicht für alle Werthsysteme $x_{q+1} \cdots x_n\ p_{q+1} \cdots p_n$ bestehen können.

Wir kennen q von einander unabhängige Fortschreitungsrichtungen, $dx_1 \cdots dp_n$, die von einem Elemente einer charakteristischen M_q zu einem benachbarten Elemente derselben M_q führen, diejenigen nämlich, welche den q charakteristischen Streifen der Gleichungen

$$p_k - f_k = 0, \quad (k = 1 \cdots q)$$

entsprechen:

$$dx_1 : \cdots : dx_k : \cdots : dx_q : dx_{q+1} : \cdots : dx_n : dp_1 : \cdots : dp_n =$$
$$0 : \cdots : 1 : \cdots : 0 : -\frac{df_k}{dp_{q+1}} : \cdots : -\frac{df_k}{dp_n} : \frac{df_k}{dx_1} : \cdots : \frac{df_k}{dx_n}.$$

Lässt man daher $\tau_1 \cdots \tau_q$ Parameter bezeichnen, so bestimmen die Gleichungen

$$dx_1 : \cdots : dx_q : dx_{q+1} : \cdots\cdots\cdots : dx_n : \quad dp_1 : \cdots : dp_n =$$
$$\tau_1 : \cdots : \tau_q : -\sum_{k=1}^{k=q} \tau_k \frac{df_k}{dp_{q+1}} : \cdots : -\sum_{k=1}^{k=q} \tau_k \frac{df_k}{dp_n} : \sum_{k=1}^{k=q} \tau_k \frac{df_k}{dx_1} : \cdots : \sum_{k=1}^{k=q} \frac{df_k}{dx_n}$$

die allgemeinste Fortschreitungsrichtung binnen der M_q. Sollen also $dx_1 \cdots dx_q$ verschwinden, so müssen $\tau_1 \cdots \tau_q$ gleich Null sein. Dann aber verschwänden alle übrigen Differentiale dx und dp, vorausgesetzt, dass alle Differentialquotienten der Functionen f_k hinsichtlich der x oder p bestimmte endliche Werthe haben. Der Fall 1 kann somit nur eintreten, wenn eine Grösse der Form

$$\frac{df_k}{dx_i} \quad \frac{df_k}{dp_i}$$

für alle Werthe der Grössen $x_{q+1} \cdots x_n\ p_{q+1} \cdots p_n$ unendlich oder unbestimmt ist. Es ist aber einleuchtend, dass dies nur für Ausnahmswerthe der Constanten $a_1 \cdots a_q$, *die man immer vermeiden kann*, möglich ist.

2) Wir müssen nun die Möglichkeit berücksichtigen, dass die Elemente e_a einer jeden charakteristischen M_q sich in zwei Schaaren ordnen, so zwar, dass die Elemente e_1 der einen Schaar vereinzelt, während die Elemente e_2 der zweiten Schaar continuirlich an einander liegen.

Wäre nun dies der Fall, nicht allein für einige particuläre Werth-

systeme $a_1 \cdots a_q$, die man immer vermeiden könnte, sondern überhaupt für alle Werthsysteme $a_1 \cdots a_q$, so zerfiele das Involutionssystem in zwei solche: I_1 und I_2, indem die Elemente e_1 dem ersten und die Elemente e_2 dem zweiten Involutionssysteme angehörten. Dann aber würde jede charakteristische M_q des Systems I_2 für jedes Werthsystem $a_1 \cdots a_q$ unendlich viele Elemente e_a enthalten, die eine continuirliche Schaar bildeten. Und ein solches Involutionssystem existirt nicht, wie wir bei der Behandlung des Falles 1. nachgewiesen haben.

Hiermit ist unser Satz bewiesen.

18. Wir wählen eine Mannigfaltigkeit

$$x_1 = a_1 \cdots x_q = a_q ,$$

die nur eine discrete Anzahl Elemente mit einer allgemeinen charakteristischen M_q gemein hat, und bezeichnen diese M^{n-q} mit A. Durch A gehen ∞^{q-1} $(n-q+1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeiten, die durch Gleichungen der Form

$$\frac{x_1 - a_1}{\tau_1} = \frac{x_2 - a_2}{\tau_2} = \cdots = \frac{x_q - a_q}{\tau_q}$$

definirt werden, wobei $\tau_1 \cdots \tau_q$ Parameter sind. Als Punktcoordinaten in einer solchen Mannigfaltigkeit, die ich einigemal mit E^{n-q+1} bezeichne, kann man $x_{q+1} \cdots x_n$ zusammen mit einer der Grössen $x_1 \cdots x_q$ wählen. Doch ist es mehr symmetrisch, und ausserdem für meine gleichzeitig synthetische und analytische Behandlung mehr naturgemäss, eine neue Variable x einzuführen, indem man die obenstehenden Gleichungen durch die äquivalenten

$$x_1 - a_1 = \tau_1 x, \quad x_2 - a_2 = \tau_2 x \cdots x_q - a_q = \tau_q x$$

ersetzt, — und sodann die Grössen x, $x_{q+1} \cdots x_n$ als Punktcoordinaten jeder E^{n-q+1} aufzufassen.

Ist insbesondere $n = 3$ und $q = 2$, so ist A eine gerade Linie, die Mannigfaltigkeiten E^{n-q+1} sind Ebenen, die durch diese Gerade gehen, welche also nach gewöhnlicher Sprachweise einen Büschel bilden. Dementsprechend sage ich immer, d. h. welches auch die Zahlen n und q sind, dass die E^{n-q+1}

$$x_1 - a_1 = \tau_1 x, \cdots x_q - a_q = \tau_q x$$

einen *Büschel* bilden, dessen *Axe* A ist.

Satz 28. Die charakteristische M_q des Involutionssystems, die durch einen auf der Axe A gelegenen Punkt allgemeiner Lage

$$x = c, \quad x_{q+1} = c_{q+1} \cdots x_n = c_n$$

gehen, erzeugen eine Integral-M_{n-1} des Involutionssystems. Fasst man die c als Parameter auf, so bilden die betreffenden Integral-M_{n-1} eine vollständige Lösung des Involutionssystems.

Denn die Elemente des Involutionssystems, welche

$$x_1 = a_1 \cdots x_q = a_q$$

befriedigen, lassen sich nicht in continuirliche Schaaren ordnen, die jedesmal einer charakteristischen M_q angehörten.

§ 12.

Reduction eines Involutionssystems auf eine einzige Gleichung.

19. In diesem Paragraphen benutzen wir die Bezeichnungsweise des vorangehenden Paragraphen.

Satz 29. Die Integral-M_{n-1}^{n-1} des Involutionssystems

$$p_1 = f_1 \cdots p_q = f_q$$

schneiden jede Mannigfaltigkeit des Büschels

$$x_1 - a_1 = \tau_1 x, \cdots x_q - a_q = \tau_q x$$

*nach $(n-q)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, die einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x, $x_{q+1} \cdots x_n$ genügen**).

Ehe wir diesen wichtigen Satz beweisen, sprechen wir ihn analytisch aus und formuliren ihn gleichzeitig schärfer. Dabei bemerken wir, dass wir überhaupt im Folgenden diejenige Function, in welche $\varphi(x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n)$ vermöge der Substitution

$$x_1 = a_1 + \tau_1 x, \cdots x_q = a_q + \tau_q x$$

übergeht, mit dem Symbole $\varphi^{(\tau)}$ bezeichnen.

Analytische Form des vorangehenden Satzes: Ist

$$W(x_1 \cdots x_n) = \text{Const.}, \quad p_k = \frac{dW}{dx_k}, \quad (k = 1 \cdots n)$$

irgend eine Integral-M_{n-1}^{n-1} des Involutionssystems

$$p_1 = f_1 \cdots p_q = f_q,$$

so bestimmen die Gleichungen

$$W^{(\tau)} = \text{Const.}, \quad p_k = \frac{dW^{(\tau)}}{dx_k}, \quad (k = 0, \; q+1 \cdots n)$$

eine Integral-M_{n-q}^{n-q} der Gleichung

$$p - \sum_{k=1}^{k=q} \tau_k f_k^{(\tau)} = 0$$

zwischen den unabhängigen Variabeln x, $x_{q+1} \cdots x_n$.

---

*) Dieser Satz lässt sich übrigens auf alle Integral-M_{n-1} ausdehnen.

Da $W = \text{Const.}$ eine Integral-M_{n-1}^{n-1} des Involutionssystems bestimmt, so bestehen für $k = 1 \cdots q$ die Gleichungen

$$\frac{dW}{dx_k} = f_k\left(x_1 \cdots x_n \frac{dW}{dx_{q+1}} \cdots \frac{dW}{dx_n}\right).$$

Auf sie führen wir die Substitution

$$x_1 = a_1 + \tau_1 x, \cdots x_q = a_q + \tau_q x$$

aus und finden so, da

$$\left(\frac{dW}{dx_{q+1}}\right)^\tau = \frac{d}{dx_{q+1}} W^\tau$$

ist, die q Gleichungen

$$\left(\frac{dW}{dx_k}\right)^\tau = f_k\left(a_1 + \tau_1 x, \cdots a_q + \tau_q x,\ x_{q+1} \cdots x_n \frac{dW^\tau}{dx_{q+1}} \cdots \frac{dW^\tau}{dx_n}\right),$$

die durch Multiplication resp. mit τ_k und Addition

$$\sum_1^q{}_k \tau_k \left(\frac{dW}{dx_k}\right)^\tau = \sum_1^q{}_k \tau_k f_k\left(a_1 + \tau_1 x, \cdots \frac{dW^\tau}{dx_n}\right)$$

geben. Nun ist aber

$$\frac{d}{dx} W^\tau = \sum_1^q{}_k \tau_k \left(\frac{dW}{dx_k}\right)^\tau,$$

also kommt

$$\frac{dW^\tau}{dx} = \sum_1^q{}_k \tau_k f_k\left(a_1 + \tau_1 x, \cdots \frac{dW^\tau}{dx_n}\right),$$

welche Gleichung eben sagt, dass die Gleichung

$$W^\tau = \text{Const.}$$

eine Integral-M_{n-q}^{n-q} von $p - \sum_1^q \tau_k f_k^\tau = 0$ bestimmt.

Es ist zu bemerken, dass die Gleichung $p - \sum_k f_k^\tau = 0$ je nach den Werthen der Parameter τ ∞^{q-1} verschiedene Gleichungen repräsentirt.

Satz 30. Die charakteristischen M_q schneiden jede Mannigfaltigkeit des Büschels

$$x_1 - a_1 = \tau_1 x, \cdots x_q - a_q = \tau_q x$$

nach den Charakteristiken der entsprechenden Gleichung $p - \sum \tau_k f_k^\tau = 0$.

Oder analytisch ausgesprochen:

Bilden $2n - 2q - 1$ Functionen $\Pi_1 \cdots \Pi_{2n-2q-1}$ von $x_1 \cdots x_n$ $p_{q+1} \cdots p_n$ ein System von Lösungen der Gleichungen

$$(p_1 - f_1, \Pi) = 0 \cdots (p_q - f_q, \Pi) = 0, \quad \sum p \frac{d\Pi}{dp} = 0$$

so sind die durch die Substitution

$$x_1 = a_1 + \tau_1 x, \cdots x_q = a_q + \tau_q x$$

hervorgehenden Functionen Π^τ *ein System Lösungen von*

$$\left(p - \sum_1^q{}_k \tau_k f_k^\tau, \Pi\right) = 0, \quad \sum p \frac{d\Pi}{dp} = 0.$$

Denn die Gleichungen

$$(p_k - f_k, \Pi) = 0,$$

oder entwickelt

$$\frac{d\Pi}{dx_k} + \sum_{i=q+1}^{i=n} \frac{df_k}{dx_i}\frac{d\Pi}{dp_i} - \frac{df_k}{dp_i}\frac{d\Pi}{dx_i} = 0,$$

gehen durch Ausführung der Substitution

$$x_1 = a_1 + \tau_1 x, \cdots x_q = a_q + \tau_q x,$$

indem man die, für i gleich $q+1 \cdots n$ stattfindenden Relationen

$$\left(\frac{df_k}{dx_i}\right)^\tau = \frac{df_k^\tau}{dx_i}, \quad \left(\frac{d\Pi}{dx_i}\right)^\tau = \frac{d\Pi^\tau}{dx_i},$$

$$\left(\frac{df_k}{dp_i}\right)^\tau = \frac{df_k^\tau}{dp_i}, \quad \left(\frac{d\Pi}{dp_i}\right)^\tau = \frac{d\Pi^\tau}{dp_i}$$

berücksichtigt, in

$$\left(\frac{d\Pi}{dx_k}\right)^\tau = \sum_{i=q+1}^{i=n} \frac{df_k^\tau}{dx_i}\frac{d\Pi^\tau}{dp_i} - \frac{df_k^\tau}{dp_i}\frac{d\Pi^\tau}{dx_i} = (f_k^\tau, \Pi^\tau)$$

über. Multiplicirt man hier mit τ_k und addirt die q zu $k = 1 \cdots q$ entsprechenden Gleichungen, so findet man

$$\sum_{k=1}^{k=q} \tau_k \left(\frac{d\Pi}{dx_k}\right)^\tau = (\tau_1 f_1^\tau + \cdots + \tau_q f_q^\tau, \Pi^\tau),$$

woraus wegen

$$\frac{d\Pi^\tau}{dx} = \sum_{k=1}^{k=q} \tau_k \left(\frac{d\Pi}{dx_k}\right)^\tau$$

folgt

$$\frac{d\Pi^\tau}{dx} = (\tau_1 f_1^\tau + \cdots + \tau_q f_q^\tau, \Pi^\tau),$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$\left(p - \sum \tau_k f_k^\tau, \Pi^\tau\right) = 0.$$

Bemerkt man endlich, dass die Π^τ wie die Π von nullter Ordnung hinsichtlich der p sind, so folgt, dass die Π^τ Lösungen des vollständigen Systems

$$\left(p - \sum_1^q \tau_k f_k^\tau, \Pi\right) = 0, \quad p\,\frac{d\Pi}{dp} = 0$$

sind; es bleibt noch nachzuweisen, dass sie von einander unabhängig sind, d. h. dass keine Relation der Form

$$\Omega\left(\Pi_1^\tau \cdots \Pi_{2n-2q-1}^\tau \tau_1 \cdots \tau_q\right) = 0$$

stattfindet. Bestände in der That eine solche, so ergäbe sich durch die Substitution

$$\tau_k = \frac{x_k - a_k}{x}$$

die Identität

$$\Omega\left(\Pi_1 \cdots \Pi_{2n-2q-1} \frac{x_1 - a_1}{x} \cdots \frac{x_q - a_q}{x}\right) = 0$$

woraus bei der Substitution $x = 1$ eine Relation zwischen $\Pi_1 \cdots \Pi_{2n-2q-1}$, $x_1 \cdots x_q$ resultiren würde. Demzufolge würden die Gleichungen

$$\Pi_1 = k_1 \cdots \Pi_{2n-2q-1} = k_{2n-2q-1}, \quad x_1 = a_1 \cdots x_q = a_q$$

für alle Werthsysteme k und a von unendlich vielen Werthsystemen $x_{q+1} \cdots x_n\ p_{q+1} \cdots p_n$ befriedigt werden. Dies steht aber im Widerspruche mit Paragraph 10.; also ist unsere Annahme nicht richtig.

Hiermit ist unser Satz bewiesen.

20. Die Gleichung

$$p - \sum\nolimits_k \tau_k f_k^\tau = 0$$

enthält die Verhältnissgrössen $\tau_1 \cdots \tau_q$ und repräsentirt daher, wie schon bemerkt, je nach den Werthen dieser Parameter ∞^{q-1} verschiedene partielle Differentialgleichungen, deren Charakteristiken beiläufig mit dem gemeinsamen Symbole K bezeichnet werden sollen.

Früher (Satz 30.) sahen wir, dass eine allgemeine charakteristische M^q ∞^{q-1} Charakteristiken K enthält, eine nämlich für jede Gleichung $p - \sum \tau_k f_k^\tau = 0$; und alle diese K gehen, als Durchschnitte der charakteristischen M^q mit den E^{n-q+1} des Büschels durch einen gemeinsamen Punkt p: den Schnittpunkt der M^q mit der Axe aller E^{n-q+1}.

Durch p gehen nun im Allgemeinen ∞^{n-q-1} charakteristische M^q, deren jede ∞^{q-1} Charakteristiken K enthält; und alle diese K erzeugen eo ipso dasselbe Punktgebilde wie die ∞^{n-q-1} charakteristischen M^q, die durch p gehen. Da aber diese K auch als der Inbegriff aller durch p gehenden K definirt werden können, so ist hiermit folgender Satz bewiesen.

Satz 31. Die durch einen Punkt der Axe gehenden Charakteristiken K aller Gleichungen $p - \sum \tau_k f_k^\tau = 0$ erzeugen dasselbe Punkt-

gebilde wie die durch denselben Punkt gehenden charakteristischen M^q des Involutionssystems.

Nun wissen wir aber schon (Satz 28.), dass die durch einen Punkt der Axe gehenden charakteristischen M^q ein Punktgebilde erzeugen, das, als Elementgebilde aufgefasst, eine Integral-M_{n-1} ist, dass ferner der Inbegriff aller in dieser Weise erhaltenen M_{n-1} eine vollständige Lösung ist. Also

Satz 6. Die durch einen Punkt

$$x = c,\ x_{q+1} = c_{q+1} \cdots x_n = c_n$$

allgemeiner Lage auf der Axe gehenden Charakteristiken aller Gleichungen $p - \sum \tau_k f_k^\tau = 0$ *erzeugen ein Punktgebilde, das, als Elementgebilde aufgefasst, eine Integral-M_{n-1} des Involutionssystems ist. Und zwar erhält man hierdurch eine vollständige Lösung mit den Parametern* $c\ c_{q+1} \cdots c_n$.

Endlich werden wir dieses Theorem analytisch aussprechen.

Theorem 8. Soll das Involutionssystem

$$p_1 - f_1 = 0 \cdots p_q - f_q = 0$$

integrirt werden, so wählt man q Constanten $a_1 \cdots a_q$ *nach den Bedingungen des vorangehenden Paragraphen, führt sodann die Functionen* f_k *durch die Substitution*

$$x_k = a_k + \tau_k x$$

in die Functionen f_k^τ *über, und bildet die Gleichung*

$$(\alpha) \qquad p - \sum\nolimits_k \tau_k f_k^\tau = 0$$

zwischen den Variabeln $x\, x_{q+1} \cdots x_n\ p p_{q+1} \cdots p_n$. *Man integrirt diese Gleichung, d. h. man sucht Functionen* Ω *von* $x\, x_{q+1} \cdots x_n\ \frac{p_{q+1}}{p} \cdots \frac{p_n}{p}$, *welche*

$$\left(p - \sum \tau_k f_k^\tau, \Omega\right) = 0$$

geben; bildet sodann eine vollständige Lösung der reducirten Gleichung (α), *indem man zwischen den Gleichungen*

$$\Omega_k(x x_{q+1} \cdots x_n\ p p_{q+1} \cdots p_n) = \Omega_k(c c_{q+1} \cdots c_n\ p_1^0 p_{q+1}^0 \cdots p_n^0)$$

die Grössen $p p_{q+1} \cdots p_n\ p^0 p_{q+1}^0 \cdots p_n^0$ *eliminirt. Macht man endlich in den hierdurch gefundenen Gleichungen der vollständigen Lösung*

$$W_k(x x_{q+1} \cdots x_n\ c c_{q+1} \cdots c_n\ \tau_1 \cdots \tau_q) = 0$$

die Substitution

$$\tau_k = \frac{x_k - a_k}{x},$$

so bestimmen die hervorgehenden Gleichungen, aus denen nicht allein $\tau_1 \cdots \tau_q$, *sondern auch* x *verschwunden ist, eine vollständige Lösung des ursprünglichen Involutionssystems.*

§ 13.

Meine neue Integrationsmethode.

21. Zur Begründung meiner neuen Methode brauche ich nun nur noch zwei Hülfssätze, die Jacobi in allgemeinerer Form ausgesprochen hat.

Satz 32. Es sei $p_1 - f = 0$ *irgend eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die hinsichtlich* p_1 *aufgelöst ist, und* N *eine Function von* $x_1 \cdots x_n \frac{p_2}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$, *die zu* $p_1 - f$ *in Involutionsbeziehung steht:*

$$(p_1 - f, N) = 0.$$

Lassen die beiden Gleichungen $p_1 - f = 0$, $N = a$ *sich hinsichtlich* p_1 *und* p_2 *auflösen, so stehen auch die hervorgehenden Gleichungen*

$$p_1 - f_1 = 0, \quad p_2 - f_2 = 0$$

in Involutionsbeziehung, d. h. es ist $(p_1 - f_1, p_2 - f_2) = 0$.

Da die beiden Gleichungen $N = a$ und $p_2 - f_2 = 0$ äquivalent sind, so ist dies auch mit den entsprechenden Differentialgleichungen

$$\frac{dN}{dx_1} dx_1 + \cdots + \frac{dN}{dx_n} dx_n + \frac{dN}{dp_2} dp_2 + \cdots + \frac{dN}{dp_n} dp_n = 0,$$

$$- \frac{df_2}{dx_1} dx_1 + \cdots - \frac{df_2}{dx_n} dx_n + dp_2 + \cdots - \frac{df_2}{dp_n} dp_n = 0$$

der Fall; folglich sind die entsprechenden Coefficienten proportional. Daher ist die Gleichung

$$(p_1 - f, N) = - \frac{dN}{dx_1} - \sum_2^n \frac{df}{dx_i} \frac{dN}{dp_i} - \frac{df}{dp_i} \frac{dN}{dx_i} = 0$$

mit der folgenden

$$\frac{df_2}{dx_1} - \frac{df}{dx_2} - \frac{df}{dp_2} \frac{df_2}{dx_2} + \sum_3^n \frac{df}{dx_i} \frac{df_2}{dp_i} - \frac{df}{dp_i} \frac{df_2}{dx_i} = 0$$

äquivalent. Nun ist aber

$$- \frac{df}{dx_2} - \frac{df}{dp_2} \frac{df_2}{dx_2} = - \frac{df_1}{dx_2}$$

$$\sum_3^n \frac{df}{dx_i} \frac{df_2}{dp_i} - \frac{df}{dp_i} \frac{df_2}{dx_i} = (f_1 f_2),$$

also kommt

$$\frac{df_2}{dx_1} - \frac{df_1}{dx_2} + (f_1 f_2) = 0 = (p_1 - f_1,\ p_2 - f_2),$$

was zu beweisen war.

Satz 33. Ist $p_1 - f = 0$ eine vorgelegte Gleichung und X eine bekannte Function der x, die zu $p_1 - f_1$ in Involutionsbeziehung steht, so ist es möglich, die Zahl der unabhängigen Variabeln in $p_1 - f_1 = 0$ um eine Einheit zu erniedrigen.

Sei

$$W = \text{Const.}, \quad p_k = \frac{dW}{dx_k}$$

irgend eine Integral-M^{n-1} von $p_1 - f = 0$. Ich führe $(x_1 \cdots x_{n-1} X)$ als neue unabhängige Variable ein und bezeichne die Differentialquotienten von W hinsichtlich dieser Grössen mit

$$p_1' \cdots p_{n-1}' P.$$

Alsdann ist für $k = 1 \cdots n-1$

$$p_k = p_k' + P\frac{dX}{dx_k}, \quad p_n = P\frac{dX}{dx_n}.$$

Also geht $p_1 - f = 0$ durch die Einführung der neuen Variabeln in

$$p_1' + P\frac{dX}{dx_1} - f\left(x_1 \cdots x_n,\ p_2' + P\frac{dX}{dx_2},\ \cdots P\frac{dX}{dx_n}\right) = 0$$

über. Bilde ich nun den Differentialquotient der linken Seite hinsichtlich P, so finde ich

$$\frac{dX}{dx_1} - \frac{df}{dp_2}\frac{dX}{dx_2} - \cdots - \frac{df}{dp_n}\frac{dX}{dx_n},$$

d. h.

$$(X,\ p_1 - f),$$

welche Grösse nach unserer Annahme gleich Null ist. Also kommt P_n gar nicht in der transformirten Gleichung vor.

Hiermit ist unsere Behauptung erwiesen.

Satz 34. Soll eine Gleichung der Form

$$p_1 - f(x_1 \cdots x_n\ p_2 \cdots p_n) = 0$$

integrirt werden, und kennt man irgend eine Function N von $x_1 \cdots x_n$ $\frac{p_2}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$, die zu $p_1 - f$ in Involutionsbeziehung steht, so ist es immer möglich eine Gleichung zwischen $n-1$ Variabeln aufzustellen, deren Integration diejenige von $p_1 - f = 0$ nach sich zieht.

Ist nämlich N eine blosse Function der x, so führt man N zusammen mit $n-1$ der Grössen x als neue Variabeln ein und erhält dadurch nach dem vorangehenden Satze eine Gleichung, die nur noch $n-1$ Differentialquotienten enthält.

Enthält dagegen N einige der Grössen $p_1 \cdots p_n$ etwa p_2, so löst man die Gleichungen $p_1 - f = 0$, $N = a$ hinsichtlich p_2 und p_1 auf. Die hervorgehenden Gleichungen

$$p_1 - f_1 = 0, \quad p_2 - f_2 = 0$$

bilden (Satz 32.) ein Involutionssystem, dessen Integration sich nach Theorem 8. auf diejenige *einer* Gleichung zwischen $n - 1$ Variabeln reduciren lässt. Ist diese neue Gleichung integrirt, so bestimmt man nach der in dem citirten Satze entwickelten Regel eine vollständige Lösung des Involutionssystems; und diese Lösung, die überdies die Constante a enthält, ist eine vollständige Lösung von $p_1 - f = 0$.

Hierauf begründe ich nun die folgende Integrationsmethode.

Theorem 9. Um eine partielle Differentialgleichung zwischen n Variabeln $x_1 \cdots x_n$

$$p_1 - f = 0$$

zu integriren, verfährt man folgendermassen: Man sucht eine Function von $x_1 \cdots x_n \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$, *die der Gleichung*

$$(p_1 - f, N) = 0$$

genügt, und reducirt sodann $p_1 - f = 0$ *nach dem vorangehenden Satze auf eine äquivalente Gleichung zwischen* $n - 1$ *Variabeln* $x_1' \cdots x_{n-1}'$

$$p_1^{(1)} - f^{(1)} = 0 .$$

Sodann sucht man eine Lösung der Gleichung

$$(p_1^{(1)} - f^{(1)}, N) = 0$$

und reducirt darnach in entsprechender Weise $p_1^{(1)} - f^{(1)} = 0$ *auf eine äquivalente Gleichung zwischen* $n - 2$ *Variabeln* $p^{(2)} - f^{(2)} = 0$ *u. s. w. Zuletzt kommt man zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen 2 Variabeln, die man integrirt. Sodann geht man rückwärts und bestimmt successive vermöge ausführbarer Operationen vollständige Lösungen aller Gleichungen* $p^{(k)} - f^{(k)} = 0$ *und findet zuletzt eine vollständige Lösung der ursprünglich vorgelegten Gleichung. — Da nach Theorem 8. ein beliebiges Involutionssystem auf eine äquivalente partielle Differentialgleichung sich reduciren lässt, so ist hiermit zugleich eine allgemeine Integrationsmethode eines beliebigen Involutionssystems begründet.*

Note 1.

Mayer hat zuerst eine stringente Bestimmungsweise der gemeinsamen Integral-M_{n-1}^{n-1} von beliebigen vorgelegten Gleichungen gegeben. Indem ich diese Theorie im Anschluss an das Vorangehende in kurzen Zügen entwickele, habe ich eine kleine neue Bemerkung hinzuzufügen.

Die Sätze 24., 25. gelten eo ipso, wenn die betreffenden Integral-M_{n-1} insbesondere M_{n-1}^{n-1} sind. Darum können wir schliessen (Satz 26.), dass die gemeinsamen Integral-M^{n-1} von beliebigen gegebenen Gleichnngen sich immer als die gemeinsamen Integral-M^{n-1} eines Involutionssystems der Form

$$x_i = f_i(x_{q+1} \cdots x_n), \qquad i = 1 \cdots q,$$

$$p_k = h_k(x_{q+1} \cdots x_n\ p_{q+m+1} \cdots p_n), \quad k = q+1 \cdots q+m+1$$

definiren lassen. Es fragt sich, wie man diese M^{n-1} findet.

Ist $q > 1$, so haben unsere Gleichungen selbstverständlicher Weise keine gemeinsame Integral-M^{n-1}. Ist $q = 0$, so können sie höchstens *eine* solche M^{n-1} haben, nämlich

$$x_1 - f_1(x_2 \cdots x_n) = 0 = W, \quad p_k = \frac{dW}{dx_k}.$$

Ist endlich $q = 0$, so lässt sich zeigen, dass die Gleichungen

$$p_k - h_k = 0$$

vollständige Lösungen der Form

$$\Phi(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_{n-q}) = 0$$

besitzen. Zum Beweise nehmen wir eine Mannigfaltigkeit

$$x_1 = a_1, \cdots x_q = a_q$$

allgemeiner Lage, die bekanntlich (Satz 25.) eine allgemeine charakteristische M^q nur in einem Punkte (oder einigen Punkten) schneidet. Wir betrachten eine in ihr enthaltene Punktmannigfaltigkeit der Gleichungsform

$$x_1 = a_1 \cdots x_q = a_q, \quad x_{q+1} = c_{q+2}\, x_{q+2} + \cdots + c_n x_n,$$

wie auch die zugehörige Elementmannigfaltigkeit. Diejenigen Elemente dieser M_{n-1}, die dem Involutionssysteme $p_k - h_k = 0$ genügen, bilden eine Integral-M_{n-q-1}

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} x_1 = a_1 \cdots x_q = a_q, & x_{q+1} = \sum c_{q+i}\, x_{q+i}, \\ p_1 = h_1 \cdots p_q = h_q, & p_{q+1} = -\,c_{q+i}\, p_{q+1}, \end{cases}$$

und also erzeugen die durch diese Elemente hindurchgehenden cha-

rakteristischen M_q eine Integral-M_{n-1}. Fasst man endlich die c als Parameter auf, so erhält man eine vollständige Lösung; denn jede charakteristische M_q enthält ein Element der Gleichungsform A, und gehört folglich einer unter den gefundenen Integral-M_{n-1} an.

Ich behaupte, dass die erhaltene vollständige Lösung die Form

$$\Phi(x_1 \cdots x_n \; c_{q+1} \cdots c_n) = 0$$

besitzt, dass also die betreffenden M_{n-1}, auch als Punktgebilde betrachtet $(n-1)$-fach ausgedehnt sind.

Man setze voraus, dass unsere M_{n-1} $(n-k)$-fach ausgedehnte Punktgebilde sind und k grösser als 1 ist; dann giebt es in jedem Punkte einer solchen M_{n-1}^{n-k} unendlich viele Elemente, die ihr angehören. Unsere M_{n-1}^{n-k} enthält nun ∞^{n-q-1} Punkte, die den Gleichungen

$$x_1 = a_1 \cdots x_q = a_q$$

genügen; also hat sie noch mehrere Elemente, welche dieselben Gleichungen befriedigen; folglich enthält jede unter den ∞^{n-q-1} charakteristischen M_q, die sie erzeugen, unendlich viele Elemente jener Lage. Hiermit sind wir aber auf Widerspruch geführt, und also u. s. w.

Nachdem wir in dieser Weise eine vollständige Lösung der verlangten Form gefunden haben, bestimmen wir die allgemeinste gemeinsame Integral-M_{n-1}^{n-1} in der gewöhnlichen Weise durch Variation der Constanten.

Endlich möge auch folgender Satz, dessen Beweis in dem Vorangehenden liegt, hier ausgesprochen werden.

Satz. Um alle Integral-M^{n-1} des q-gliedrigen Involutionssystems $p_k - h_k = 0$ zu finden, kann man in folgender Weise verfahren. Man nimmt irgend eine M_{n-1}^{n-q-1}, unter deren Elementen nur ∞^{n-q-1} dem Involutionssysteme genügen. Die diesen Elementen zugehörigen charakteristischen M_q erzeugen, wenn sie überhaupt eine Integral-M_{n-1} bilden, immer eine M_{n-1}^{k-1}.

Note 2.

Wir haben gelehrt, das Involutionssystem

$$p_1 - h_1 = 0 \cdots p_q - h_q = 0$$

auf *eine* äquivalente Gleichung

$$p - \sum_k \tau_k h_k^{\tau} = 0$$

zurückzuführen. Wir werden nun voraussetzen, dass man bei der Integration dieser neuen Gleichung einen Schritt vorwärts gekommen ist, dass man also eine Function Ω von

$$x, x_{q+1} \cdots x_n \; \frac{p_{q+1}}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

gefunden hat, die

$$(p - \sum_k \tau_k h_k^\tau, \Omega) = 0$$

giebt. Wir werden zeigen, dass man dann im Allgemeinen mehrere Lösungen Ω der letzten Gleichung durch ausführbare Operationen finden kann.

Zunächst bemerken wir, dass Ω die Grössen $x, \tau_1, \cdots \tau_q$ nur in den Combinationen $\tau_1 x, \cdots \tau_q x$ enthalten darf. Sind nämlich $W_1 \cdots W_{2n-2q-1}$ ein System Lösungen nullter Ordnung von

$$(p_1 - h_1, W) = 0 \cdots (p_q - h_q, W) = 0,$$

so sind die durch die Substitution

$$x_k = a_k + \tau_k x, \quad (k = 1 \cdots q)$$

hervorgehenden Functionen $W_1^\tau \cdots W_{2n-2q-1}^\tau$ ein System Lösungen nullter Ordnung von

$$\left(p - \sum_k \tau_k h_k^\tau, W\right) = 0,$$

und also ist Ω eine Function von $W_1^\tau \cdots W_{2n-2q-1}^\tau$.

Wir bezeichnen diejenige Function, in welche Ω durch die Substitution

$$\tau_1 x = x_1 - a_1, \cdots \tau_q x = x_q - a_q$$

übergeht, mit W; und führen dann die entsprechende Substitution

$$\tau_1 = \frac{x_1 - a_1}{x} \cdots \tau_q = \frac{x_q - a_q}{x}$$

auf die Gleichung

$$\left(p - \sum_k \tau_k h_k^\tau, \Omega\right) = \frac{d\Omega}{dx} - \sum_k \tau_k \left(h_k^\tau \Omega\right) = 0$$

aus. Hierdurch kommt, da $\frac{d\Omega}{dx}$ durch diese Substitution in

$$\sum_k \frac{x_k - a_k}{x} \frac{dW}{dx_k}$$

übergeht, die Gleichung

$$\sum_k \frac{x_k - a_k}{x} \frac{dW}{dx_k} - \sum \frac{x_k - a_k}{x} (h_k W) = 0,$$

die durch Multiplication mit x die Form

$$\left(W, \sum_k x_k - a_k \cdot p_k - h_k\right) = 0$$

annimmt.

Setzen wir nun in der Jacobi'schen Identität

$$(A(BC)) + (B(CA)) + (C(AB)) = 0,$$

die wir als bekannt voraussetzen,

$$A = \sum_k x_k - a_k \cdot p_k - h_k, \quad B = W, \quad C = x_i - a_i \cdot p_i - h_i,$$

so kommt

$$\left(\sum_k x_k - a_k \cdot p_k - h_k\,(W,\ x_i - a_i \cdot p_i - h_i)\right) = 0.$$

Ist also $(W,\ x_i - a_i \cdot p_i - h_i)$ keine Function von W, so finden wir eine neue Lösung von

$$\left(W,\ \sum_k x_k - a_k \cdot p_k - h_k\right) = 0,$$

und diese Lösung geht durch die Substitution

$$x_1 = a_1 + \tau_1 x, \quad \cdots x_q = a_q + \tau_q x$$

in eine neue Lösung von

$$\left(\Omega,\ p - \sum_k \tau_k h_k^{\tau}\right) = 0$$

über.

Findet man in dieser Weise successive alle Lösungen der letzten Gleichung, so ist hiermit die Gleichung $p - \sum \tau_k h_k^{\tau} = 0$ und also auch das ursprüngliche Involutionssystem integrirt. Findet man alle Lösungen, ausgenommen die letzte, so bestimmt man sie durch die Jacobi'sche Multiplicatortheorie u. s. w.

Entsprechende Bemerkungen lassen sich bekanntlich auf die Mayer'sche Integrationsmethode machen. Darauf gehe ich indess nicht an diesem Orte näher ein. Ich erinnere nur daran, dass ich in meiner letzten Abhandlung in den Math. Annalen gezeigt habe, wie man am besten verfahren muss, wenn man bei der Integration eines Involutionssystems $p_k - h_k = 0$ gleichzeitig mehrere Lösungen der Gleichungen $(p_k - h_k,\ \Omega) = 0$ gefunden hat.

Aus dem Vorangehenden geht insbesondere hervor, dass der sogenannte ungünstigste Fall bei der Jacobi'schen Methode im Gegentheil der allergünstigste ist, insofern er gar keine weiteren Integrationen verlangt.

Note 3.

Stehen q Functionen nullter Ordnung $F_1 \cdots F_q$ von $x_1 \cdots x_n$ $p_1 \cdots p_q$ paarweise in der Beziehung

$$(F_i F_k) = 0,$$

so sagen wir, dass die Gleichungen

$$F_1 = a_1 \cdots F_q = a_q$$

ein q-gliedriges Involutionssystem bilden. Ich werde beweisen, dass diese Gleichungen die grösstmögliche Anzahl gemeinsamer Integral-M_{n-1} besitzen. Dabei benütze ich allerdings einige Sätze, die nicht in dieser Abhandlung bewiesen sind.

Satz. Sind $F_1 \cdots F_q$ Functionen nullter Ordnung, die paarweise in Involutionsbeziehung stehen, so giebt es immer weitere Functionen $F_{q+1} \cdots F_n$ $\Phi_1 \cdots \Phi_n$ bez. nullter und erster Ordnung, die den Relationen

$$(F_i F_k) = (F_i \Phi_k) = (\Phi_i \Phi_k) = 0, \quad (F_i \Phi_i) = 1$$

genügen.

Man findet den Beweis dieses Satzes in Mathematische Annalen Bd. VIII, p. 295.

Satz. Sind $F_1 \cdots F_n$ $\Phi_1 \cdots \Phi_n$ homogene Functionen bez. nullter und erster Ordnung, welche die obenstehenden Gleichungen erfüllen, so besteht die Gleichung

$$\sum \Phi \, dF = \sum p \, dx.$$

Diesen Satz habe ich in meiner soeben citirten Abhandlung bewiesen, indem ich die Clebsch'sche Theorie des Pfaff'schen Problems als bekannt voraussetzte. Einen elementaren Beweis hat Mayer gegeben.

Satz. Sind $F_1 \cdots F_q$ Functionen nullter Ordnung, die paarweise $(F_i F_k) = 0$ geben, so lassen die Elemente des Involutionssystems

$$F_1 = a_1 \cdots F_q = a_q$$

sich zu Integral-M_{n-1} zusammenfassen.

Denn nach den beiden vorangehenden Sätzen giebt es solche weitere Functionen F und Φ, dass die Gleichung

$$\sum p dx = \sum \Phi dF$$

besteht.

Satz. Die Gleichungen eines Involutionssystems lassen sich durch Auflösung auf die Form eines speciellen Involutionssystems

$$x_i - f_i(x_{q+1} \cdots x_n) = 0, \quad p_k - h_k = 0$$

bringen.

Denn die gemeinsamen Integral-M_{n-1} des vorgelegten Involutionssystems befriedigen keine weiteren Gleichungen. — Dieser Satz ist zuerst von Mayer gegeben. Dabei muss ich doch bemerken, dass der folgende Fundamentalsatz, der die Theorie der Involutionssysteme auf ihre einfachste Form bringt, früher von mir ohne Beweis gegeben war (Math. Annalen Bd. VIII, p. 281)*).

Satz. Die Integration eines q-gliedrigen Involutionssystems lässt sich auf diejenige einer einzigen Gleichung zwischen $n-q+1$ Variabeln zurückführen.

Dieser Satz folgt als Corollar aus dem vorangehenden in Verbindung mit Theorem 6. und 7.

In der Abhhndlung „Ueber eine Erweiterung der Lie'schen Integrationsmethode" erledigt Mayer mit seiner gewohnten Eleganz und Stringenz folgendes Problem: Vorgelegt ist ein Involutionssystem

$$F_1 = a_1 \cdots F_{q+m} = a_{q+m},$$

aus dessen Gleichungen sich m Relationen zwischen den x allein herleiten lassen. Es wird vorausgesetzt, dass $F_1 \cdots F_q$ hinsichtlich der p von einander unabhängig sind, und es wird verlangt, die Integration des Systems

$$F_1 = a_1 \cdots F_q = a_q$$

auf diejenige einer einzigen Gleichung zwischen $n - q - m + 1$ Variabeln zurückzuführen.

Ich werde zeigen, dass meine ursprünglichen Theorien sozusagen unmittelbar die Erledigung dieses Problems geben. Allerdings ist Mayer's Behandlung in gewissem Sinne einfacher als die meinige.

Nach meiner Methode verlangt die Integration des Involutionssystems

$$F_1 = a_1 \cdots F_{q+m} = a_{q+m}$$

nur die Integration *einer* Gleichung zwischen $n - q - m + 1$ Variabeln. Ist sie geleistet, so kann man durch ausführbare Operationen weitere Functionen F und Φ finden, welche die Relation

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_n dF_n = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

befriedigen; und dann geben die Gleichungen

$$F_{q+1} = a_{q+1} \cdots F_n = a_n$$

---

*) Auch die ersten Sätze waren früher von mir gegeben.

eine vollständige Lösung des Involutionssystems $F_1 = a_1 \cdots F_q = a_q$. Oder, wenn man will, dann sind

$$F_{q+1} \cdots F_n \; \frac{\Phi_1}{\Phi_n} \cdots \frac{\Phi_{n-1}}{\Phi_n}$$

ein System Lösungen der Gleichungen

$$(F_1 \Psi) = 0, \cdots (F_q \Psi) = 0, \quad \sum p \frac{d\Psi}{dp} = 0,$$

womit die charakteristischen M_q des q-gliedrigen Involutionssystems bestimmt sind.

Christiania, Juni 1875.

Ueber Flächentransformationen.

Von A. V. Bäcklund in Lund.

I.

Im vorigen Jahre hatte ich mir die Frage gestellt, ob es unter den Flächentransformationen eines dreifach ausgedehnten Raumes solche gäbe, für welche nicht Berührung 1. Ordnung, sondern erst Berührung 2. Ordnung, Osculation, die Rolle einer Invariante spielte. Diese Frage habe ich sodann in einem Aufsatze im X. Bande der Jahresschrift der Universität Lund (Sept. 1874) behandelt und bin dabei zu dem Resultate gelangt, dass diejenigen Transformationen, bei denen schon Berührung 1. Ordnung eine invariante Beziehung ist, d. i. die Lie'schen Berührungstransformationen, auch die einzigen sind, die Berührung höherer Ordnungen invariant lassen. Zu derselben Zeit war in dem VIII. Bande der Mathematischen Annalen eine Arbeit von Lie*) erschienen, in der die nämliche Frage nach Osculationstransformationen aufgeworfen ist. Desshalb habe ich es unternehmen wollen, die erwähnte frühere Untersuchung von mir etwas umständlicher darzulegen, sowie einige darin nur angedeutete Punkte näher auszuführen. — Ich fange hier damit an, den Beweis für die Nicht-Existenz einer besonderen Osculationstransformation der ebenen Curven zu geben und werde diesen Beweis erst rein geometrisch, sodann rein analytisch führen (§ 1., 2.). Erst dann gebe ich eine genauere Uebersicht über die weiterhin zu behandelnden Fragestellungen.

§ 1.

Geometrischer Beweis für das Fehlen einer besonderen Osculationstransformation der ebenen Curven.

1. Die Osculationstransformation würde eine jede Curve der Ebene in eine oder einige, nur nicht unendlich viele Curven derselben Ebene, weiterhin je zwei einander osculirende Curven in zwei gleichfalls ein-

*) Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen. Von Sophus Lie. S. 223, Note.

ander osculirende Curven verwandeln. Wenn also auf eine Figur, bestehend aus einer Curve C und zwei einander unendlich benachbarten Curven C' C'', welche C in zwei benachbarten Punkten osculirten, eine Osculationstransformation angewandt würde, so müsste eine neue Figur resultiren, bestehend aus einer Curve Γ, der transformirten von C, und zwei einander benachbarten Curven Γ' Γ'', transformirten Curven von C' C'', — die Γ in zwei benachbarten Punkten osculirten. Weil C' C'' in zwei benachbarten Punkten eine und dieselbe Curve osculirten, so müssten sie sich selbst berühren und aus demselben Grunde müssten auch Γ' Γ'' sich berühren. *So dass eine jede Osculationstransformation die Eigenschaft besitzen müsste, je zwei unendlich benachbarte einander berührende Curven in zwei Curven derselben Art zu verwandeln.*

Diese Eigenschaft kommt aber, *wie ich sogleich zeigen werde*, einzig und allein den Lie'schen Berührungstransformationen zu, und damit ist der Beweis für das Fehlen einer besonderen Osculationstransformation geleistet.

2. Wenn in der Ebene $(x\,y)$ eine Transformation der genannten Art vorhanden ist, die also eine jede Curve der Ebene in eine Curve, je zwei unendlich benachbarte einander berührende Curven in zwei unendlich benachbarte ebenfalls einander berührende Curven überführt, so müssen, wenn $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$ die Parameter irgend eines dreifachen Curvensystems $\psi(x\,y\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3) = 0$ sind, und wenn

$$\varphi(\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3) = 0 \tag{1}$$

die Bedingung dafür ausdrückt, dass zwei benachbarte Curven (λ) $(\lambda+d\lambda)$ sich berühren, die aus den Curven (λ) durch die genannte Transformation hervorgegangenen Curven, oder kürzer, die den Curven (λ) entsprechenden Curven durch eine Gleichung

$$f(x\,y\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3) = 0 \tag{2}$$

repräsentirt sein, welche so beschaffen ist, dass, wenn man $x\,y\,p$ aus dieser Gleichung und aus den drei folgenden:

$$\left\{\begin{array}{c} f'(x) + pf'(y) = 0, \\ \sum \frac{df}{d\lambda}\,d\lambda = 0, \\ \sum \frac{df'(x)}{d\lambda}\,d\lambda + p\sum \frac{df'(y)}{d\lambda}\,d\lambda = 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

eliminirt, man die Gleichung (1) wiederbekommt. Denn dann bildet die letztere Gleichung die Berührungsbedingung für zwei consecutive Curven (λ), sowie für zwei consecutive Curven (2). So dass, wenn zwei unendlich benachbarte Curven (λ) sich berühren, die entsprechenden Curven (2) sich auch berühren müssen.

Wenn umgekehrt irgend zwei dreifache Curvensysteme zu derselben Differentialgleichung als Berührungsbedingung Anlass geben, so wird durch dieselben eine Transformation begründet von genau dem oben angegebenen Charakter.

Gesetzt, es wäre gegeben ein dreifaches Curvensystem, etwa das erste System (λ), so wird man zu einer wesentlichen Beziehung zwischen diesem Systeme und irgend einem anderen (2) in folgender Weise geführt.

Werden die Parameter λ als Punktcoordinaten eines Raumes R_3 mit drei Dimensionen, die Variabeln $x\,y$ als willkürliche Constanten aufgefasst, so stellt die Gleichung (2) ein System von ∞^2 Flächen in R_3 dar; die Gleichung (1) ordnet jedem Punkte des R_3 einen elementaren Complexkegel zu und, weil (1) durch die Gleichungen (3) aus (2) resultirt, müssen je zwei unendlich benachbarte Flächen (2) nach einer Curve sich schneiden, deren sämmtliche Linienelemente $(\lambda\, d\lambda)$ der Gleichung (1) genügen, also elementaren Complexkegeln (1) angehören; oder, in anderen Worten, diese Schnittcurven sollen Curven des Complexes (1) sein. — Durch irgend einen Punkt des R_3 gehen ∞^1 Flächen (2). Ihre Tangentenebenen in dem Punkte werden von einem Kegel umhüllt, der in der Nähe des Punktes mit demjenigen Kegel zusammenfällt, der von den durch den Punkt bestimmten Linienelementen der Schnittcurven je zweier benachbarter der ∞^1 Flächen erzeugt ist. Dies ist aber gerade der vom Punkte ausgehende elementare Complexkegel (1). Folglich wird eine jede der ∞^2 Flächen (2) in einem jeden ihrer Punkte von dem dazu gehörigen Kegel (1) berührt. Also: *die Flächen* (2) *bilden eine Lösung mit zwei willkürlichen Constanten x y derjenigen partiellen Differentialgleichung* 1. *Ordnung, deren elementare Complexkegel durch die Gleichung* (1) *dargestellt sind.*

Nun sollen immer zwei benachbarte Integrale der partiellen Gleichung 1. Ordnung — ich nenne sie kurz $\Phi = 0$ — nach einer Charakteristik dieser Gleichung sich schneiden. Es muss dann die durch die Gleichungen:

$$f = 0, \quad f'(x) + pf'(y) = 0$$

dargestellte Curve eine Charakteristik von $\Phi = 0$ sein, und zwar wird einem jeden Werthsysteme $x\,y\,p$ eine bestimmte Charakteristik entsprechen*). D. h. einfach unendlich vielen Curven (2), die ein ge-

*) Das Resultat dieser Ueberlegung ist einfach folgendes: Eine jede gewöhnliche nicht-lineare Differentialgleichung $\varphi(\lambda\, d\lambda) = 0$ kann in unbegrenzt vielen Weisen durch ∞^3 Curven $\psi(x\,y\,p\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3) = 0$, $\chi(x\,y\,p\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3) = 0$ ersetzt werden, oder es ist, nach Lie, durch $\varphi(\lambda\, d\lambda) = 0$ ein gewisser Curvencomplex be-

meinsames Element xyp besitzen, entsprechen ∞^1 Punkte (λ), die eine Charakteristik von $\Phi = 0$ bilden. — Stellen wir das *Curvensystem* (λ) durch seine Gleichung in Punktcoordinaten $x\ y$ dar:

$$\psi(x\ y\ \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3) = 0\ ; \tag{4}$$

dasselbe wird — wenn $x\ y\ \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ in obiger Weise interpretirt werden — eine Lösung mit $x\ y$ als zwei willkürlichen Constanten von $\Phi = 0$ sein, und einer jeden Schaar Curven λ (d. i. Curven (4)), die in einem und demselben Punkte sich berühren, muss daher eine Charakteristik von $\Phi = 0$ entsprechen. Nun giebt es nicht mehr als ∞^3 Charakteristiken von $\Phi = 0$, so dass im Allgemeinen eine Charakteristik keine Schaar von ∞^1 Charakteristiken umhüllt, und darum müssen umgekehrt den Punkten (λ) einer beliebigen Charakteristik von $\Phi = 0$ einfach unendlich viele Curven (λ), Curven (4), entsprechen, die sich in einem und demselben Punkte berühren. Also, einfach unendlich vielen Curven (2), die sich in einem Punkte berühren, entsprechen einfach unendlich viele Curven (λ), die ebenfalls in einem Punkte sich berühren, — indem den beiden Curvenschaaren dieselbe Charakteristik entspricht.

Hiermit ist bewiesen worden, *dass, wenn zwischen zwei dreifachen Curvensystemen ein Entsprechen etablirt ist, in der Art, dass je zwei benachbarten einander berührenden Curven des einen Systems zwei ebensolche des anderen Systems entsprechen, dann auch allen in einem Punkte sich berührenden Curven des einen Systems ebensolche Curven des andern entsprechen müssen.* Folglich ist die Transformation, die von dem einen zum andern Curvensysteme führt, eine Transformation von Linienelementen (xyp). Sie muss weiterhin je zwei vereinigt liegende Elemente in zwei ebensolche Elemente überführen, denn zwei vereinigt liegende Linienelemente gehören immer einer (reellen oder imaginären) Curve des einen Systems an und die entsprechenden Elemente werden sich an die entsprechende Curve anschliessen. — *Eine jede Transformation der anfangs angegebenen Art ist also eine Lie'sche Berührungstransformation.* W. z. z. w.

---

gründet. Es giebt nun blos ein einziges Curvensystem dieses Complexes, welches durch ein Gleichungssystem der Form:

$$\psi(x\ y\ \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3) = 0\ , \qquad \psi'(x) + p\,\psi'(y) = 0$$

darstellbar ist. Es sind dies die Charakteristiken der mit $\varphi(\lambda\, d\lambda) = 0$ zusammenhängenden partiellen Gleichung 1. Ordnung.

Mag auch bemerkt sein, was aus dem Obigen folgt, dass eine jede gewönliche nicht-lineare Differentialgleichung $\varphi(\lambda\, d\lambda) = 0$ als Bedingung für die Berührung zweier benachbarter Curven eines dreifachen Curvensystems interpretirt werden kann.

§ 2.

Analytischer Beweis desselben Satzes.

3. Da eine jede Curve der Ebene ein Werthsystem $xypp' \cdots$*) besitzt, wodurch sie umgekehrt völlig bestimmt wird, so muss in erster Hand eine jede Curventransformation zweier Räume (xy) (XY) der Ebene, — diese Räume auf einander ausgebreitet gedacht, — eine Transformation von Werthsystemen $xypp' \cdots$ und $XYPP' \cdots$ sein. Insbesondere würde eine Osculationstransformation Werthsysteme $(xypp')$ in $(XYPP')$ überführen und natürlich alle derartigen einer Curve in (xy) angehörenden Werthsysteme in entsprechende Werthsysteme, die einer Curve in (XY) angehörten, verwandeln. — Eine jede Osculationstransformation würde daher durch Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} x &= F\ (XYPP'), \\ y &= F_1\ (\quad\quad), \\ p &= \Phi_1\ (\quad\quad), \\ p' &= \Phi_2\ (\quad\quad)\ . \end{aligned}$$

definirt sein, wo die $F \cdots \Phi_2$ so zu bestimmen wären, dass immer das Gleichungssystem

(a) $$dy - p\,dx = 0\,, \quad dp - p'\,dx = 0$$

in das ähnliche System

(b) $$dY - P\,dX = 0\,, \quad dP - P'\,dX = 0$$

überginge. Denn dies ist die analytische Bedingung dafür, dass, wenn zwei benachbarte Elemente $(x \cdot\cdot p')$ $(x + dx \cdot\cdot p' + dp')$ einer Curve angehören, die entsprechenden Elemente $(X \cdot\cdot P')$ $(X + dX \cdot\cdot P' + dP')$ ebenfalls einer Curve zukommen.

Nun betrachte ich folgende Reihe von ∞^1 consecutiven Elementen $(xypp')$:

$$\begin{aligned} &x_0\ y_0\ p_0\ p', \\ &x_0\ y_0\ p_0\ p' + dp', \\ &x_0\ y_0\ p_0\ p' + 2\,dp', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Es genügen je zwei benachbarte dieser Elemente den Gleichungen (a), — denn nun sind $dx = dy = dp = 0$, — und von den entsprechenden ∞^1 Elementen $(XYPP')$ müssen also je zwei benachbarte den Gleichungen (b) genügen, d. h. diese ∞^1 Elemente werden an eine

*) $p = \frac{dy}{dx}$, $p' = \frac{dp}{dx}$, $\cdots$

Curve sich anschliessen. Durch Elimination von P, P' aus den Gleichungen:

$$x_0 = F\ (XYPP'),$$
$$y_0 = F_1\ (\quad\quad),$$
$$p_0 = \Phi_1\ (\quad\quad)$$

soll selbstverständlich die Gleichung jener *dem Linienelemente* $(x_0\, y_0\, p_0)$ *entsprechenden* Curve, und in ähnlicher Weise die Gleichung einer *dem Linienelemente* (XYP) *entsprechenden* Curve in (xy) erhalten werden. — Oder, wenn aus den Transformationsgleichungen die Grösse P' eliminirt wird, eine jede Osculationstransformation müsste zu zwei Gleichungen führen:

$$(c) \qquad f(xypXYP) = 0, \quad \varphi(xypXYP) = 0,$$

die sowohl in den Variabeln xyp als in den XYP ein gemeinsames Integral besässen. Umgekehrt würden zwei Gleichungen (c), die in der nämlichen Beziehung zu einander ständen, eine Osculationstransformation bestimmen, *vorausgesetzt, dass* die Gleichungen

$$f=0, \quad \varphi=0, \quad \frac{df}{dx}+p\frac{df}{dy}+p'\frac{df}{dp}=0, \quad \frac{df}{dX}+P\frac{df}{dY}+P'\frac{df}{dP}=0^*)$$

für ein jedes beliebiges Werthesystem $(XYPP')$ bez. $(xypp')$ ein Werthesystem $(xypp')$ bez. $(XYPP')$ oder einige solche Werthesysteme ergeben.

Aber ich werde zeigen, dass Gleichungssysteme von der Eigenschaft (c) *nicht zu allen Werthesystemen* $(xypp')$ *der Ebene führen können,* indem jene Gleichungen den dreifach unendlich vielen (XYP) nur zweifach unendlich viele Curven zuordnen, also durch die erwähnte Rechnung nur die ∞^3 Elemente $(xypp')$ dieser Curven zum Vorschein kommen können. Damit ist dann bewiesen, dass keine besondere Osculationstransformation stattfindet.

4. Werden P bez. p aus den Gleichungen (c) eliminirt, so entstehen zwei Gleichungen:

$$(d) \qquad p = f(xyXY), \quad P = \varphi(xyXY),$$

die jene vollständig ersetzen und die sowohl im Raume (xy) wie im Raume (XY) ein gemeinsames Integral besitzen sollen. Nun wird diese Beziehung der Gleichungen (d) zu einander algebraisch durch die Relationen:

---

*) Combinirt, wenn es nöthig wäre, mit den Gleichungen

$$\frac{d\varphi}{dx}+p\frac{d\varphi}{dy}+p'\frac{d\varphi}{dp}=0, \quad \frac{d\varphi}{dX}+P\frac{d\varphi}{dY}+P'\frac{d\varphi}{dP}=0,$$

die, wegen des zwischen f φ geltenden Zusammenhangs, stets mit den obigen Gleichungen vereinbar sind.

$$\frac{d\varphi}{dx} + f\frac{d\varphi}{dy} = 0, \quad \frac{df}{dX} + \varphi\frac{df}{dY} = 0$$

ausgedrückt, woraus durch Elimination von f eine Gleichung zur Bestimmung von φ hervorgeht:

$$\frac{d}{dX}\left(\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{dy}\right) + \varphi\frac{d}{dY}\left(\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{dy}\right) = 0.$$

Dieselbe kann in die Form gebracht werden:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dX} + \varphi\frac{d\varphi}{dY}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{dy}\right)\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{d\varphi}{dX} + \varphi\frac{d\varphi}{dY}\right) = 0;$$

d. h. wenn $\frac{d\varphi}{dx} + p\frac{d\varphi}{dy} = 0$, so muss auch sein:

$$\left(\frac{d}{dx} + p\frac{d}{dy}\right)\left(\frac{d\varphi}{dX} + \varphi\frac{d\varphi}{dY}\right) = 0.$$

Die Differentiale von φ und von $\left(\frac{d\varphi}{dX} + \varphi\frac{d\varphi}{dY}\right)$, beide als Functionen von x, y betrachtet, sollen also gleichzeitig verschwinden, darum

$$\frac{d\varphi}{dX} + \varphi\frac{d\varphi}{dY} = \psi(XY\varphi).$$

Das Integral dieser Gleichung ist von der Form:

$$\text{eine arb. Function von } \left(\Psi_1(XY\varphi)\,\Psi_2(XY\varphi)\,xy\right) = 0.$$

Setzt man hier P statt φ, so hat man die zweite der Gleichungen (d). Sie ist nur zweifach unendlich in Bezug auf XYP, es werden daher den ∞^3 (XYP) nur ∞^2 Curven in (xy) zugeordnet und also giebt es, nach dem eben Auseinandergesetzten, keine besondere Osculationstransformation der Curven einer Ebene. W. z. z. w.

II.

Die Frage liegt nun nahe: In wie weit lassen jene für die Ebene gefundenen Resultate auf Räume mehrerer Dimensionen sich erweitern? Diese Frage werde ich erledigen, indem ich allgemein das Problem der Aufstellung aller derjenigen Transformationen eines Raumes von $n+1$ Dimensionen, die die Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen, die Flächen dieses Raumes, in einander überführen, behandle. — Von derartigen Transformationen ist a priori einleuchtend, dass es derer zwei wesentlich verschiedene Classen geben muss: die eine umfasst diejenigen Transformationen, die eine jede Fläche des einen Gebietes $(zx_1x_2\cdots x_n)$ des Raumes im Allgemeinen in nur eine Fläche (bez. einige Flächen) des anderen Gebietes $(ZX_1X_2\cdots X_n)$ überführen, die zweite Classe dagegen die, welche einer jeden Fläche eines der Gebiete unendlich viele des anderen entsprechen lassen.

Fasse ich wiederum Räume von 2 Dimensionen, Ebenen, in Betracht. — Weil eine jede Curve der Ebene durch ein Werthesystem $(xypp'\cdots)$ völlig bestimmt ist, und weil die Bedingung dafür, dass zwei unendlich benachbarte derartige Werthesysteme einer und derselben Curve angehören, durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt wird:

$$(A) \qquad dy - pdx = 0, \quad dp - p'dx = 0, \cdots$$

so muss eine jede Curventransformation zweier Gebiete (xy), (XY) durch Gleichungen zwischen $xypp'\cdots$, $XYPP'\cdots$, die das Gleichungssystem (A) in das ähnliche System:

$$(B) \qquad dY - PdX = 0, \quad dP - P'dX = 0, \cdots$$

überführen, charakterisirt sein. D. h. um eine Curventransformation aufzustellen, bilde man beliebig zwei Gleichungen:

$$(C) \qquad \begin{cases} X = F\,(xypp'\cdots p^k), \\ Y = F_1\,(xypp'\cdots p^l), \end{cases}$$

und leite aus ihnen, indem man der oben gestellten Bedingung von dem gleichzeitigen Bestehen der Gleichungssysteme (A), (B) genügt, die folgenden Gleichungen her:

$$(D) \qquad \begin{cases} P = \Phi\,(xypp'\cdots), \\ P' = \Phi_1(\quad\quad), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Im Allgemeinen wird es dann geschehen, dass die Gleichungen (C), (D) nach $xypp'\cdots$ sich nicht auflösen lassen, — dann gehört die Transformation der oben erwähnten zweiten Classe zu, sie wird eine *mehrdeutige* Transformation sein. Zwar wird nämlich eine jede Curve in (xy) in nur eine Curve des Gebietes (XY) verwandelt, aber einer Curve des letzten Gebietes entsprechen unendlich viele Curven des ersten, nämlich alle Integrale einer gewissen Differentialgleichung*). — Wenn aber die Gleichungen (C) so gewählt worden wären, dass dieselben mit etwa den k ersten der Gleichungen (D) ein System bildeten, das in Bezug auf $xyp\cdots p^{k-1}$ aufgelöst werden könnte, so dass diese Gleichungen auch in folgender Form darstellbar wären:

$$\begin{aligned} x &= f\,(XYP\cdots), \\ y &= f_1(\quad\quad), \\ p &= \varphi(\quad\quad), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

*) Oder möglicherweise eines Systems von mehreren Differentialgleichungen.

so würde die Transformation zu der ersten der obigen Classen gehören, sie würde eine *eindeutige* (d. h. endlich-deutige) Transformation sein. Denn in erster Linie würde sie eine Transformation von gleichnamigen Curvenstücken $(xyp \cdots p^{k-1})$ und $(XYP \cdots P^{k-1})$ sein, und weiter würden solchen Stücken $(xyp \cdots p^{k-1})$, die zu einer Curve sich vereinigen, gleichnamige Stücke entsprechen, die ebenfalls zu einer Curve sich vereinigen.

Hinsichtlich der Transformationen dieser Classe besteht der Satz, dass sie ausschliessend Berührungstransformationen sind, wie diese von Herrn Lie definirt werden. Alle eindeutigen Curventransformationen sind also Transformationen von (xyp) in (XYP). Es ist schon bewiesen worden, dass keine anderen Curventransformationen von $(xypp')$ an $(XYPP')$ existiren; im folgenden Paragraphen soll gezeigt werden, dass auch keine besonderen Berührungstransformationen höherer Ordnungen stattfinden.

Gehen wir zu Räumen mit einer beliebigen Zahl, $n+1$, Dimensionen über. Um in allgemeinster Weise eine Transformation zu bilden, die aus allen Flächen (M_n) wiederum Flächen macht, darf man beliebig $n+1$ Gleichungen:

$$(C') \quad \left\{ \begin{array}{l} Z = F\,(z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n p_{11} p_{12} \cdots p_{nn} \cdots p_{klm} \cdots), \\ X_1 = F_1\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad), \\ \cdots\cdots\cdots\

rakters der letzteren Transformationen in einem Aufsatze in der Jahresschrift der Universität Lund für zwei und für drei Dimensionen geleistet. Gleichzeitig hatte Lie in einer Abhandlung in den Mathematischen Annalen dieselbe Frage aufgeworfen und dazu die andere gefügt, ob partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung Umformungen gestatten, die keine Berührungstransformationen sind. Der in meinem früheren Aufsatze geführte Beweis für die Nicht-Existenz von Berührungstransformationen höherer Ordnung, welche sich auf die Gesammtheit aller Flächen beziehen, zeigte sogleich, wie auch Lie brieflich mir mittheilte, dass keine derartigen für den Inbegriff der Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung geltenden Transformationen stattfinden könnten; in dem gegenwärtigen Aufsatze habe ich dies als Corollar eines meiner früheren Sätze hingestellt.

In dem 5. Paragraphen werde ich eine aus den Auseinandersetzungen der vorangehenden Paragraphen herfliessende Abbildung einer partiellen Gleichung 1. Ordnung eines Raumes mit $n + 1$ Dimensionen auf einen Raum mit n Dimensionen erwähnen, um daraus einen Schluss hinsichtlich der Transformation von Gleichungen 1. Ordnung zu ziehen.

Es wird eine solche Abbildung schon durch eine Berührungstransformation begründet, und sie ist auch von Lie, wie ich aus einer Bemerkung in seiner Abhandlung „Allgemeine Theorie partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung“ Abh. der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania für 1874, S. 218, schliessen muss, bei seinen synthetischen Untersuchungen zur Hülfe genommen worden.

Zum Schlusse finden sich einige kurze Bemerkungen über eine Classe mehrdeutiger Transformationen des Raumes von drei Dimensionen.

Uebrigens muss ich hier bemerken, wie auch in meinem früheren Aufsatze geschehen ist, dass ich im Sommer des vorigen Jahres mit Herrn Felix Klein in München insbesondere über die Frage nach Osculationstransformationen der Ebene im Gespräche gewesen bin, und dass, wenn auch bei diesen Unterhaltungen die Aufgabe nicht erledigt wurde, doch die Lösung derselben durch einige von ihm aufgeworfene neue Gesichtspunkte, unter denen sich die Frage betrachten liesse, wesentlich gefördert worden ist.

§ 3.

Ueber die eindeutigen Transformationen der ebenen Curven.

5. Ich nehme zunächst die Betrachtungen der zweiten Nummer in einer etwas erweiterten Form wieder auf. — Statt eines dreifachen

Curvensystems (4) behandle ich ein System mit $k+1$ willkürlichen Parametern λ:

$$f(xy\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{k+1}) = 0 \tag{5}$$

und wende auf dieses das frühere, in der zweiten Nummer für das System (4) gebrauchte Verfahren an. $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{k+1}$ werden als Punktcoordinaten eines Raumes R_{k+1} mit $k+1$ Dimensionen, $x\,y$ als willkürliche Constanten aufgefasst. Durch Elimination von $x\,y\,p$ aus den Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{c} f=0\,,\quad f'(x)+pf'(y)=0\,, \\ \sum \frac{df}{d\lambda}\,d\lambda = 0\,,\quad \sum \frac{df'(x)}{d\lambda}\,d\lambda + p\sum \frac{df'(y)}{d\lambda}\,d\lambda = 0 \end{array}\right. \tag{6}$$

resultirt eine Gleichung

$$\psi(\lambda\,d\lambda) = 0\,, \tag{7}$$

die nun die Bedingung für die Berührung zweier benachbarter Curven λ, Curven (5), ist.

Von dieser Gleichung mag vor Allem Folgendes bemerkt sein. Man erkennt aus den Gleichungen (6), wenn man $xyp\lambda$ constant setzt, — dann die Werthe von λ so gewählt, dass den zwei ersten der Gleichungen (6) Genüge geleistet wird, — dass einem jeden solchen Werthesysteme ∞^{k-2} Werthe von $\frac{d\lambda_i}{d\lambda_{k+1}}$ entsprechen. Und zwar sind diese Werthe der Form:

$$d\lambda_i = \alpha_1\,d\lambda_i^{(1)} + \alpha_2\,d\lambda_i^{(2)} + \cdots + \alpha_{k-1}\,d\lambda_i^{(k-1)},$$
$$(i = 1\ 2\cdots k+1),$$

wo die α beliebig zu nehmen sind. — Die Strahlen des irgend einem Punkte (λ) zugehörenden Kegels $\psi = 0$ ordnen sich darum zu einfach unendlich vielen ebenen Büscheln von $k-2$ Dimensionen zusammen, und der Kegel selbst soll daher in Ebenencoordinaten durch $k-1$ Gleichungen repräsentirt sein. Seien

$$\left\{\begin{array}{l} \psi_1\,(\lambda_1\cdots\lambda_{k+1}\ \pi_1\cdots\pi_{k+1}) = 0\,, \\ \psi_2\,(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_{k-1}(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{array}\right. \tag{8}$$

diese $k-1$ Gleichungen, homogen in Bezug auf π. Es wird dann zunächst die Berührungsbedingung (7) durch dieses System von partiellen Gleichungen 1. Ordnung im R_{k+1} zu ersetzen sein. Hiermit ist aber jene Gleichung (7) noch nicht vollständig charakterisirt. Es gilt nämlich weiter, dass die Flächenelemente $(\lambda\pi)$ der Mannigfaltigkeiten (5), — M_k im Raume R_{k+1}, — den Gleichungen (8) genügen,

dass also die Gleichungen (8) das Mannigfaltigkeitssystem (5) als eine gemeinsame Lösung mit zwei willkürlichen Constanten x y besitzen.

Umgekehrt wird auch jedes System $k-1$ partieller Gleichungen 1. Ordnung in R_{k+1}, das eine gemeinsame Lösung mit zwei willkürlichen Constanten gestattet, zu einer Gleichung $\psi(\lambda\, d\lambda)=0$ führen, welche als Berührungsbedingung zweier benachbarter Curven eines $k+1$-fachen Systems

$$f(xy\lambda_1\cdots\lambda_{k+1})=0$$

gedeutet werden kann. Und die Gleichung eines jeden solchen Curvensystems wird, wenn x y bloss als willkürliche Constanten betrachtet werden, stets eine gemeinsame vollständige Lösung des Systems der partiellen Differentialgleichungen darstellen.

Durch die hieraus fliessende Abbildung des Gleichungssystems (8) auf die Ebene wird einem jeden Linienelement (xyp) der Ebene eine charakteristische M_{k-1}, Schnittmannigfaltigkeit von $k-1$ Dimensionen zweier unendlich benachbarter Integral-M_k, einem jeden Elemente $(xypp')$ eine charakteristische M_{k-2}, der Schnitt dreier consecutiver Integral-M_k, entsprechen, u. s. w. Den Punkten einer charakteristischen M_{k-1} entsprechen somit diejenigen Curven (5), die sich in einem Punkte berühren, den Punkten einer charakteristischen M_{k-2} diejenigen (5), die sich in einem Punkte osculiren, u. s. w.

Und weiter, was hier besonders hervorgehoben sein möge, wenn zwischen zwei $k+1$-fachen Curvensystemen:

$$f(xy\lambda_1\cdots\lambda_{k+1})=0,$$
$$\varphi(\qquad\qquad)=0,$$

eine solche Correspondenz feststeht, dass je zwei benachbarten einander berührenden Curven des einen Systems zwei benachbarte ebenfalls einander berührende Curven des anderen Systems entsprechen, dann müssen allen Curven $f=0$, die sich in einem Punkte berühren, Curven $\varphi=0$ entsprechen von genau derselben Eigenschaft. Denn beide Curvensysteme geben zu demselben Systeme partieller Differentialgleichungen (8) Anlass und den beiden Schaaren von in einem Punkte sich berührenden $f=0$ bez. $\varphi=0$ entspricht eine und dieselbe charakteristische M_{k-1}. Was darauf hinauskommt, dass für alle Transformationen der Ebene, bei denen zwei benachbarte einander berührende Curven in ähnliche Curven verwandelt werden, die Berührung 1. Ordnung eine invariante Beziehung sein muss; also, alle jene Transformationen sind Lie'sche Berührungstransformationen. — Wie nun schon in der zweiten Nummer erwiesen war.

6. Eine Curventransformation, die Berührung 2. Ordnung unverändert lässt, ist, wie schon gezeigt, eine gewöhnliche Berührungs-

transformation; eine Transformation, die Berührung 3. Ordnung unverändert lässt, würde je zwei benachbarte mit einander eine Berührung der 2. Ordnung eingehende Curven in zwei ähnliche Curven verwandeln; oder, auch sie sollte, behaupte ich, eine Transformation der früher in der vorangehenden Nummer erörterten Classe sein, die zwei benachbarte, eine Berührung der 1. Ordnung eingehende Curven in ähnliche verwandelt. Wenn nämlich $C'C''$ irgend zwei unendlich benachbarte eine Berührung der 1. Ordnung besitzende Curven bezeichnen, so kann immer eine C gelegt werden, die $C'C''$ unendlich benachbart ist und die in zwei dem Berührungspunkte dieser Curven benachbarten Punkten dieselben osculirt. Eine jede Transformation der genannten Art wird $C'C''C$ in $\Gamma'\Gamma''\Gamma$ umformen, und von diesen Curven soll die letztere die beiden ersteren in zwei benachbarten Punkten osculiren. Weil aber $\Gamma'\Gamma''$ eine und dieselbe Curve Γ in zwei benachbarten Punkten osculiren, gehen sie mit einander selbst eine Berührung der 1. Ordnung ein. Also werden hierbei irgend zwei benachbarte einander berührende Curven $C'C''$ in zwei ähnliche $\Gamma'\Gamma''$ übergeführt, — wie behauptet war.

Von einer Transformation der letzten Art ist aber schon gezeigt worden, dass sie eine Lie'sche Berührungstransformation ist. Darum giebt es keine andere Transformation, bei welcher Berührung 3. Ordnung eine invariante Beziehung ist.

In derselben Weise folgt, dass keine besondere Berührungstransformation 4., 5. · · Ordnung existirt. Es muss aber, wie oben bewiesen wurde, eine jede eindeutige Curventransformation eine Transformation von gleichnamigen Curvenstücken $(xyp \cdot \cdot p^k)$ $(XYP \cdot \cdot P^k)$, also entweder eine Berührungstransformation 1. oder 2. oder 3., 4. · · · Ordnung sein. Also schliesslich: *eine jede eindeutige Transformation der Curven einer Ebene muss eine Lie'sche Berührungstransformation sein.*

§ 4.

Ueber Transformationen von Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen, M_n, eines Raumes von $n+1$ Dimensionen.

7. Erstens bemerke ich, dass, wenn eine Fläche, eine M_n, mit zwei einander unendlich benachbarten Flächen in zwei unendlich benachbarten Punkten pp' eine Berührung der r^{ten} Ordnung eingehen soll, so müssen die beiden letzteren Flächen im Punkte p' eine Berührung von der $r-1^{\text{ten}}$ Ordnung besitzen. Und umgekehrt, wenn zwei unendlich benachbarte Flächen eine Berührung der $r-1^{\text{ten}}$ Ordnung besitzen, so ist es in unbegrenzt vielen Weisen möglich, Flächen zu construiren, die mit denselben in der Nähe des Berührungspunktes eine Berührung der r^{ten} Ordnung eingehen. Eine jede Flächentrans-

formation, die Flächen, welche mit einander eine Berührung der 2. Ordnung eingehen, in ebensolche überführt, wird daher je zwei unendlich benachbarte mit einander eine Berührung der 1. Ordnung besitzende Flächen in zwei derartige Flächen verwandeln; und aus dem nämlichen Grunde muss eine Transformation, bei welcher Berührung 3. Ordnung invariant bleibt, je zwei unendlich benachbarte Flächen, die eine Berührung der 2. Ordnung besitzen, in zwei unendlich benachbarte ebenfalls eine Berührung der 2. Ordnung besitzende Flächen verwandeln. Durch Wiederholung des in der vorangehenden Nummer geführten Raisonnements, — durch Construction einer Fläche C, die mit zwei beliebigen einander benachbarten in einem Punkte eine Berührung der 1. Ordnung besitzenden Flächen $C'\,C''$ in dem Berührungspunkte benachbarten Punkten eine Berührung der 2. Ordnung eingeht und die selbst diesem Flächenpaare $C'C''$ unendlich benachbart ist, — sieht man, dass auch diese Transformation je zwei unendlich benachbarte einander berührende Flächen in zwei Flächen von genau derselben Eigenschaft verwandeln muss. U. s. w. So dass schliesslich eine jede Flächentransformation, für welche Berührung gewisser Ordnung erhalten bleibt, von der Eigenschaft sein muss, dass sie je zwei unendlich benachbarte eine Berührung der 1. Ordnung besitzende Flächen in ähnliche Flächen umformt. Nun muss eine jede eindeutige Flächentransformation eine Transformation von gleichnamigen Flächenstücken $(z\,x_k\,p_k\,p_{kl}\cdots)\;(Z\,X_k\,P_k\,P_{kl}\cdots)$, für eine jede derselben also Berührung gewisser Ordnung eine invariante Beziehung sein. Darum, *eine jede eindeutige Flächentransformation muss eine solche Transformation sein, die Berührung* 1. *Ordnung zweier unendlich benachbarter Flächen invariant lässt.*

8. Betrachten wir ein $n+2$-faches Flächensystem, etwa:

$$f(z\,x_1\cdots x_n\;\lambda_1\cdots\lambda_{n+2})=0\,; \tag{9}$$

die Bedingungsgleichung dafür, dass zwei den Parametern $\lambda\;\lambda+d\lambda$ entsprechende Flächen sich berühren, wird durch Elimination von $z\,x\,p$ aus den folgenden $2n+2$ Gleichungen erhalten:

$$\left\{\begin{array}{c} f=0\,,\quad f'(x_k)+p_k f'(z)=0\,,\\ \sum\frac{df}{d\lambda}d\lambda=0,\quad \sum\frac{df'(x_k)}{d\lambda}d\lambda+p_k\sum\frac{df'(z)}{d\lambda}d\lambda=0,\\ (k=1\;2\cdots n)\,, \end{array}\right. \tag{10}$$

die eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$\varphi(\lambda\,d\lambda)=0 \tag{11}$$

als die gesuchte Bedingungsgleichung geben.

Fasst man $z\,x$ als willkürliche Constanten, $\lambda_1\,\lambda_2 \cdots \lambda_{n+2}$ als Punktcoordinaten eines Raumes R_{n+2} auf, so stellt in diesem Raume die Gleichung (11) ein System von elementaren Kegeln und in demselben Raume die Gleichung (9) ein solches $n+1$-faches System von M_{n+1} dar, deren jede (wegen der Gleichungen (10)) in jedem ihrer Punkte von ∞^{n-1} benachbarten M_{n+1} nach einer Mannigfaltigkeit einer Dimension geschnitten wird, deren Linienelemente Strahlen von elementaren Kegeln (11) ausmachen. In Folge hiervon werden die ∞^n durch einen und denselben Punkt (λ) hindurchgehenden Mannigfaltigkeiten (9), vermittelst ihrer Flächenelemente in diesem Punkte, einen Kegel (11) erzeugen. Sei also $\Phi = 0$ die partielle Gleichung 1. Ordnung, deren charakteristische Kegel (oder elementare Complexkegel) durch die Gleichung (11) vorgestellt sind, so erkennen wir, *dass ein jedes Flächensystem* (9), *für welches* $\varphi = 0$ *eine Berührungsbedingung ist, eine vollständige Lösung mit* $n+1$ *willkürlichen Constanten* $z\,x_1 \cdots x_n$ *der partiellen Gleichung* $\Phi = 0$ *bildet.*

Wenn daher die Flächen zweier $n+2$-facher Flächensysteme:

$$(12)\quad f(z\,x_1 \cdots x_n\ \lambda_1 \cdots \lambda_{n+2}) = 0\,, \qquad \varphi(z\,x_1 \cdots x_n\ \lambda_1 \cdots \lambda_{n+2}) = 0$$

in der Art einander zugeordnet sind, dass je zweien Flächen $f(\lambda^{(1)}) = 0$, $f(\lambda^{(1)} + d\lambda) = 0$, die sich berühren, zwei ebenfalls sich berührende Flächen $\psi(\lambda^{(1)}) = 0$, $\psi(\lambda^{(1)} + d\lambda) = 0$ entsprechen, so muss jede der beiden Gleichungen, wenn z, x als Constanten, die λ als Variabeln interpretirt werden, eine vollständige Lösung einer und derselben partiellen Differentialgleichung $\Phi = 0$ sein. Hierbei werden die Parameter λ derjenigen ∞^1 Flächen irgend einer der Lösungen, die sich in einem Punkte berühren, die also ein gemeinsames Werthesystem $(z\,x\,p)$ besitzen, im Raume R_{n+2} Coordinaten für die Punkte einer Charakteristik von $\Phi = 0$, und umgekehrt. So dass die eben beschriebenen Flächensysteme (12), auf Grund der erwähnten gegenseitigen Beziehung derselben, in demjenigen Zusammenhange mit einander stehen müssen, dass, wenn ∞^1 Flächen des einen Systems in einem Punkte sich berühren, die entsprechenden Flächen des anderen Systems ebenfalls in einem Punkte sich berühren. *Desswegen muss das eine Flächensystem aus dem anderen durch eine Lie'sche Berührungstransformation hergeleitet werden können.*

Also, nach dem in der vorigen Nummer Auseinandergesetzten, *eine jede eindeutige Flächentransformation muss eine Lie'sche Berührungstransformation sein.*

9. Von $n+k$-fach unendlich vielen Flächen

$$(13)\qquad f(z\,x_1 \cdots x_n\ \lambda_1 \cdots \lambda_{n+k}) = 0$$

giebt es ∞^{k-1}, die ein gegebenes Element $(z\,x\,p)$ enthalten. Fasst

man $\lambda_1 \cdots \lambda_{n+k}$ als Punktcoordinaten eines Raumes R_{n+k} auf, so wird die Bedingungsgleichung für die Berührung zweier benachbarter Flächen (13) durch eine Differentialgleichung

$$\psi(\lambda\, d\lambda) = 0$$

dargestellt, die ein solches System von $k-1$, in Bezug auf π homogenen, Gleichungen 1. Ordnung in R_{n+k}:

$$(14) \qquad \begin{cases} \Psi_i(\lambda_1 \cdots \lambda_{n+k}\ \pi_1 \cdots \pi_{n+k}) = 0, \\ (i = 1\,2 \cdots k-1) \end{cases}$$

begründet, das eine gemeinsame Lösung mit $n+1$ willkürlichen Constanten gestattet. *Die Gleichung $f=0$, — wo $z\,x$ als willkürliche Constanten fungiren, — sowie ein jedes System von ∞^{n+k} Mannigfaltigkeiten M_n im Raume R_{n+1}, für welches $\psi = 0$ die Berührungsbedingung ausmacht, bildet eine solche gemeinsame Lösung.*

Es wird hierdurch eine Beziehung zwischen dem Raume R_{n+1} und dem von den Elementen $(\lambda\,\pi)$ des Gleichungssystems (14) eingenommenen Raume begründet. Später werde ich hierauf wieder zurückkommen.

10. *Corollar des Satzes der 8. Nummer.* — Von zwei partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung des Raumes R_{n+1}, von denen bekannt ist, erstens, dass jede derselben ein k-faches System von Integral-M_n zulässt $(k > n+2)$ (k so gross, dass die Elemente $(z\,x_k\,p_k\,p_{k_1})$ dieser Integrale alle Elemente der Differentialgleichungen werden), — und zweitens, dass sie nicht durch eine gewöhnliche Berührungstransformation aus einander hergeleitet werden können, gilt es, dass keine Transformation existirt, die alle Integral-M_n der beiden Gleichungen in der Art einander zuordnen, dass dabei Berührung 2. Ordnung erhalten bleibt. Eine solche Transformation würde nämlich je zwei unendlich benachbarte sich berührende Integrale des einen der k-fachen Systeme in zwei ähnliche Integrale eines anderen überführen, und wäre somit, nach der 8. Nummer, eine gewöhnliche Berührungstransformation.

11. Beiläufig will ich auf Folgendes aufmerksam machen. Dass in dem Raume mit drei Dimensionen, dem gewöhnlichen Punktraume, keine besondere Transformation stattfindet, wobei Berührung 2. Ordnung eine invariante Beziehung hat, lässt sich analytisch so ausdrücken: Es giebt kein Gleichungspaar:

$$F(z\,x\,y\,p\,q\,Z\,X\,Y\,P\,Q) = 0,$$
$$\Phi(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0,$$

das in Bezug sowohl auf $z \cdots q$ als $Z \cdots Q$ *fünffach* unendlich ist, und dessen Gleichungen sowohl hinsichtlich $z \cdots q$ als $Z \cdots Q$ als

Variabeln einfach unendlich viele gemeinsame Integrale besitzen. (Vgl. Nr. 4.)

Zwar giebt es unbegrenzt viele Gleichungspaare der *letzteren* Eigenschaft, z. B.:

$$F\left(\varphi\,(zxypq)\;\psi\,(ZXYPQ)\right)=0\,,$$

$$\Phi\left(\varphi\;\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\;\;\psi\;\psi_1\;\psi_2\;\psi_3\;\;\right)=0\,,$$

wo $\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3$ bez. $\psi_1\,\psi_2\,\psi_3$ Integrale der Gleichung $(\varphi,\chi)=0$ bez. $(\psi,\Theta)=0$ sind, aber dieselben begründen nicht eine Transformation aller Flächen des Raumes. So z. B. werden durch die genannten Gleichungen blos die Integrale der Gleichungen $\varphi=C$, $\psi=C$ erhalten.

§ 5.

Einiges von Transformationen partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung.

12. Aus der 8. Nummer folgt, dass eine jede partielle Gleichung $\Phi=0$ erster Ordnung des Raumes R_{n+1}, deren charakteristische Kegel durch eine Gleichung $\varphi(\lambda_1\cdots\lambda_{n+1}\;d\lambda_1\cdots d\lambda_{n+1})=0$ dargestellt sind, vermittelst irgend einer vollständigen Lösung $f(z\,x_1\cdots x_{n-1}\;\lambda_1\cdots\lambda_{n+1})=0$ auf den Raum $R_n(zx_1\cdots x_{n-1})$ abzubilden ist. Einem jeden Flächenelemente dieses Raumes entspricht eine Charakteristik von $\Phi=0$, einer jeden Fläche, M_{n-1} des R_n*), eine Integral-M_n von $\Phi=0$, insbesondere den ∞^{n+1} Flächen $f=0$ die Conoide von $\Phi=0$, d. i. die Integrale, erzeugt von Charakteristiken, die durch einen und denselben Punkt hindurchgehen.

In Folge dieser Abbildung der partiellen Differentialgleichung $\Phi=0$ auf R_n muss die allgemeinste Transformation dieser Gleichung in sich selbst, die so beschaffen ist, dass sie Integrale in Integrale überführt, aus der allgemeinsten Flächentransformation des R_n zu entwickeln sein. Nun ist letztere Transformation, wenn sie einer Fläche immer eine Fläche (nicht ∞ Flächen) zuordnet, nothwendig eine Lie'sche Berührungstransformation. *Dem entsprechend erhalten wir eine Transformation, welche die Charakteristiken der partiellen Gleichung $\Phi=0$ mit einander vertauscht, als die allgemeinste Transformation, die ein Integral der Gleichung wiederum in ein Integral (nicht ∞ Integrale) überführt.*

Zwei partielle Gleichungen 1. Ordnung $\Phi=0$, $\Psi=0$, deren charakteristische Kegel jeder durch eine Gleichung dargestellt sind, beziehen wir auf einen und denselben Raum R_n und dadurch auf einander.

---

*) Sowie einer jeden Mannigfaltigkeit niederer Dimensionen, als Inbegriff von ∞^{n-1} Flächenelementen (zxp) betrachtet.

Die allgemeinste Transformation, die ein Integral der einen Gleichung in ein Integral der anderen überführt, ist eine solche, die die Charakteristiken von $\Phi = 0$ *mit denjenigen von* $\Psi = 0$ *vertauscht.* Sie ist das Bild der Berührungstransformation des R_n.

Ich hatte bei meiner früheren Darstellung diese Transformationen als Lie'sche Berührungstransformationen des Raumes (λ) bezeichnet, deswegen, weil eine jede derselben durch eine Gleichung

$$F(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n+1}\ \Lambda_1 \Lambda_2 \cdots \Lambda_{n+1}) = 0,$$

die die Zuordnung von Conoiden*) der einen Gleichung und Integralen anderer Art der anderen Gleichung bestimmt, ausgedrückt werden könnte. Eine solche Transformation**) umfasst indess nur die Flächenelemente $(\lambda\pi)$ der Gleichungen $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, *keineswegs alle Flächenelemente des* R_{n+1}, *des Raumes* (λ). Transformationen, die alle Elemente des R_{n+1} anbetreffen und die die Integral-M_n von $\Phi = 0$ in diejenigen von $\Psi = 0$ umformen, sind folgenderweise analytisch zu formuliren.

Statt $\lambda_1 \cdots \lambda_{n+1}$, $\Lambda_1 \cdots \Lambda_{n+1}$ als Coordinaten der Punkte zweier Gebiete von R_{n+1} schreibe ich $z x_1 \cdots x_n$, $z' x_1' \cdots x_n'$; weiter nehme ich an, dass Φ_i Ψ_i so bestimmt seien, dass ein jedes der beiden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{ll}
X_1 = \Phi \quad (z x_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n), & X_1 = \Psi \quad (z' x_1' \cdots x_n'\ p_1' \cdots p_n'),\\
X_2 = \Phi_1 \ (\quad\quad\quad\quad\quad\quad), & X_2 = \Psi_1 \ (\quad\quad\quad\quad\quad\quad),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_n = \Phi_{n-1}(\quad\quad\quad\quad\quad\quad), & X_n = \Psi_{n-1}(\quad\quad\quad\quad\quad\quad),\\
Z = \Phi_n \ (\quad\quad\quad\quad\quad\quad); & Z = \Psi_n \ (\quad\quad\quad\quad\quad\quad);\\
P_1 = \Phi_{n+1}(\quad\quad\quad\quad\quad\quad), & P_1 = \Psi_{n+1}(\quad\quad\quad\quad\quad\quad),\\
P_2 = \Phi_{n+2}(\quad\quad\quad\quad\quad\quad), & P_2 = \Psi_{n+2}(\quad\quad\quad\quad\quad\quad),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
P_n = \Phi_{2n} \ (\quad\quad\quad\quad\quad\quad), & P_n = \Psi_{2n} \ (\quad\quad\quad\quad\quad\quad),
\end{array}$$

eine Berührungstransformation des Raumes R_{n+1} begründet. — Die Gleichung $\Phi = 0$ bez. $\Psi = 0$ wird nun, in der oben genannten Weise, durch folgende Gleichungen auf den Raum $R_n : X_1 = 0$ abgebildet:

$$X_2 = \Phi_1 \cdots X_n = \Phi_{n-1}\ Z = \Phi_n\ P_2 = \Phi_{n+2} \cdots P_n = \Phi_{2n},$$

bez.

$$X_2 = \Psi_1 \cdots X_n = \Psi_{n-1}\ Z = \Psi_n\ P_2 = \Psi_{n+2} \cdots P_n = \Psi_{2n}.$$

*) Als Punkte λ aufgefasst.

**) Einige von Lie über diesen Theil meines früheren Aufsatzes gefällte Bemerkungen haben mich dazu veranlasst, die folgenden Entwickelungen dieser Nummer zu geben.

Und die fragliche Transformation von $\Phi = 0$ an $\Psi = 0$ ist also der Form:

(a) $$\begin{cases} \Phi_1 = \Psi_1 \cdots \Phi_n = \Psi_n, \\ \Phi_{n+2} = \Psi_{n+2} \cdots \Phi_{2n} = \Psi_{2n}, \end{cases}$$

(b) eine arbitr. Function von $(z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n;\ z' x_1' \cdots x_n' p_1' \cdots p_n') = 0$,

(c) sammt einer Gleichung zwischen Φ und Ψ, die, wenn Φ gleich Null gesetzt wird, Ψ verschwinden lässt.

Die Zahl der Gleichungen ist $2n+1$ und durch dieselben werden somit $z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ in $z' x_1' \cdots x_n' p_1' \cdots p_n'$ ausgedrückt.

Dies ist im Allgemeinen keine Flächentransformation, keine Lie'sche Berührungstransformation des Raumes R_{n+1}).* Wir sehen dies am einfachsten ein, indem wir für die Gleichung (b) schreiben:

$$\Phi_{n+1} = W(z' x_1' \cdots x_n' p_1' \cdots p_n'),$$

wo (Ψ_1, W) von Null verschieden ist, aber (Φ_1, Φ_{n+1}) gleich Null. Eine Berührungstransformation würde zwei in Involution liegende Functionen Φ_1, Φ_{n+1} in zwei ähnliche Functionen verwandeln, also keineswegs in Ψ_1, W.

Für die Gleichung (c) schreiben wir:

$$\Phi = \Psi,$$

und sehen daraus, *dass eine Schaar von particllen Gleichungen $\Phi = C$ in eine Schaar von Gleichungen $\Psi = C$ durch Transformationen übergeführt werden könne, die keine Berührungstransformationen des R_{n+1} sind, aber doch ein jedes Integral jeder Gleichung $\Phi = C$ in ein Integral der entsprechenden $\Psi = C$ verwandeln.*

13. Die mehrdeutigen Flächentransformationen des R_n sind die Bilder aller der anderen Transformationen, die in der Weise eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung des R_{n+1} in sich selbst resp. eine andere Gleichung derselben Ordnung desselben Raumes überführen, dass aus Integral-M_n immer wiederum Integral-M_n werden. — Eine jede solche Transformation, die zwei Gleichungen 1. Ordnung $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ in einander überführt, lässt einem Integrale der einen Gleichung, z. B. $\Phi = 0$, ein Integral der anderen Gleichung, $\Psi = 0$, dagegen einem Integrale der letzteren unendlich viele Integrale der ersteren entsprechen.

Vorstehendes überträgt sich leichtverständlich auf partielle Gleichungen 1. Ordnung jeder Art des R_{n+1}, da irgend zwei Gleichungen

---

*) Vgl. hierzu einen Ausspruch von Lie in seiner Arbeit: „Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen". Math. Annalen Bd. VIII, S. 223.

1. Ordnung stets durch eine Berührungstransformation in einander übergeführt werden können.

---

14. Ein System von k partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit $n+1$ Variabeln, die eine gemeinsame Lösung mit $n-k+1$ *) willkürlichen Constanten gestatten, wird nach der 9. Nummer durch irgend eine gemeinsame vollständige Lösung:

$$f(z x_1 \cdots x_{n-k}\ \lambda_1 \cdots \lambda_{n+1}) = 0$$

auf den Raum $(z x_1 \cdots x_{n-k})$ von $n-k+1$ Dimensionen in der Art zu beziehen sein, dass einem jeden Flächenelemente dieses R_{n-k+1} eine charakteristische M_k des Gleichungssystems, einer jeden Fläche des R_{n-k+1} (M_{n-k} dieses Raumes) eine Integral-M_n des Systems entspricht. Zwei Gleichungssysteme, deren jedes aus k Gleichungen besteht und jedes ∞^{n-k+1} Integral-M_n besitzt, können auf den Raum R_{n-k+1} abgebildet und damit auf einander selbst bezogen werden. Die allgemeinste Transformation des einen Gleichungssystems in das andere, die eine jede Integral-M_n des einen Systems in eine Integral-M_n des anderen überführt, wird folglich das Bild der allgemeinsten eindeutigen Flächentransformation des Raumes R_{n-k+1} sein. Bei einer jeden derartigen Transformation der Gleichungssysteme in einander geht also eine jede charakteristische M_k des einen Systems in eine charakteristische M_k des anderen über.

15. In dieser Nummer soll insbesondere betrachtet werden ein System von vier partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit sieben Variabeln λ, das ∞^3 Integral-M_6, etwa

$$f(z x y \lambda_1 \cdots \lambda_7) = 0,$$

besitzt.

Dies Gleichungssystem werde auf den Raum R_3 abgebildet. Dabei wird dann einem jeden Flächenelemente $(zxypq)$ eine charakteristische M_4, einem jeden Elemente $(zxypqrst)$ eine charakteristische M_1, der Schnitt von einfach unendlich vielen benachbarten, durch einen und denselben Punkt λ hindurchgehenden charakteristischen M_4, entsprechen.

Einer jeden Fläche des R_3 entspricht eine Integral-M_6 und diese soll eine M_3 (etwa als Cuspidalmannigfaltigkeit) enthalten, welche aus ∞^2 charakteristischen M_1 besteht**).

---

*) $n > k$.

**) Durch jede M_2 kann eine Integral-M_6 gelegt werden, durch eine M_3 blos, wenn dieselbe von ∞^2 Streifen erzeugt ist, die einer charakteristischen M_4 angehören.

Werden aus den ∞^8 Elementen $(zxypqrst)$ des R_3 ∞^7 durch eine Gleichung $F(zxypqrst)=0$ ausgeschieden, so ist dies mit einem Ausscheiden von ∞^7 charakteristischen M_1 identisch. Das Auffinden von Integralflächen der partiellen Gleichung 2. Ordnung $F=0$ und das Auffinden derartiger Integral-M_3 des Gleichungssystems im R_7, deren jede von ∞^2 der ausgeschiedenen charakteristischen Streifen (M_1) erzeugt ist, sind folglich äquivalente Probleme.

§ 6.

Einiges von einer Classe mehrdeutiger Flächentransformationen des Raumes von drei Dimensionen.

16. Wie in der Einleitung gezeigt, ist durch irgend drei Gleichungen:

$$(15)\qquad \begin{cases} X = F\ (zxypq), \\ Y = F_1\ (\quad\ ), \\ Z = F_2\ (\quad\ ) \end{cases}$$

eine Flächentransformation vollständig bestimmt. Sie wird eine eindeutige Transformation, falls, — bei Befriedigung der Bedingung, dass das Gleichungssystem

$$dz = p\,dx + q\,dy,\quad dp = r\,dx + s\,dy,\quad dq = s\,dx + t\,dy, \cdots \text{in inf.}$$

in das ähnliche

$$dZ = P\,dX + Q\,dY,\ dP = R\,dX + S\,dY,$$
$$dQ = S\,dX + T\,dY, \cdots \text{in inf.}$$

transformirt werden soll, — die Grössen P, Q ebenfalls nur $zxypq$, nicht die höheren Differentialquotienten enthalten; andernfalls, wenn man durch die erwähnte Rechnung bekommt:

$$P = \Phi_1\ (zxypqrst),$$
$$Q = \Phi_2\ (\quad\ ),$$

so ist die Transformation (15) eine mehrdeutige Flächentransformation.

Diese Transformation ordnet jedem Punkte (XYZ) eine Schaar von ∞^2 Elementen $(zxypq)$, einem jeden Flächenelemente $(ZXYPQ)$ auf einem jeden der dem Punkte (XYZ) zugehörenden Elemente $(zxypq)$ eine Schaar von ∞^1 Werthesystemen (rst) zu. Eine jede Fläche des Gebiets (xyz) wird in eine Fläche des Gebiets (XYZ), eine jede Fläche des letzteren Gebiets in alle Integrale einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung $f(FF_1F_2)=0$ übergeführt.

Einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung $\varphi(ZXYPQ)=0$

entspricht eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, die ein erstes Integral mit zwei willkürlichen Constanten $\lambda\,\mu$ besitzt:

$$f(FF_1F_2\lambda\mu) = 0\ ^*).$$

Den linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung im Gebiete (XYZ) entsprechen partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung im Gebiete (xyz), die in $rst\ rt-s^2$ linear sind und die ein erstes Integral besitzen von der Form:

$f(FF_1F_2)$ gleich einer willkürlichen Function von $\varphi(FF_1F_2)$.

17. Besonders will ich, wegen ihrer Anwendung auf eine gewisse Classe partieller Gleichungen 2. Ordnung, auf die folgende Transformation aufmerksam machen:

$$(16)\qquad \begin{cases} X = x, \\ Y = y, \\ Z = q. \end{cases}$$

Die übrigen Gleichungen dieser Transformation, die in der angeführten Weise herzuleiten sind, werden:

$$(16')\qquad \begin{cases} P = s, \\ Q = t, \\ R = v, \\ S = w, \\ T = \varpi, \\ \text{u. s. w.} \end{cases} \qquad \left(v = \frac{d^3z}{dx^2\,dy},\quad w = \frac{d^3z}{dx\,dy^2},\quad \varpi = \frac{d^3z}{dy^3}\right)$$

Ich betrachte eine Gleichung 2. Ordnung im Gebiete (xyz), die von $z\,p$ frei ist, also die Form hat:

$$F(xyqrst) = 0,$$

oder, nach r aufgelöst:

$$(17)\qquad r = f(xyqst)\ ^{**}),$$

und bilde die entsprechende Figur des Gebietes (XYZ).

Durch Differentiation der Gleichung (17) in Bezug auf y bekommt man:

$$v = \frac{df}{dy} + t\,\frac{df}{dq} + w\,\frac{df}{ds} + \varpi\,\frac{df}{dt},$$

---

*) Der Transformation (15) wird auch von P. du Bois-Reymond in dessen Arbeit: „Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen" Leipzig 1864, S. 173 erwähnt.

**) In ganz derselben Art lässt sich die Gleichung:

$$r = f(xyqst) + z\varphi(x) + p\psi(x)$$

behandeln.

eine Gleichung, die im (XYZ) auf Grund der Gleichungen (16), (16′) die folgende lineare zum Bilde hat:

$$R - S\frac{df}{dP} - T\frac{df}{dQ} = \frac{df}{dY} + Q\frac{df}{dZ}. \tag{18}$$

Dieselbe wird dann das Bild aller Gleichungen

$$r = f(xyqst) + \text{eine arbiträre } F(x).$$

Einer jeden Fläche des Raumes (XYZ) entsprechen die Integrale einer Gleichung

$$q = F(xy),$$

deren Lösung von der Form ist:

$$z = \varphi(xy) + \Psi(x), \tag{19}$$

wo Ψ eine willkürliche Function bedeutet.

Weil einem jeden Integrale der Gleichung (18) u. A. Integrale der Gleichung (17) entsprechen müssen, so mag, wenn $Z = F(XY)$ eine Integralfläche von (18) bedeutet, die willkürliche Function Ψ in (19) so bestimmt werden können, dass letztere Gleichung ein Integral von (17) darstellt. Und die zur Bestimmung von Ψ dienende Gleichung giebt*) Ψ gleich einer determinirten Function von x: $F(x)$, vermehrt um $cx + c'$, wo c, c' ganz willkürlich sind.

Das Problem der Integration der Gleichung 2. Ordnung (17) *ist hiermit auf das Problem der Integration der linearen Gleichung 2. Ordnung* (18) *zurückgeführt.*

Durch die angewandte Transformation entsprechen irgend zwei Integralen der Gleichung (17), die in einem Punkte eine Berührung der n^{ten} Ordnung eingehen, zwei Integrale der Gleichung (18), die in einem Punkte eine Berührung der $n - 1^{\text{ten}}$ Ordnung besitzen, und demgemäss werden Charakteristiken der Gleichung (17) Charakteristiken der Gleichung (18) entsprechen.

Das hier Auseinandergesetzte bildet eine Erweiterung der bekannten Legendre'schen Theorie**) der Gleichungen

$$F(rst) = 0\text{***}),$$

die $xyzpq$ nicht enthalten. — Um die Legendre'sche Form der entsprechenden linearen Gleichung (18) zu erhalten, würde man sich statt der Transformation (16) einer aus ihr durch eine reciproke Transformation

*) Durch eine zweimalige Quadratur.

**) Vgl. Boole: Differential-Equations, Cambridge 1859, p. 369.

***) Ich bin neuerdings durch Lie auf diese Legendre'sche Theorie aufmerksam gemacht.

$$X' = P, \quad Y' = Q, \quad Z' = PX + QY - Z$$

herzuleitenden:

$$X' = s, \quad Y' = t, \quad Z' = sx + ty - q$$

zu bedienen haben.

Die fragliche Gleichung wird dann

$$R\frac{df}{dY} - S\frac{df}{dX} - T = 0. \; -$$

Die vorangehende Theorie bleibt natürlich im Wesentlichen unverändert, wenn auf die zu Grunde gelegenen Gleichungen (16), (17) eine beliebige Berührungstransformation angewendet wird.

Helsingborg, 18. Juli 1875.

Sur une classe de points singuliers de surfaces.

Par H. G. Zeuthen à Copenhague.

1. Le présent article était originairement destiné à faire partie d'un mémoire, où j'espère de consigner bientôt les résultats que j'ai obtenus par une révision des formules numériques rélatives aux surfaces réciproques, devenue nécessaire pour les raisons que j'ai signalées dans une „Note sur la théorie des surfaces réciproques" (Mathematische Annalen t. IV). Mais comme je me sers, dans la recherche présente, d'autres procédés que dans le mémoire plus étendu, je préfère de la publier ici séparément.

Les points dont nous nous occuperons sont *les points doubles à un seul plan tangent (double), qui est le lieu de droites rencontrant la surface en quatre points coïncidents, et qui, de son côté, n'a qu'un seul point de contact.* À ces points appartiennent les f points doubles de la courbe double de la surface, ses i points d'intersection simples avec la courbe cuspidale, de même que les points doubles de cette dernière courbe, et les points stationnaires des deux courbes qui ne sont pas en même temps points d'intersection*). Le theorème que je démontrerai (voir à la fin du n° 3.), énonce que le plan tangent en un des points singuliers définis ici, a les propriétés réciproques à celles du point. L'article contiendra donc, en particulier, une démonstration directe de l'équation $i' = i$, que j'ai obtenue ailleurs**) d'une manière indirecte. — Le n° 4. contiendra une discussion des branches du lieu des points de contact des plans tangents doubles, et de la courbe parabolique, qui passent par les points singuliers.

2. Dans le cas le plus simple les points définis sont *des points ordinaires de deux nappes distinctes qui y sont tangentes l'une à l'autre.* Alors on peut représenter séparément les deux nappes. Prenons le point singulier pour origine des coordonnées, le plan tangent, pour

*) M. Cayley a tiré mon attention sur ces derniers points.

**) Voir mes deux mémoires au commencement du 4^{me} tome des „Mathematische Annalen".

plan $z = 0$: alors chacune des nappes sera représentée par une équation ponctuelle de la forme:

$$(I) \qquad z = a_0 x^2 + 2 a_1 xy + a_2 y^2 + \cdots.$$

Les coordonnées tangentielles X, Y, U d'un plan tangent quelconque de la surface sont déterminées par les équations

$$X = -\frac{dz}{dx}, \quad Y = -\frac{dz}{dy}, \quad U = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} - z.$$

En un point de la nappe représentée par (I), voisin de l'origine, X, Y U auront les expressions suivantes:

$$(II) \qquad \begin{cases} X = -(2 a_0 x + 2 a_1 y + \cdots), \\ Y = -(2 a_1 x + 2 a_2 y + \cdots), \\ U = a_0 x^2 + 2 a_1 xy + a_2 y^2 + \cdots, \end{cases}$$

d'où

$$(III) \qquad x = \frac{a_2 X - a_1 Y}{2(a_1^2 - a_0 a_2)} + \cdots, \quad y = \frac{-a_1 X + a_0 Y}{2(a_1^2 - a_0 a_2)} + \cdots$$

et

$$(IV) \qquad U = -\frac{a_2 X^2 - 2 a_1 XY + a_0 Y^2}{4(a_1^2 - a_0 a_2)} + \cdots.$$

On a $a_1^2 \gtrless a_0 a_2$, parce que dans le cas de $a_1^2 = a_0 a_2$ le plan tangent, ayant un contact stationnaire avec une des deux nappes, serait plus de double, ce qui serait contraire à la définition dans le n° 1.

On trouve pour l'autre nappe des développements analogues. Nous en désignerons les coëfficients par des lettres accentuées, et les formules qui correspondent à (I) — (IV), par (I′) — (IV′).

En soustrayant l'équation (I′) de (I), ou trouve l'équation ponctuelle de la projection sur le plan $z = 0$ des branches de la courbe double de la surface qui passent par l'origine, et en soustrayant l'équation (IV′) de (IV), on trouve l'équation tangentielle du cône directeur des nappes de l'enveloppe des plans tangents doubles de la surface qui sont tangentes au plan $z = 0$. Nous appellerons cette enveloppe la développable bitangente. Il est évident que les multiplicités du point $x = 0$, $y = 0$ de la projection, et du plan tangent $X = 0$, $Y = 0$ du cône directeur, indiquent des multiplicités réelles, et non seulement apparentes, du point correspondant de la courbe double, et du plan tangent correspondant de la développable bitangente.

Si les termes du second degré en x et y sont différents dans les équations (I) et (I′), la courbe double aura à l'origine un point double ou stationnaire, suivant que

$$(a_1 - a_1')^2 \gtrless (a_0 - a_0')(a_2 - a_2')$$

ou

$$= (a_0 - a_0')(a_2 - a_2').$$

Or ces deux conditions amènent respectivement

$$\left(\frac{a_1}{a_1^2 - a_0 a_2} - \frac{a_1'}{a_1'^2 - a_0' a_2'}\right)^2 \gtrless \left(\frac{a_0}{a_1^2 - a_0 a_2} - \frac{a_0'}{a_1'^2 - a_0' a_2'}\right)\left(\frac{a_2}{a_1^2 - a_0 a_2} - \frac{a_2'}{a_1'^2 - a_0' a_2'}\right)$$

ou

$$= \left(\frac{a_0}{a_1^2 - a_0 a_2} - \frac{a_0'}{a_1'^2 - a_0' a_2'}\right)\left(\frac{a_2}{a_1^2 - a_0 a_2} - \frac{a_2'}{a_1'^2 - a_0' a_2'}\right),$$

ce qu'on voit presque sans calcul dans le cas où l'on a donné aux axes coordonnés une position telle que $a_2 - a_2' = 0$. On voit donc, au moyen des équations (IV) et (IV'), qu'en même temps que le point singulier est un point double ou stationnaire de la courbe double, le plan tangent en ce point sera un plan tangent double ou stationnaire de la développable bitangente. — Dans le dernier de ces deux cas, les indicatrices des deux nappes ont un contact double (voir le n° 4.).

Si les deux nappes ont un contact d'ordre supérieur, la courbe double aura au point de contact un point singulier composé de points doubles et stationnaires. En regardant ce cas comme la limite de celui où ces points sont distincts, on voit que les mêmes nombres de plans tangents doubles et stationnaires de la développable bitangente coïncident avec le plan de contact des deux nappes.

3. Dans le cas où la singularité définie dans le n° 1. est formée d'une seule nappe, on trouve, en plaçant les plans coordonnés de la même manière que dans le n° précédent, de la manière suivante une série exprimant l'ordonnée z d'un point de la surface voisin de l'origine.

En éloignant le facteur constant du terme z^2 de l'équation de la surface, on lui donnera la forme de

$$(V) \qquad z^2 - 2\varphi_2(x, y)\, z + \chi_4(x, y) + \cdots = 0,$$

où φ et χ sont des polynômes homogènes en x et y, dont les degrés sont indiqués par les suffixes*), et où les termes non écrits sont d'un degré supérieur à quatre par rapport à x et y, z étant proportionelle aux carrés de ces quantités. On en déduit le premier terme de la série cherchée qui sera ordonnée suivant des degrés ascendants par rapport à x et y:

$$z = [\varphi_2(x, y) \pm \sqrt{\psi_4(x, y)}] + \cdots,$$

où

$$\psi_4(x, y) = [\varphi_2(x, y)]^2 - \chi_4(x, y).$$

Les termes suivants se déterminent par des équations du premier degré, qu'on obtient par des substitutions successives des termes trouvés dans l'équation (V). Ils seront donc des fonctions rationnelles de x, y et $\sqrt{\psi_4(x, y)}$, et ils auront pour dénominateurs des puissances de cette

*) φ_2 peut s'évanouir identiquement.

racine carrée, qui est, dans toutes les équations du premier degré, facteur du terme cherché.

La dernière circonstance, nous montre que ce développement n'est pas applicable, si

$$\psi_4(x, y) = 0,$$

soit que cette équation a lieu identiquement, soit que $\frac{y}{x}$ en est une racine dont le facteur correspondant de $\psi_4(x, y)$ ne peut être éloigné de tous les dénominateurs de la série. Alors l'équation (V) prendra la forme de

$$[z - \varphi_2(x, y)]^2 + \chi_1(x, y)z^2 + \chi_3(x, y)z + \chi_5(x, y) + \cdots = 0,$$

d'où l'on déduit les deux premiers termes de la série

$$z = \varphi_2(x, y) \pm \sqrt{\psi_5(x, y)} + \cdots,$$

où

$$\psi_5(x, y) = -\chi_1(x, y)[\varphi_2(x, y)]^2 - \chi_3(x, y)\varphi_2(x, y) - \chi_5(x, y).$$

Si $\psi_5(x, y) = 0$, l'équation prendra par la substitution de

$$z - \varphi_2(x, y) = u$$

la forme suivante:

$$u^2 - 2\varphi_3(x, y) \cdot u + \chi_6(x, y) + \cdots = 0,$$

où les termes non écrits sont d'un degré supérieur à six par rapport à x et y, u étant proportionnelle aux cubes de x et y. On en déduit

$$z = \varphi_2(x, y) + [\varphi_3(x, y) \pm \sqrt{\psi_6(x, y)}] + \cdots.$$

Si $\psi_6(x, y) = 0$, la forme de l'équation subira de nouvelles altérations tout-à-fait analogues. — Le premier terme irrationnel étant trouvé, les termes suivants se déterminent par des substitutions successives, comme dans le cas où l'irrationalité se présentait dès le premier terme de la série.

La série aura donc une des formes suivantes

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} z = \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \cdots + [\varphi_p(x, y) \pm \sqrt{\psi_{2p}(x, y)}] + \cdots, \\ z = \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \cdots \pm \sqrt{\psi_{2p+1}(x, y)} + \cdots, \end{cases}$$

les termes suivants étant des fonctions homogènes de x et y de degrés supérieurs à $p + \frac{1}{2}$, composées d'une manière rationnelle de x, y et $\sqrt{\psi(x, y)}$, et n'ayant pour dénominateurs que des puissances de facteurs de $\sqrt{\psi(x, y)}$. Cette série sert à déterminer les points voisins de l'origine, à l'exception de ceux qui correspondent aux racines de l'équation

$$\text{(VII)} \qquad \psi(x, y) = 0$$

qui rendent des dénominateurs de la série égaux à zéro. Ces points seront déterminés par des séries analogues, où ψ est remplacée par

une fonction d'un degré supérieur à $2p$ ou $2p+1$, respectivement.

Si tous les facteurs de $\psi(x,y)$ étaient différents entre eux, toute droite par l'origine serait une tangente, et le point aurait une infinité de plans tangents au lieu du seul que nous lui avons attribué dans la définition du n° 1.*) Il faut, selon cette définition, que toutes les racines de $\psi(x,y)=0$ déterminent des tangentes à la courbe double et cuspidale de la surface, qui sont les seules courbes multiples que nous avons besoin de lui attribuer, les autres, s'il y en a, pouvant se décomposer en branches de ces deux courbes. Les tangentes à la courbe double se déterminent par des racines doubles, les tangentes à la courbe cuspidale, par des racines triples. Si l'on sait qu'un point d'une surface n'a que la singularité définie — mais non pas, si l'on sait seulement que sa représentation analytique a la forme indiquée par les formules (V) et (VI) — les racines doubles et triples détermineront respectivement des tangentes de la courbe double et cuspidale.

Si, pour un des points définis dans le n° 1., la fonction ψ n'est que du 4^{me} degré, il faut que deux branches de la courbe double (du moins deux branches partielles) passent par le point; mais alors deux nappes différentes, qu'on peut représenter séparément, comme dans le n° précédent, passent par le point.

Si le degré de ψ est égal à 5, le point sera un point d'intersection de la courbe double et de la courbe cuspidale; $\psi=0$ aura une racine double et une racine triple.

Si le degré de ψ est égal à 6, les cas suivants sont possibles:

1°. Le point singulier est un point triple de la courbe double; alors la singularité est formée de deux nappes différentes, de façon que nous n'avons pas besoin d'insister ici aux subdivisions qui sont possibles.

2°. Le point singulier est un point double de la courbe cuspidale; alors l'équation $\psi=0$ a deux racines triples.

3°. Le point singulier est un point stationnaire de la courbe cuspidale; alors toutes les six racines de $\psi=0$ sont égales entre elles, et la (première) série (VI) se décompose en deux séries rationnelles, mais non pas entières. L'irrationalité ne se présente que dans la série qui remplace (VI) dans le cas de valeurs de x et y qui satisfont à l'équation $\psi=0$. Aussi dans le cas où le point est un point triple à une seule tangente de la courbe double, les six racines de $\psi=0$

*) Aux points dont la représentation analytique a la même forme, mais qui ne satisfont pas à cette définition plus particulière, appartiennent, par exemple, ceux que M. Cayley a appellés „*close-points*". Dans la représentation de ces points, $\psi(x,y)=0$ a une racine triple et une racine simple.

sont égales entre elles; mais il y a la différence qu'alors, la singularité étant formée de deux nappes distinctes, la série se décompose en deux dont tous les termes sont entiers, et qui sont applicables aussi au cas où x et y satisfont à l'équation $v = 0$ *).

La déduction de l'équation tangentielle se fait de la même manière que dans le n° 2. v étant, dans tous les cas qui ne sont pas déjà discutés dans le n° 2., d'un degré supérieur à quatre, les équations (I. — IV.), où nous n'avons écrit que les premiers termes des séries, seront par cela applicables aussi à la recherche actuelle. Nous compléterons ici ces équations en y écrivant, à côté de leurs premiers termes rationnels, leurs premiers termes irrationnels. Nous y désignerons par p le degré de ce terme dans l'équation I^b) qui remplace la première équation (VI) si p est entier, la seconde, s'il est un multiple impair de $\frac{1}{2}$; (dans ce dernier cas p remplace $\frac{2p+1}{2}$). On aura ainsi les équations suivantes:

(I^b) $$z = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 + \cdots \pm \sqrt{v(x,y)} + \cdots,$$

(II^b)
$$\begin{cases} X = -2(a_0x + a_1y) - \cdots \mp \dfrac{d\sqrt{v(x,y)}}{dx} + \cdots, \\ Y = -2(a_1x + a_2y) + \cdots \mp \dfrac{d\sqrt{v(x,y)}}{dy} + \cdots, \\ U = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 + \cdots \pm (p-1)\sqrt{v(x,y)} + \cdots, \end{cases}$$

(III^b)
$$\begin{cases} x = x_1 + \cdots \pm \dfrac{a_2\dfrac{d\sqrt{v(x_1,y_1)}}{dx_1} - a_1\dfrac{d\sqrt{v(x_1,y_1)}}{dy_1}}{2(a_1^2 - a_0a_2)} + \cdots, \\ y = y_1 + \cdots \pm \dfrac{-a_1\dfrac{d\sqrt{v(x_1,y_1)}}{dx_1} + a_0\dfrac{d\sqrt{v(x_1,y_1)}}{dy_1}}{2(a_1^2 - a_0a_2)} + \cdots, \end{cases}$$

où nous avons introduit les abréviations

$$\frac{a_2X - a_1Y}{2(a_1^2 - a_0a_2)} = x_1, \qquad \frac{-a_1X + a_0Y}{2(a_1^2 - a_0a_2)} = y_1;$$

(IV^b) $$U = a_0x_1^2 + 2a_1x_1y_1 + a_2y_1^2 + \cdots \mp \sqrt{\psi(x_1,y_1)} + \cdots.$$

En y introduisant les expressions de x_1 et y_1, et en revenant aux *deux* formes (VI), on trouve qu'y correspondent les deux formes suivantes de l'équation tangentielle:

*) En général, on peut éloigner les facteurs de $\sqrt{\psi(x,y)}$ qui correspondent aux tangentes de la courbe double des dénominateurs de la série (VI), et cette série sera aussi applicable aux cas où x et y ont des valeurs qui rendent un de ces facteurs égal à zéro; car un point placé en un point de la courbe double sur l'une ou l'autre des deux nappes partielles qui s'y rencontrent, ne se distingue pas des autres points voisins du point singulier.

$$(\text{VIII})\quad \begin{cases} U=\Phi_2(X,Y)+\Phi_3(X,Y)+\cdots+\left[\Phi_p(X,Y)\mp\sqrt{\Psi_{2p}(X,Y)}\right]+\cdots, \\ U=\Phi_2(X,Y)+\Phi_3(X,Y)+\cdots\pm\sqrt{\Psi_{2p+1}(X,Y)}+\cdots, \end{cases}$$

où la quantité $\Psi(X, Y)$ $(=\psi(x_1, y_1))$ est formée de $\psi(x,y)$ par une substitution linéaire, de façon que l'équation

$$(\text{IX})\qquad \Psi(X,Y)=0$$

a les mêmes groupes de racines multiples que $\psi(x, y)=0$.

Le plan tangent au point singulier n'ayant, selon notre définition, que ce seul point de contact, les racines doubles de l'équation (IX) déterminent des génératrices de la développable bitangente, et les racines triples, des génératrices de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, ce qu'on voit en appliquant le principe de dualité à la discussion de la signification des racines de l'équation $\psi(x, y)=0$.

On trouve ainsi que le plan tangent en un point d'intersection simple de la courbe double et de la courbe cuspidale est plan tangent commun à la développable bitangente et à l'enveloppe des plans tangents stationnaires, et que le plan tangent en un point double de la courbe cuspidale, est plan tangent double de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, si, bien entendu, le point est un de ceux dont parle notre définition. À la même condition, le plan tangent en un point stationnaire de la curbe cuspidale sera plan tangent stationnaire de l'enveloppe des plans tangents stationnaires; car il ne peut être plan tangent triple — à une seule génératrice — de la développable bitangente, parce que cette propriété du plan tangent amènerait, selon le n° 2., que le point de contact était point triple — à une seule tangente — de la courbe double.

Si plusieurs points d'intersection de la courbe double avec la courbe cuspidale, ou plusieurs points doubles et stationnaires de ces courbes sont réunis en un de nos points singuliers, on peut regarder ce cas comme la limite de celui où ces points sont distincts.

En résumé, nous avons démontré que *les nombres des points doubles et stationnaires de la courbe double, des points doubles et stationnaires de la courbe cuspidale, et des points d'intersection de ces deux courbes, qui sont réunis en un des points singuliers qui nous occupent, sont égaux, respectivement, aux nombres des plans tangents doubles et stationnaires de la développable bitangente, des plans tangents doubles et stationnaires de l'enveloppe des plans tangents stationnaires de la surface, et des plans tangents communs à ces deux développables, qui coïncident avec le plan tangent au point singulier.*

4. Si, dans le voisinage du point singulier, la surface, ou l'une de ses deux nappes, est représentée par l'équation (I), la conique

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 = 1$$

sera son indicatrice en ce point. On voit sans difficulté que, dans le cas où la singularité est formée de deux nappes ayant *des indicatrices différentes*, les diamètres communs aux deux indicatrices seront tangents aux deux branches de la courbe double, et les diamètres passant par les points de contact des tangentes communes, tangents aux quatre branches de la courbe, lieu des points de contact des plans tangents doubles, qui passent par le point. Les tangentes communes aux indicatrices seront parallèles aux génératrices de la développable bitangente qui passent par le point.

Dans les cas où la singularité est formée, soit de deux nappes représentées par des équations de la forme (I) qui ont les mêmes termes du second ordre, soit d'une seule nappe (n° 3), la surface n'a au point singulier qu'une *seule indicatrice* (double). Celle-ci garde, à côté d'autres propriétés essentielles, la suivante: la tangente à une courbe passant par le point singulier et la génératrice de la développable tangente à la surface le long de cette courbe, seront par rapport à elle des diamètres conjugués. En effet, cette propriété est exprimée par les deux premières équations (II), où x et y(et z) sont les coordonnées d'un point de la surface infiniment voisin du point singulier, X et Y (et U), celles du plan tangent en ce point.

Nous avons vu, dans le n° 3, que l'équation (IX): $\Psi(X, Y) = 0$, qui détermine les génératrices de la développable bitangente et de l'enveloppe des plans tangents stationnaires qui passent par le point singulier, est formée en appliquant à l'équation $\psi(x, y) = 0$, qui détermine les tangentes de la courbe double et cuspidale, la substitution de

$$X = -2(a_0x + a_1y),$$
$$Y = -2(a_1x + 2a_2y).$$

Ces équations étant composées des termes du premier ordre des équations (II), dont nous venons de parler, on voit que, *dans le cas d'une seule indicatrice, chacune des branches de la courbe double qui passent par le point est tangente à deux branches* (partielles ou totales) *du lieu des points de contact des plans tangents doubles, et chacune des branches de la courbe cuspidale est tangente à une branche de la courbe parabolique.*

Selon le principe de dualité, la développable bitangente sera tangente, le long de chacune des génératrices passant par le point singulier, à deux nappes (partielles out otales) de la développable tangente à la surface le long de sa courbe double, et l'enveloppe des plans tangents stationnaires à la développable tangente le long de la courbe cuspidale.

Il n'est pas difficile de déterminer *l'ordre du contact d'une branche*

de la courbe double avec le lieu des points de contact des plans tangents doubles. En effet, cet ordre sera le même que celui des contacts des projections de ces courbes sur le plan xy, et comme — dans le cas où et la branche de la courbe double, et les nappes (partielles ou totales) qui s'y rencontrent, sont réelles — la projection de la courbe double sépare celles des branches (partielles ou totales) du lieu des points de contact, l'ordre cherché sera égal à celui du contact des deux branches de ce dernier lieu entre elles. Il faut donc chercher l'ordre de la distance infiniment petite des points de contact d'un plan tangent double qui fait avec le plan tangent au point singulier un angle infiniment petit du premier ordre. Or, si le plan tangent double a les coordonnées X, Y, U, les coordonnées x et y des points de contact seront égales aux deux valeurs de $-\frac{dU}{dX}$ et de $-\frac{dU}{dY}$. Par conséquent si l'ordre des premiers termes différents des séries*) exprimant les deux valeurs de U en fonction de X et Y — qui est égal à celui des premiers termes différents des séries exprimant z par x et y — est égal à p, l'ordre de la distance $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$ des deux points de contact sera égal à $p-1$. L'ordre du contact cherché est donc égal à $p-2$. Le nombre p est entier ou un multiple de $\frac{1}{2}$.

Si, par exemple, dans le point singulier *une intersection simple* a *lieu entre la courbe double et la courbe cuspidale,* on aura $p=\frac{5}{2}$. La distance des points de contact d'un plan tangent double sera de l'ordre $\frac{3}{2}$, ou bien, *le point singulier sera un point stationnaire du lieu des points de contact des plans tangents doubles, et ce lieu aura en ce point la même tangente que la courbe double.* Si le point est un point triple de la courbe double, ou aura $p=3$, et chacune des trois branches de la courbe double aura des contacts simples avec deux branches distinctes du lieu qui nous occupe.

Les applications du principe de dualité aux règles que nous avons demontrées ici sont très-simples.

La détermination des branches de la courbe parabolique, dont nous aurons à discuter les contacts avec les branches de la courbe cuspidale, se fait ici, où l'on fait usage d'une série servant à exprimer z par x et y, par l'équation

$$\left(\frac{d^2z}{dy\,dx}\right)^2-\frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{d^2z}{dy^2}=0.$$

On trouve dans les cas les plus simples les résultats suivants:

Si le point singulier est un point d'intersection simple de la courbe

*) Les séries sont applicables aux points et plans dont nous nous occupons. Voir la note précédente.

double et de la courbe cuspidale, cette dernière courbe aura un contact simple avec la courbe parabolique.

Si le point est un point double de la courbe cuspidale, chacune des deux branches de cette courbe aura un contact du second ordre avec la courbe parabolique.

Si le point est un point stationnaire de la courbe cuspidale, chacune des deux branches partielles de cette courbe aura avec une branche partielle de la courbe parabolique un contact de l'ordre $\frac{1}{2}$ — c'est à dire qu'à une distance du point singulier qui est infiniment petite du premier ordre, la distance d'une branche de l'une courbe à la branche correspondante de l'autre est de l'ordre $\frac{3}{2}$. Il est évident que les deux branches partielles de la courbe parabolique forment alors, elles-aussi, un point stationnaire.

Pour montrer notre procédé de démonstration, il suffira de l'appliquer à établir *le deuxième de ces théorèmes.*

Soit φ une surface tangente le long de la courbe cuspidale à la surface donnée dont nous cherchons les propriétés en un point double de cette courbe, et ψ une autre surface passant par la même courbe. Alors la surface donnée fera du moins partie d'une surface représentée par une équation de la forme

$$\chi\varphi^2 - \omega\psi^3 = 0,$$

χ et ω étant des surfaces qui ne passent pas par le point singulier.

La surface ψ peut être déterminée ainsi que deux nappes différentes passent, au point singulier, par les deux branches de la courbe cuspidale. Dans la recherche actuelle, nous pourrons même remplacer ces deux nappes par deux surfaces différentes ψ' et ψ''; car on peut toujours en déterminer qui ont avec les nappes de ψ des contacts assez intimes, pour que cette altération n'influe pas aux termes de l'équation dont nous aurons à faire usage. L'équation aura ainsi la forme suivante

$$\chi\varphi^2 - \omega(\psi'\psi'')^3 = 0, \tag{X}$$

ou bien, si l'on prend pour plans coordonnés les plans tangents à ψ', ψ'' et φ, et distingue par un suffixe i, ajouté à la notation d'une fonction, le polynôme du degré i qu'elle contient,

$$(\chi_0+\chi_1+\cdots)(z+\varphi_2+\cdots)^2-(\omega_0+\omega_1+\cdots)(x+\psi_2'+\cdots)^3(y+\psi_2''+\cdots)^3=0 \tag{X'}$$

Si l'on désigne par $-A$ le coefficient de x^2 en ψ_2'', la projection sur le plan $z=0$ de la branche de la courbe cuspidale qui est tangente au plan $y=0$, sera représentée par

$$y = Ax^2 + \cdots$$

Dans la discussion de la branche de la courbe parabolique tangente à celle-ci, il sera commode d'ordonner la série exprimant l'ordonnée z d'un point de la surface par x et y, d'après des puissances ascendantes

de x, y étant regardée comme proportionnelle à x^2. Alors la série aura la forme suivante*)

$$(XI)\quad z = a_0x^2 + (2a_1xy + b_0x^3) + (a_2y^2 + 3b_1x^2y + c_0x^4) + \sqrt{\frac{\omega_0}{\chi_0}}\, x^{\frac{3}{2}}(y - Ax^2)^{\frac{1}{2}} + \cdots,$$

où les termes des degrés 2, 3, 4 sont les mêmes que donnerait l'équation $\varphi = 0$. On en déduit

$$(XII)\quad \left(\frac{d^2z}{dydx}\right)^2 - \frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} = 4(a_1^2 - a_0a_2) - \tfrac{3}{2}a_0\sqrt{\frac{\omega_0}{\chi_0}}\, x^{\frac{3}{2}}(y - Ax^2)^{-\frac{1}{2}} + \cdots,$$

les termes non écrits étant d'un degré supérieur à $\frac{1}{2}$ par rapport à x et $y^{\frac{1}{2}}$.

Les seules puissances à exposants négatifs que contiennent les séries (XI) et (XII) ont pour racines x et $(y - Ax^2)$. On trouve donc, en égalant à zéro la dernière des ces séries, — à côté de $\lim \cdot \frac{x}{y} = 0$, qui correspond à l'autre branche de la courbe parabolique —

$$\lim \frac{y}{x^2} = A,$$

ce qui montre que la branche de la courbe parabolique qui nous occupe a, au moins, un contact du second ordre avec la branche correspondante de la courbe cuspidale.

Pour voir que le contact n'est pas, en général, d'un ordre plus élevé, il faut regarder $y - Ax^2$ comme proportionnelle à x^3. Alors, non seulement les deux termes écrits du second membre de (XII), mais aussi une infinité d'autres deviennent du degré zéro, de façon qu'il faut ordonner les séries d'une autre manière. Désignons par B, C et D les coefficients des termes xy, xz et x^3 de ψ''; alors on peut substituer à la série (XI) une autre contenant, à côté de x et y, des puissances (positives et négatives) de

$$[y - Ax^2 + Bxy + (a_0C + D)x^3],$$

qui est proportionnelle à x^3. Cette nouvelle série commence par les termes

$$z = a_0x^2 + (2a_1xy + b_0x^3) + (a_2y^2 + 3b_1x^2y + c_0x^4) + (3b_2xy^2 + 4c_1x^3y + d_0x^5)$$
$$+ \left(b_3y^3 + 6c_2x^2y^2 + 5d_1x^4y + e_0x^6 + \sqrt{\frac{\omega_0}{\chi_0}}\, x^{\frac{3}{2}}[y - Ax^2 + Bxy + (a_0C + D)x^3]^{\frac{3}{2}}\right) + \cdots$$

On en déduit

$$\left(\frac{d^2z}{dydx}\right)^2 - \frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2}$$
$$= 4(a_1^2 - a_0a_2) - \tfrac{3}{2}a_0\sqrt{\frac{\omega_0}{\chi_0}}\, x^{\frac{3}{2}}[y - Ax^2 + Bxy + (a_0C + D)x^3]^{-\frac{1}{2}} + \cdots,$$

*) a_0, a_1 etc. sont des constants.

où les termes écrits sont du degré 0, les autres, d'un degré positif. En égalant cette série à zéro, on trouve que le coefficient de x^3 dans la série exprimant l'ordonnée y d'un point de la branche de la courbe parabolique qui nous occupe, est égal à

$$\frac{9\,a_0^2\,\omega_0}{64(a_1^2 - a_0 a_2)^2 \chi_0} - AB - a_0 C - D\,.$$

Le coefficient de x^3 dans la série qui exprime l'ordonnée y d'un point de la branche correspondante de la courbe cuspidale est

$$-AB - a_0 C - D\,.$$

Copenhague, 27. août 1875.

Ueber die v. Staudt'schen Würfe.

Von Rud. Sturm in Darmstadt.

Hierzu eine Tafel.

Die interessante und verdienstliche Arbeit des Herrn Lüroth über das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen (Gött. Nachr. 1873 S. 767 und ausführlicher diese Annalen Bd. VIII, S. 145—214) hat mich zu einigen Untersuchungen auf diesem Gebiete veranlasst, die ich mir hier mitzutheilen erlaube.

1. Ich will zunächst andere, mehr geometrische Beweise für *die Associativität der Addition und Multiplication v. Staudt'scher Würfe* geben; da aber die geometrische Construction bei beiden Operationen im Wesentlichen dieselbe ist*), so wird es genügen, die Multiplication zu besprechen.

2. Nehmen wir zuerst an, dass die drei Würfe $ABCD_1 = u_1$, $ABCD_2 = u_2$, $ABCD_3 = u_3$ auf derselben geraden Linie g sich befinden (Fig. 1); so wollen wir also darthun, dass $(u \cdot u_2) \cdot u_3 = (u_1 \cdot u_3) \cdot u_2$ ist.

Wir construiren ein vollständiges Viereck $KLMN$, so dass zwei Gegenseiten KN, LM durch A, C; zwei weitere, LN, KM, durch D_1, D_2 und eine der beiden übrigen, LK, durch B geht (was auf unendlich viele Weisen möglich ist); trifft nun die letzte Seite MN

*) Der Bequemlichkeit halber wiederhole ich hier die Definition der Addition und Multiplication. Wenn die Punkte $ABCD_1D_2S$ derselben Geraden oder demselben Kegelschnitte angehören, so ist $ABCD_1 + ABCD_2 = ABCS$, sobald CC, D_1D_2, AS in Involution sind (v. Staudt Beitr. zur Geom. der Lage — die allein citirt werden — Nr. 258, Lüroth a. a. O. Nr. 57). Ferner ist nach Staudt Nr. 268 $ABCD_1 \cdot AD_1CP = ABCP$; wenn nun $AD_1CP = ABCD_2 = CD_2AB$, so sind AC, D_1D_2, BP in Involution, also kann man das Product zweier Würfe auch so definiren: $ABCD_1 \cdot ABCD_2 = ABCP$, wenn AC, D_1D_2, BP in Involution sind (Hans Pfaff, Neuere Geometrie (1867) I Nr. 217, Lüroth a. a. O. 61.); die Beweise der Associativität der Addition und Multiplication finden sich bei Staudt Nr. 259, 269, bei Lüroth Nr. 59, 62, bei Pfaff Nr. 222, 224; obgleich Pfaff die Würfe als Doppelverhältnisse auffasst, so sind diese seine Beweise doch ganz unabhängig von dieser Auffassung und zeichnen sich durch Einfachheit aus.

die g in P_{12}, so sind AC, D_1D_2, BP_{12} in Involution; also $ABCP_{12} = u_1 \cdot u_2$.

Trifft KD_3 die LC in M', $M'N$ die g in P_{13}; so ist $ABCP_{13} = u_1 \cdot u_3$. Sind noch Q, Q' die Schnittpunkte von KAN mit $L(P_{12}, P_{13})$, so benutze man, um $(u_1 \cdot u_2)u_3$ und $(u_1 \cdot u_3)u_2$ zu construiren, die Vierecke $KLM'Q$ und $KLMQ'$; es kommt darauf an, zu zeigen, dass $M'Q$ und MQ' die g in demselben Punkte treffen. Fasst man aber L, M, M' und N, Q, Q' als entsprechende Punkte zweier projectiver Reihen auf, so erkennt man, dass die drei Punkte $(LQ, MN) = P_{12}$, $(LQ', NM') = P_{13}$ und $(MQ', M'Q) = P$ auf derselben Geraden liegen, derjenigen nämlich, welche die Träger der Reihen in den dem Schnittpunkte entsprechenden Punkten trifft oder welche, wenn wie bei der Addition diese Reihen in perspectiver Lage sind, vom Projectionscentrum durch die Träger harmonisch getrennt ist; also liegt P auf g und $ABCP$ ist sowohl $(u_1u_2)u_3$, als auch $(u_1u_3)u_2$.

Das Viereck $KNMM'$ zeigt, dass auch AC, $P_{12}D_3$, $P_{13}D_2$ in Involution sind, so dass also auch die durch AC, $P_{12}D_3$ bestimmte Involution und die durch AC, $P_{13}D_2$ bestimmte identisch sind, mithin auch die in beiden dem B zugeordneten Punkte; womit von neuem bewiesen, dass $ABCP_{12} \cdot ABCD_3 = ABCP_{13} \cdot ABCD_2$*).

3. Liegen die 3 Würfe auf demselben Kegelschnitte k (Fig. 2.); so seien E_{12}, E_{13} die Schnittpunkte von D_1D_2, D_1D_3 mit AC, P_{13}, P_{23} deren Projectionen aus B auf k; dann ist $ABCP_{12} = u_1u_2$, $ABCP_{13} = u_1u_3$. Das Pascal'sche Sechseck $BP_{13}D_2D_1D_3P_{12}$ beweist, dass D_3P_{12} und D_2P_{13} die AC in demselben Punkte F treffen; ist Q dessen Projection aus B auf k, so ist $ABCQ$ sowohl $(u_1u_2)u_3$, als $(u_1u_3)u_2$.

4. *Die Distributivität der Addition und Multiplication***) lässt sich auf folgende Weise erkennen. Es soll bewiesen werden, dass

$$u_1(u_2 + u_3) = u_1u_2 + u_1u_3.$$

Stellen wir uns die drei Würfe u_1, u_2, u_3, welche von D_1, D_2, D_3 mit ABC gebildet werden, wieder auf einem Kegelschnitte k vor (Fig. 2.); P_{12} und P_{13} seien wie in Nr. 3 construirt. T_{23} sei der Schnitt von D_2D_3 mit der Tangente an k in C und S_{23} die Projection von T_{23} aus A auf k, so dass $ABCS_{23} = u_2 + u_3$; $P_{12}P_{13}$ treffe dieselbe Tangente in T und D_1S_{23} die AC in E, so ist zu zeigen, dass AT

---

*) Pfaff's Beweis ist folgender: Weil AC, D_1D_2, BP_{12} in Involution sind, so ist $ABCD_1 \overline{\wedge} CP_{12}AD_2$, und weil AC, D_1D_3, BP_{13} involutorisch gepaart sind, so ist $ABCD_1 \overline{\wedge} CP_{13}AD_3$; also $CP_{12}AD_2 \overline{\wedge} CP_{13}AD_3 \overline{\wedge} AD_3CP_{13}$; d. h. AC, $P_{13}D_2$, $P_{12}D_3$ in Involution wie oben; ähnlich für die Addition.

**) Bei v. Staudt Nr. 274, bei Lüroth Nr. 63 bewiesen.

und BE den k in demselben Punkte treffen, oder, wenn P die Projection von E aus B auf k ist, dass A, P, T in gerader Linie liegen. Nun sind aber sowohl $AP_{12}P_{13}PC$, als $AD_2D_3S_{23}C$ die Projectionen von $AE_{12}E_{13}EC$, bez. aus B, D_1; folglich ist $AP_{12}P_{13}PC \barwedge AD_2D_3S_{23}C$; weil aber CC, D_2D_3, AS_{23} involutorisch gepaart, so sind es auch CC, $P_{12}P_{13}$, AP; d. h. AP geht durch $T = (CC, P_{12}P_{13})$.

5. $ABCD$ sei ein Wurf auf einem geraden Träger g; wir projiciren ihn aus einem beliebigen Punkte O auf eine durch A gehende Gerade, nach $AB'C'D'$; ist E die Projection von C' aus $O' = (BB', CD')$ auf g, so ist Wurf $ABCE = AB'D'C' = ABDC$. Das vollständige Viereck $C'D'OO'$ zeigt aber, dass CC, ED, AB in Involution sind; also ist $ABCD + ABDC = ABCD + ABCE = ABCB = 1$.

Oder, wenn $ABCD$ auf einem Kegelschnitte k liegt, so sei T der Schnitt von AB mit der Tangente in C und E die Projection von T aus D auf k; AB, ED, CC sind dann in Involution, also $ABDC = BAEC = ABCE$, andererseits $ABCD + ABCE = ABCB$.

6. *Wenn AA', BB', CC' involutorisch gepaart sind, so ist*

$$ABC'B' + BCA'C' + CAB'A' = 1.$$

Es mögen die drei Involutionspaare auf einem Kegelschnitte k liegen und M sei das Centrum dieser krummen Involution. Ist E die Projection des Punktes $Q = (AA', C'B)$ aus C auf k; so ist $ABC'E = CBC'A' = BCA'C'$, denn $C(ABC'E)$ und $A(CBC'A')$ treffen $C'B$ in denselben Punkten. Das Pascal'sche Sechseck $C'C'CEB'B$, dessen eine Seite $C'C'$ eine Tangente ist, zeigt, dass $M = (BB', CC')$, $Q = (CE, BC')$ und $T = (B'E, C'C')$ in gerader Linie liegen, also T sich auf MQ oder AA' befindet. Also ist $ABC'B' + BCA'C' = ABC'B' + ABC'E = ABC'A'$. Wegen der Involution AA', BB', CC' ist aber $ABC'A' = A'B'CA' = CAA'B'$; demnach

$$ABC'B' + BCA'C' + CAB'A' = CAA'B' + CAB'A' = 1$$

wegen Nr. 5.

7. *Unter derselben Voraussetzung, dass AA', BB', CC' involutorisch sind, ist*

$$AB'CB \cdot BC'AC \cdot CA'BA = -1.$$

V sei der Pol von BC bezüglich des Kegelschnitts k, auf dem die 3 Paare wieder liegen, AV treffe CC' in R, k in A_1 und F sei die Projection von R aus B auf k; so ist $ABCF = ACBC' = BC'AC$, denn $B(ABCF)$ und $C(ACBC')$ treffen AV in denselben Punkten. Demnach ist $AB'CB \cdot BC'AC = AB'CB \cdot ABCF = AB'CF$ nach v. Staudt's Definition des Products zweier Würfe. Ferner ist

$AB'CF = BA'CA_1$, denn sie werden aus B und A durch perspective Würfe projicirt. Nun ist aber $BA'CA_1 + BA'CA = BA'CB = 0$, also $BA'CA_1 = -BA'CA = -CABA'$; endlich $CABA' \cdot CA'BA = CABA = 1$; also

$$AB'CA \cdot BC'AC \cdot CA'BA = -CABA' \cdot CA'BA = -1.$$

8. Wenn eine Gerade d den Kegelschnitt k nicht schneidet, so stellt die auf ihr befindliche Involution der in Bezug auf k zugeordneten (conjugirten) Punkte, mit dem einen oder dem andern Sinne behaftet, den einen oder den andern imaginären Schnittpunkt Δ', Δ'' von d mit k dar (ich bezeichne, wie Herr Lüroth, imaginäre Punkte mit grossen griechischen Buchstaben); da nun, wie Lüroth § 4. beweist, diese gerade Involution auf d aus jedem beliebigen Punkte von k auf diesen Kegelschnitt in dieselbe krumme Involution projicirt wird, nämlich in diejenige, deren Centrum der Pol D von d ist; so kann man auch letztere als die Δ', Δ'' darstellende ansehen; die Sinne sind natürlich mit denen auf d perspectiv zu nehmen.

9. *Wenn Π ein imaginärer Punkt von k ist, p sein gerader Träger, dessen Pol P das Centrum der krummen den Π darstellenden Involution (P) ist, und M ein reeller Punkt; so ist der zweite Schnittpunkt Π' von $M\Pi$ mit k dargestellt durch die krumme Involution (P'), welche die Projection der Π darstellenden krummen Involution aus M auf k ist, wobei der Sinn mit projicirt ist. Der gerade Träger p' von Π' wird von p durch M und seine Polare m bezüglich k harmonisch getrennt*).* (Fig. 3)

A, A_1 sei ein Paar der krummen Involution (P); seine Projection aus M auf k sei A', A_1'; P', Q, S seien die Schnittpunkte von MP mit $A'A_1'$ und mit k, letztere beide, weil P innerhalb k liegt, reell. Nun ist $PQSM \barwedge A(A_1QSA') \barwedge A_1'(A_1QSA') \barwedge MQSP'$; wenn AA_1 mit einem andern Paare von (P) vertauscht wird, so bleibt P und demnach wegen dieser Projectivität auch P' unverändert; letzterer Punkt ist folglich das Centrum der Involution, in welche (P) aus M auf k projicirt wird. Habe die Involution (P) den Sinn ABA_1B_1, und seien $A'B'A_1'B_1'$ die Projectionen dieser 4 Punkte, so ist der durch $AB'A_1'B_1'$ dargestellte Punkt Π' der zweite Schnittpunkt von $M\Pi$ mit k. Wenn p' die Polare von P' ist, also der Träger der geraden Π' darstellenden Involution, die mit der krummen (P') für jeden Punkt von k als Projectionscentrum perspectiv ist (auch dem Sinne nach), so haben wir nachzuweisen, dass Π, Π', M in gerader Linie liegen, d. h. dass M der Scheitel der (einzigen) Strahlinvolution ist,

*) Vergl. v. Staudt Beitr. Nr. 165.

die mit den beiden geraden Involutionen auf p und p' gleichzeitig auch dem Sinne nach perspectiv ist.

Wie oben gefunden, ist $MQSP' \overline{\wedge} PQSM \overline{\wedge} MSQP$; also sind MM, SQ, PP' in Involution. Der andere Ordnungspunkt N dieser Involution befindet sich, weil der Wurf $MSNQ$ harmonisch ist, auf der Polare m von M, welche durch den Punkt $U = pp'$ geht; aber auch PP' sind durch M und N oder durch M und seine Polare m harmonisch getrennt. Die Polare n von N ist UM; ferner ist $pmp'n \overline{\wedge} PMP'N$; also werden auch m und n oder M und N durch p und p' oder durch deren Schnittpunkte R, R' mit $u = PP'$ harmonisch getrennt; folglich sind MM, NN, SQ, PP', RR' 5 Paare derselben Involution auf u.

Da u die Polare von U ist, so sind RU, $R'U$ je ein Paar der geraden Involutionen auf p und p', welche Π, Π' darstellen; demnach liegt der reelle Punkt von $\Pi\Pi'$ oder der Scheitel der oben genannten mit diesen Involutionen perspectiven und die Gerade $\Pi\Pi'$ darstellenden Strahlinvolution auf RR' oder u.

Es seien nun W, V' die Projectionen von R aus A' und von R' aus A auf k, V die von V' aus M ebenfalls auf k; so ist $V'SA'A_1 \overline{\wedge} R'SMP$ (Projectionscentrum A) $\overline{\wedge} RQMP'$ (wegen der obigen Involution) $\overline{\wedge} WQAA_1'$ (Projectionscentrum A'); andererseits aber ist $V'SA'A_1 \overline{\wedge} VQAA'_1$, also W mit V identisch. Sind nun V_1, V'_1 die zugeordneten Punkte von V, V' bez. in den Involutionen (P), (P'); so wird, da V aus A' nach R projicirt wird, V_1 aus A' nach U projicirt, dem zugeordneten Punkt von R in der geraden Involution auf p; ebenso wird V_1' aus A nach U projicirt. Weil V, V' mit M in gerader Linie liegen, so thun es auch ihre zugeordneten V_1, V_1'. Also ist $AVA_1V_1 \overline{\wedge} A'V'A_1'V_1'$; folglich gilt dies auch für ihre bezüglichen Projectionen aus A' und A auf p, p', nämlich $\mathfrak{A}R\mathfrak{A}_1U$ und $\mathfrak{A}'R'\mathfrak{A}_1'U$; dies sind zwei Darstellungen von Π und Π'. Sie sind nun in perspectiver Lage, mithin ist ihr Projectionscentrum, d. i. der Schnittpunkt von RR' mit $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ oder AA', demnach der Punkt M der Scheitel der mit beiden Involutionen perspectiven Strahlinvolution.

Es ist auf der Stelle ersichtlich, dass, wenn Π mit seinem conjungirten Punkt vertauscht wird, an die Stelle von Π' als zweitem Schnittpunkt ebenfalls der conjungirte tritt.

10. *Umgekehrt, wenn* Π, Π' *auf* k *gegeben sind, also* p, p', P, P', R, R', S, Q; *so ist der eine der Ordnungspunkte der Involution* PP', RR', SQ *auf der Polare des Schnittpunkts* u *der geraden Träger von* Π, Π' (welche Ordnungspunkte stets reell sein, da P, P' innerhalb k liegen) *der reelle Punkt von* $\Pi\Pi'$, $\Pi_1\Pi_1'$, *der andere von* $\Pi\Pi_1'$, $\Pi'\Pi_1$, *wenn* Π_1, Π'_1 *zu* Π, Π' *conjungirt sind;* und zwar, wenn der Sinn der

Π darstellenden Involution von R nach U geht, und der der Involution (Π') von U nach R', oder beide umgekehrt, so liegt der reelle Punkt von $\Pi\Pi'$ zwischen R und R'; haben die Involutionen (Π) und (Π') aber die Sinne RU, $R'U$ oder die umgekehrten, so liegt der reelle Punkt von $\Pi\Pi'$ ausserhalb der Strecke RR'. Oder jenachdem die Sinne der krummen Π und Π' darstellenden Involutionen auf k übereinstimmen oder nicht, liegt der reelle Punkt von $\Pi\Pi'$ innerhalb oder ausserhalb k auf RR'.

11. Wenn Π' sich mit Π vereinigt, so wird $\Pi\Pi'$ die Tangente in Π mit Uebertragung der „reellen" Definition; $\Pi_1\Pi_1'$ wird ebenso die in Π_1. Es fallen dann auch p, p'; P, P'; R, R' zusammen: die Linie $u = PP'$ wird unbestimmt jede Linie durch P. Aber auf jeder dieser Geraden sind die Punkte P und R, die sich mit ihren zugeordneten Punkten vereinigt haben, die Ordnungspunkte der Involution: P ist fest, R kann jeder beliebige Punkt von $p = \Pi\Pi_1$ sein; wir erhalten in der Involution eben nicht anders als die bekannte harmonische Eigenschaft von Pol und Polare; aber andererseits doch das Resultat, dass der reelle Punkt der Tangenten $\Pi\Pi'$, $\Pi_1\Pi_1'$ in den imaginären Schnittpunkten Π, Π_1 einer Geraden p mit k der Pol von p ist. Die beiden andern Geraden $\Pi\Pi_1'$ und $\Pi_1\Pi'$ sind ganz reell geworden: daher die Unbestimmtheit des andern Ordnungspunktes.

Mit andern Worten: die Verbindungslinie eines Punktes innerhalb eines Kegelschnitts mit einem der Schnittpunkte seiner Polare schneidet den Kegelschnitt in zwei vereinigten imaginären Punkten; so dass die Ausziehung der Quadratwurzel aus negativen Würfen durch dasselbe Verfahren geschieht, wie die aus positiven.

In der That: wird die Involution auf k, deren Centrum P ist, aus P selbst auf k projicirt (Nr. 10.), so reproducirt sie sich so wie auch der ihr beigelegte Sinn.

12. *Es seien $ABC\Delta$ und $ABC\Delta'$ zwei nicht neutrale Würfe auf dem Kegelschnitte k und es wird vorausgesetzt, dass die geraden Träger d und d' von Δ und Δ' beide durch den Pol G von AC gehen; das Product $ABC\Delta \cdot ABC\Delta'$ ist dann neutral.* Denn man hat $\Delta\Delta'$ mit AC zu durchschneiden und den Schnittpunkt aus B auf k zu projiciren. Nun liegt aber der reelle Punkt von $\Delta\Delta'$ auf der Polare von $G = dd'$, also auf AC, mithin ist der genannte Schnittpunkt M und seine Projection reell.

M ist einer der beiden Ordnungspunkte der Involution, welche durch A, C und die Schnittpunkte der Geraden AC mit d und d' bestimmt wird; welcher, hängt vom Sinne von Δ und Δ' ab. Vertauscht einer der beiden Punkte Δ, Δ' (oder die ihn darstellende Involution) den Sinn, so tritt an Stelle von M der andere Ordnungspunkt. Es

ist leicht einzusehen, dass die Projectionen der beiden Ordnungspunkte aus B auf k mit G in gerader Linie liegen; was beweist, dass das Product, wenn der eine Factor mit seinem conjungirten vertauscht wird, nur sein Zeichen wechselt.

13. *Auch der Quotient* $ABC\Delta : ABC\Delta'$ *ist neutral.* Wenn $ABC\Delta'' = ABCB : ABC\Delta' = 1 : ABC\Delta'$, so ist $ABC\Delta : ABC\Delta' = ABC\Delta \cdot ABC\Delta''$; also ist nachzuweisen, dass der gerade Träger d'' von Δ'' durch G geht. Da das Product $ABC\Delta' \cdot ABC\Delta''$ der neutrale Wurf $ABCB$ ist, so muss der Schnittpunkt der Tangente BB mit AC, also der Pol von BG, der reelle Punkt von $\Delta'\Delta''$ sein; der Schnittpunkt $d'd''$ muss seine Polare sowohl durch den Pol von d, als auch durch diesen rellen Punkt schicken, die beide auf AC liegen, also ist G dieser Schnittpunkt.

14. Interessanter aber scheint es, *die Division direct auszuführen**). Man hat dann Δ aus B auf AC zu projiciren und den erhaltenen Punkt E aus Δ' auf den Kegelschnitt k (nach O); $ABCO$ ist $ABC\Delta : ABC\Delta'$. Es ist dann nachzuweisen, dass diese letzte Projection einen *reellen* Punkt liefert, oder dass es auf k einen reellen Punkt giebt, aus dem die geraden Involutionen auf AC und d', welche E und Δ' darstellen, durch dieselbe Involution projicirt werden, oder, da die gerade und die krumme Involution, welche Δ' darstellen, aus jedem Punkte von k perspectiv sind, dass es auf k einen reellen Punkt giebt, aus dem gleichzeitig die gerade Involution auf AC, welche E darstellt, und die krumme auf k, welche Δ' darstellt, durch dieselbe Strahleninvolution projicirt werden.

Da die beiden geraden Träger d und d' durch G gehen, so liegen die Centren D und D' der krummen Involutionen, welche Δ und Δ' darstellen, auf AC (Fig. 4); jede dieser beiden Involutionen hat also AC zu einem Paare; und ebenso gehört das Paar AC zur geraden Involution (E), welche E darstellt. Sei KL irgend ein zweites Paar dieser Involution und projiciren wir diese beiden Punkte aus einem beweglichen Punkte O von k auf diesen Kegelschnitt nach U, V, so beschreiben U und V projective (nicht involutorische) Punktreihen auf k, von denen A und C die vereinigten Elemente sind. Die Geraden UV umhüllen also einen Kegelschnitt s, welcher k in A und C tangirt; weil seine Tangenten k durchschneiden, so berührt entweder s den k von innen, oder beide berühren sich von aussen. Da nun aber die Involution AC, KL einen imaginären Punkt E darstellt, so trennen sich diese beiden Paare; woraus dann hervorgeht, dass jede

---

*) Aus der Definition des Products folgt die des Quotienten: $ABCD_1 : ABCD_2 = ABCO$, wenn AC, D_1B, D_2O in Involution sind.

zwei Paare UV sich ein- und ausschliessen und der Schnittpunkt je zweier Linien UV, also auch je zweier consecutiver ausserhalb k liegt; folglich berühren sich k und s von aussen. Demnach gehen vom Centrum D' der krummen Involution (Δ'), das innerhalb k liegt, zwei reelle Tangenten an s. Sind U_1, V_1 die (reellen) Schnittpunkte der einen dieser Tangenten mit k, so sind dieselben einerseits zwei Punkte U, V, also K, L ihre Projectionen aus einem gewissen reellen Punkte O_1 von k; andererseits gehören U_1, V_1 auch zur Involution (Δ'); also die beiden Paare AC, U_1V_1 von (Δ') und die beiden Paare AC, KL von (E) liegen perspectiv aus dem Centrum O_1; mithin die ganzen Involutionen. Die andere Tangente führe zu U_2, V_2, O_2.

Legen wir jetzt den Involutionen ihren Sinn bei, so wird nur der eine oder der andere der Punkte O_1, O_2 genügen, d. h. nur einer der beiden neutralen Würfe $ABCO_1$, $ABCO_2$ ist der Quotient; und wenn der Sinn der einen Involution geändert wird, der andere. Dass die beiden Punkte O_1, O_2 mit G in gerader Linie liegen, also die eben genannten Würfe zur Summe 0 haben, „entgegengesetzte" sind, ergiebt sich leicht.

Die beiden Dreiecke $U_1V_1O_1$ und $U_2V_2O_2$ liegen nämlich homologisch (perspectiv), indem ihre entsprechenden Seiten sich in den Punkten D', K, L von AC schneiden; also gehen O_1O_2, U_1U_2, V_1V_2 durch denselben Punkt, von dem bald zu erkennen ist, dass er zu jedem der 3 Punkte D', K, L bezüglich k conjugirt, mithin der Pol G von AC ist.

15. *Also jeder beliebige nicht neutrale Wurf $ABC\Delta$, für den der gerade Träger d von Δ durch G geht, lässt sich darstellen als Product eines neutralen Wurfs in einen gegebenen festen Wurf $ABC\Delta_0$ von derselben Art wie $ABC\Delta$; ersetzt man Δ oder Δ_0 durch den conjungirten Punkt, so tritt an Stelle des neutralen Wurfs sein entgegengesetzter.*

16. Es sei jetzt $ABC\Phi$ ein beliebiger nicht neutraler Wurf, bei dem der gerade Träger f von Φ nicht durch G geht. F sei der Pol von f; wir projiciren ihn aus C auf k nach Q und diesen aus G auf k nach R, so dass $ABCQ + ABCR = 0$ ist. Um $ABCR$ und $ABC\Phi$ zu addiren, projiciren wir Φ aus R auf die Tangente CG nach Σ, d. h. die gerade Involution auf f und zugleich die krumme auf k, welche Φ darstellen, in die den Σ darstellende gerade Involution auf CG; da CQ ein Paar der krummen Involution (Φ) ist, so ist CG ein Paar der geraden Involution (Σ). Nun ist noch Σ aus A auf k nach Δ, d. h. die gerade Involution (Σ) in die krumme Involution (Δ) zu projiciren: aus dem Paare CG ergiebt sich das Paar CA; das Centrum D von (Δ) liegt mithin auf AC, folglich geht der gerade Träger d von Δ durch G. Wir haben demnach erhalten:

$$ABCR + ABC\Phi = ABC\Delta,$$
$$0 = ABCR + ABCQ,$$
$$ABC\Phi = ABCQ + ABC\Delta.$$

Also jeder beliebige Wurf lässt sich darstellen als die Summe eines neutralen und eines nicht neutralen von der Art $ABC\Delta$, bei welchem der gerade Träger d von Δ durch G geht.

Ist mithin δ_0 ein gegebener nicht neutraler Wurf von der Art von Nr. 15., α ein beliebiger Wurf, so ist jederzeit

$$\alpha = a + b\delta_0,$$

wo a und b neutral sind, und nur auf eine Weise; wenn α oder δ_0 mit dem conjungirten Wurfe vertauscht wird, so ist b durch den entgegengesetzten Wurf zu ersetzen.

Unter den Würfen von der Art δ_0 werden die beiden conjungirten ι und ι_1 ausgezeichnet, bei denen der Träger der vierten Elemente die Polare des Punktes $H = (AC, BG)$ ist; wenn B' der zweite Schnittpunkt von BG mit k ist, so dass $ABCB' + ABCB = 0$, also $ABCB' = -1$, so ist $\iota^2 = \iota_1^2 = -1$. Jeder Wurf α lässt sich also auch in der Form $a + b\iota = a - b\iota_1$, sein conjungirter in der Form $a - b\iota = a + b\iota_1$ darstellen*).

17. Sind α und β nicht neutrale Würfe von beliebiger Art, so ist

$$\beta = c + d\delta_0,$$
$$\alpha = a + b\delta_0,$$

also durch Elimination von δ_0

$$\alpha = e + f\beta;$$

folglich kann die obige Beschränkung wegfallen.

Ist demnach β ein beliebiger nicht neutraler, α ein beliebiger Wurf, so lässt sich jederzeit und nur auf eine Weise α in der Form

$$\alpha = a + b\beta$$

*darstellen, wo a und b neutral sind***).

Ist α neutral, so ist $b = 0$.

18. Repräsentirt man zwei conjungirte imaginäre Punkte Δ und Δ_1 von k durch das Centrum D der sie darstellenden krummen Involution, so sind die sämmtlichen imaginären Punkte von k, also alle Würfe, mithin auch, da ja jedem Wurfe eine complexe Zahl entspricht, alle complexen Zahlen und die mit ihnen erfüllte Gauss'sche Ebene Γ abgebildet in das doppelte Innere des Kegelschnitts k: also

---

*) Lüroth Nr. 74.

**) v. Staudt's Beitr. Nr. 277.

eine zweiblättrige Fläche, deren Uebergangscurve k ist. Die beiden Blätter sind den Halbebenen von Γ, die durch die reelle Axe entstehen, zugeordnet. Jeder Parallelen zur lateralen Axe entspricht ein Strahl aus C auf dem einen Blatte bis k und dann auf dem andern Blatte zurück; der lateralen Axe selbst entspricht CAC. Jeder Parallelen zur reellen Axe entspricht ein Kegelschnitt, der den k in C vierpunktig berührt und ganz auf dem einen Blatte liegt; derselbe Kegelschnitt, aber zum andern Blatte gerechnet, correspondirt der äquidistanten Parallelen; der reellen Axe selbst entspricht die Randcurve k. Einer beliebigen Geraden von Γ correspondirt ein Kegelschnitt, der k einmal in C und ein anderes Mal in einem andern variablen Punkte X berührt und dessen beide Bogen CX zu verschiedenen Blättern gehören. Derselbe Kegelschnitt, dessen Bogen aber nun je zu dem andern Blatte als vorher gerechnet werden, entspricht derjenigen Geraden, die zu g bezüglich der reellen Axe symmetrisch ist. Dem Unendlichen correspondirt der Punkt C (als unendlich kleiner Kegelschnitt) mit allen seinen Fortschreitungsrichtungen nach dem Innern von k.

19. Fasst man k als den Umriss der Projection einer nicht geradlinigen Fläche 2. Grades F^2 auf, d. i. als Projection der Berührungscurve $\mathfrak{k}$ des vom Projectionscentrum O an F^2 gelegten Kegels; dann ist jeder innere Punkt von k die Projection zweier verschiedener Punkte von F^2, die den beiden durch $\mathfrak{k}$ gebildeten Theilen angehören. Jedem imaginären Punkte von k entspricht dann ein reeller Punkt auf F^2 (und umgekehrt), der auf dem einen oder andern Theile dieser Fläche liegt, je nachdem die krumme Involution den einen oder andern Sinn hat. Die reellen Punkte sind in die Curve $\mathfrak{k}$ abgebildet. Nehmen wir wieder die Gauss'sche Ebene als Träger der complexen Zahlen, die den Würfen entsprechen, welche von den drei festen Punkten A, B, C auf k mit allen übrigen (reellen und imaginären) gebildet werden, mit hinzu, so entspricht, wenn $\mathfrak{C}$ der Punkt von $\mathfrak{k}$ ist, der sich nach C projicirt, jeder Geraden von Γ ein durch $\mathfrak{C}$ gehender Kegelschnitt auf F^2, den Strahlen eines Büschels Kegelschnitte, die noch den dem Scheitel correspondirenden Punkt gemein haben; entfernt sich der Scheitel ins Unendliche, so nähert sich dieser Punkt dem $\mathfrak{C}$; die Kegelschnitte, welche die Bilder von parallelen Geraden sind, haben eine gemeinsame Tangente in $\mathfrak{C}$, z. B. die, welche den Parallelen zur reellen Axe entsprechen, die Tangente an $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{C}$, während die Bilder der Parallelen zur lateralen Axe $\mathfrak{C}O$ berühren.

20. Den Schluss dieses Aufsatzes mag *eine rein geometrische Entwickelung der Gleichung einer Ebene (oder eines Punktes) in Wurfcoordinaten* bilden. Der Gang ist im Wesentlichen, besonders am Anfange,

derselbe wie in Salmon-Fiedler's Analyt. Geometrie des Raums 2. Aufl. 1. Thl. Art. 38, oder in Fiedler's darstellender Geometrie (1. Aufl.) Art. 138 und 139 (vergl. auch Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich Bd. XV, S. 152), deren Figur ich auch zu benutzen bitte (weshalb nun mit griechischen Buchstaben nicht mehr imaginäre Gebilde bezeichnet werden).

Da in den genannten Werken mit Doppelverhältnissen, hier mit Würfen operirt wird, so ist die Schreibweise verschieden: der Wurf $ABCD$ entspricht dem Doppelverhältniss $(ACDB) = \frac{AD}{CD} : \frac{AB}{CB}$.

21. Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 die Ecken des Fundamentaltetraëders für räumliche Coordinaten, E der Einheitspunkt, E_i seine Projection aus der Ecke A_i auf die Gegenebene, E_{ik} seine Projection auf die Kante $a_{ik} = A_iA_k$ aus der Gegenkante; in gleicher Weise mögen aus dem beliebigen Punkte P die Projectionen P_i und P_{ik} sich ergeben.

Das Product der drei Würfe $A_iP_{ik}A_kE_{ik}$, $A_kP_{kl}A_lE_{kl}$, $A_lP_{li}A_iE_{li}$, welche auf den drei Seiten des Dreiecks $A_iA_kA_l$ liegen (Fig. 5.), ist gleich 1, wie aus Herrn Lüroth's Abh. Nr. 81 hervorgeht, da die E_{ik}, P_{ik} etc. die Projectionen von E_j, P_j aus den Ecken dieses Dreiecks auf die Gegenseiten sind.

Man kann in Folge dessen

$$a_{jl}\,(A_kE\,A_iP) = A_kE_{ik}A_iP_{ik} = A_iP_{ik}A_kE_{ik} = \frac{x_i}{x_k}$$

setzen. *Diese 4 Würfe x_1, x_2, x_3, x_4, von denen einer beliebig ist, sind dann die homogenen Coordinatenwürfe des Punktes P in Bezug auf das Tetraëder $A_1A_2A_3A_4$ und den Einheitspunkt E*; über ihre geometrische Darstellung sehe man die eben angeführte Stelle von Lüroth.

Es seien ferner E, Π die Einheitsebene und eine beliebige Ebene, E_{ik}, Π_{ik} ihre Schnitte mit a_{ik}, so führen die dualen Betrachtungen dazu, dass man

$$A_i\mathsf{E}_{ik}A_k\Pi_{ik} = \frac{\xi_i}{\xi_k}$$

setzen kann, und ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 *die homogenen Coordinatenwürfe der Ebene Π bezüglich desselben Tetraëders und der Einheitsebene* E sind.

22. Die Schnittlinie von E mit der Ebene $\mathsf{A}_j = A_iA_kA_l$ sei e_j (Fig. 6.) und der Schnittpunkt von e_j (oder E) mit der Geraden $A_lE_jE_{ik}$ sei E^x_{li}, so ist

$$A_iE_{ik}A_k\mathsf{E}_{ik} = \mathsf{E}_{il}E^x_{lj}\mathsf{E}_{kl}\mathsf{E}_{ik}\,,$$

wie sich durch Projection aus A_l auf e_j ergiebt. Mithin ist das Product

$$\begin{aligned} &A_iE_{ik}A_k\mathsf{E}_{ik}\cdot A_kE_{kl}A_l\mathsf{E}_{kl}\cdot A_lE_{li}A_i\mathsf{E}_{li} \\ &= \mathsf{E}_{il}E^x_{lj}\mathsf{E}_{kl}\mathsf{E}_{ik}\cdot \mathsf{E}_{ki}E^x_{ij}\mathsf{E}_{li}\mathsf{E}_{kl}\cdot \mathsf{E}_{lk}E^x_{kj}\mathsf{E}_{ik}\mathsf{E}_{li}\,. \end{aligned}$$

Die 3 Würfe rechts werden aber nur von 6 Punkten gebildet, welche als Schnittpunkte der c_j mit den Seiten des vollständigen Vierecks $A_iA_kA_lE_j$ drei involutorische Paare bilden: $\mathsf{E}_{ik}E^x_{lj}$, $\mathsf{E}_{kl}E^x_{ij}$, $\mathsf{E}_{li}E^x_{kj}$. Also ist dieses Product gleich — 1 nach Nr. 7. Folglich kann man setzen:

$$A_iE_{ik}A_k\mathsf{E}_{ik} = -\frac{\lambda_i}{\lambda_k}.$$

Sei E'_{ik} von E_{ik} durch A_iA_k harmonisch getrennt, so dass $A_iE_{ik}A_k\mathsf{E}'_{ik} = A_kE_{ik}A_i\mathsf{E}'_{ik} = A_i\mathsf{E}'_{ik}A_kE_{ik} = -1$, so gilt, wenn die durch E'_{14}, E'_{24}, E'_{34} gelegte Ebene E' die a_{12} in E''_{12} trifft, nach dem eben Bewiesenen die Wurfgleichung:

$$A_1E_{12}A_2\mathsf{E}''_{12}\cdot A_2E_{24}A_4\mathsf{E}'_{24}\cdot A_4E_{41}A_1\mathsf{E}'_{41} = -1;$$

folglich ist der erste Factor links allein schon gleich — 1 und E''_{12} identisch mit E'_{12}; die Ebene E' geht demnach durch alle sechs Punkte E'_{ik}, welche den E_{ik} bezüglich der Tetraëderecken harmonisch zugeordnet sind, so dass auf diese Weise die Existenz der Harmonicalebene des Punktes E in Bezug auf das Tetraëder gezeigt ist.

Wenn nun ε_i' die Coordinatenwürfe der Ebene E bezüglich des Tetraëders $A_1A_2A_3A_4$ und der Harmonicalebene E' von E als Einheitsebene sind, so ist wegen Nr. 21.

$$\frac{\varepsilon_i'}{\varepsilon_k'} = A_i\mathsf{E}'_{ik}A_k\mathsf{E}_{ik} = A_i\mathsf{E}'_{ik}A_kE_{ik}\cdot A_iE_{ik}A_k\mathsf{E}_{ik}$$

nach v. Staudt's Definition des Products, also

$$\frac{\varepsilon_i'}{\varepsilon_k'} = -1 \times -\frac{\lambda_i}{\lambda_k} = \frac{\lambda_i}{\lambda_k},$$

mithin

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 = \varepsilon_1' : \varepsilon_2' : \varepsilon_3' : \varepsilon_4'.$$

Ist mithin E' die Harmonicalebene von E und E' der harmonische Punkt von E bezüglich des Tetraëders $A_1A_2A_3A_4$, so sind die oben erhaltenen Würfe λ_i den Coordinaten der gegebenen Einheitsebene E in Bezug auf jenes Tetraëder und auf E' als Einheitsebene oder, wie leicht einzusehen, den Coordinaten des gegebenen Einheitspunktes E in Bezug auf $A_1A_2A_3A_4$ und E' als Einheitspunkt proportional.

Die Coordinaten von E (E) bezüglich $A_1A_2A_3A_4$ und E (E) sind einander gleich, weil $A_i\mathsf{E}_{ik}A_k\mathsf{E}_{ik} = 1$; ist also E die Harmonicalebene von E, so sind die 4 Würfe λ_i einander gleich.

23. Bilden wir nun das Product der drei Würfe $-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}$, $\frac{x_i}{x_k}$, $\frac{\xi_i}{\xi_k}$;

$$-\frac{\lambda_i x_i \xi_i}{\lambda_k x_k \xi_k} = A_iP_{ik}A_kE_{ik}\cdot A_iE_{ik}A_k\mathsf{E}_{ik}\cdot A_i\mathsf{E}_{ik}A_k\Pi_{ik} = A_iP_{ik}A_k\Pi_{ik}.$$

Mithin ist:

$$-\frac{\lambda_1 x_1 \xi_1 + \lambda_2 x_2 \xi_2 + \lambda_3 x_3 \xi_3}{\lambda_4 x_4 \xi_4} = A_1 P_{14} A_4 \Pi_{14} + A_2 P_{24} A_4 \Pi_{24} + A_3 P_{34} A_4 \Pi_{34}.$$

Den Beweis, dass diese Summe von drei Würfen gleich 1 ist, wenn P in Π liegt, will ich auf andere Weise führen, als es in den genannten Werken geschehen ist, wo durch Projection ins Unendliche die Doppelverhältnisse vereinfacht werden.

Es seien die Geraden p_j und die auf ihnen befindlichen Punkte P^x_{ij} aus P und Π ebenso abgeleitet wie e_j und E^x_{ij} aus E und E (Anf. Nr. 22.). Die drei Würfe lassen sich unter der genannten Voraussetzung, dass P in Π liegt, so auf p_4 projiciren, dass sich drei Würfe ergeben, die aus sechs involutorisch gepaarten Punkten gebildet sind, so dass der Satz in Nr. 6. anzuwenden ist.

Der erste Wurf $A_1 P_{14} A_4 \Pi_{14}$ wird aus der Geraden PA_2 auf p_4 projicirt, wodurch sich $\Pi_{12}\Pi_{23} P^x_{24} P^x_{14}$ ergiebt. Dass $\Pi_{12} = p_4 a_{12}$ die Projection von A_1 aus PA_2 ist, bedarf keines Beweises. Ferner $A_2 P_3$ und $A_3 P_2$ gehen beide durch P_{14}; also liegen in der Ebene $A_2 A_3 P_{14}$ auch P_2, P_3, $A_2 P_2$, $A_3 P_3$ und deren Schnittpunkt P, d. h. die Ebene $P_{14} A_2 P$ geht durch $A_2 A_3 = a_{23}$ und trifft p_4 in $p_4 a_{23} = \Pi_{23}$. Drittens, da $A_4 P$ durch P_4 geht, so geht die Ebene $A_4 A_2 P$ durch $P_4 A_2$, also durch P^x_{24}.

Endlich, weil P in Π liegt, so liegt auch $P\Pi_{14}$ in Π und trifft p_4; in der Ebene von $\Pi_{14} P$ und $A_1 P_1$, die sich in P treffen, liegen die Geraden $A_1 \Pi_{14} A_4$, $A_4 P P_4$, $A_1 P_4 P_{23}$, also enthält diese Ebene zugleich $\Pi_{14} P$ und $A_1 P_{23}$. Da letztere in A_4 liegt, so ist der Schnittpunkt P^x_{14} von $p_4 = \Pi \mathsf{A}_4$ mit $A_1 P_{23}$ derjenige Punkt, wo p_4 von $P\Pi_{14}$ oder von der Ebene $A_2 P \Pi_{14}$ getroffen wird, d. h. P^x_{14} ist die Projection von Π_{14} aus $A_2 P$ auf p_4. Folglich ist, wie oben behauptet,

$$A_1 P_{14} A_4 \Pi_{14} = \Pi_{12}\Pi_{23} P^x_{24} P^x_{14}.$$

Ebenso ergiebt sich durch Projection des zweiten und dritten Wurfs unserer Summe bez. aus $A_3 P$, $A_1 P$ (die drei Projectionen hätten auch bez. aus $A_3 P$, $A_1 P$, $A_2 P$ geschehen können):

$$A_2 P_{24} A_4 \Pi_{24} = \Pi_{23}\Pi_{13} P^x_{34} P^x_{24},$$
$$A_3 P_{34} A_4 \Pi_{34} = \Pi_{13}\Pi_{12} P^x_{14} P^x_{34}.$$

Die drei rechten Würfe sind aber aus den Punktepaaren $\Pi_{12} P^x_{34}$, $\Pi_{23} P^x_{14}$, $\Pi_{13} P^x_{24}$ gebildet, welche, da sie aus dem Schnitte von p_4 mit den Seiten des Vierecks $A_1 A_2 A_3 P_4$ hervorgehen, involutorisch gepaart sind.

Folglich ist nach Nr. 6. ihre Summe und also auch die der drei linken Würfe gleich dem Wurfe 1. *Man erhält als Beziehung zwischen*

den Wurfcoordinaten x_i eines Punktes P und den ξ_i einer Ebene Π, *die jenen enthält,*

$$-\frac{\lambda_1 x_1 \xi_1 + \lambda_2 x_2 \xi_2 + \lambda_3 x_3 \xi_3}{\lambda_4 x_4 \xi_4} = 1$$

oder

$$\lambda_1 x_1 \xi_1 + \lambda_2 x_2 \xi_2 + \lambda_3 x_3 \xi_3 + \lambda_4 x_4 \xi_4 = 0.$$

24. Herrn Fiedler, dem ich diesen Beweis schrieb, verdanke ich die Mittheilung zweier anderer Beweise für die Gleichheit der Wurfsumme mit 1, von denen der eine durch die Herren Padova und Sayno in ihrer italienischen Bearbeitung von Fiedler's darstellender Geometrie gegeben ist und zwar mit Doppelverhältnissen geführt ist, jedoch sich einfach in die Wurftheorie übertragen lässt, während der andere von Herrn Culmann herrührt und unmittelbar mit Würfen geführt ist, bis jetzt aber keine Veröffentlichung erfahren hat.

Die binnen kurzem erscheinende zweite Auflage von Herrn Fiedler's darstellender Geometrie wird beide Beweise bringen*).

Darmstadt, Anfang October 1875.

*) Mittlerweile ist dies Buch erschienen; der Beweis von Padova-Sayno steht im Text S. 549, der von Culmann in den Quellen- und Literaturnachweisungen S. 739. Nov. 1875.

Ueber die Weiler'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Von A. Mayer in Leipzig.

Im Jahre 1863 hatte Herr Weiler in Schlömilch's Zeitschrift eine Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung auseinandergesetzt, die weit weniger Integrationen erforderte als die Methode von Jacobi. Obgleich aber der gesunde Kern in dieser Weiler'schen Methode nicht verkannt werden konnte, so waren doch Ableitung und Resultate unverständlich geblieben. Angezogen von der Wichtigkeit dieser Resultate versuchte daher Clebsch, dieselben zu verificiren, und es gelang ihm, auf einem ganz anderen Wege streng nachzuweisen*), dass man in der That im Allgemeinen mit jener beträchtlich geringeren Anzahl von Integrationen auskommen kann. Wiewohl aber Clebsch von der Weiler'schen Vereinfachung des Integrationsgeschäfts geradezu sagt: „Diese Vereinfachung . . . . besteht in Folgendem", so konnte es doch keinem, der die beiden Arbeiten näher angesehen und verglichen hatte, entgehen, dass diese Clebsch'sche Vereinfachung der Jacobi'schen Methode (die später die Weiler-Clebsch'sche Methode genannt worden ist) unmöglich identisch sein könne mit dem eigentlichen Weiler'schen Verfahren und dass namentlich letzteres auf ganz anderer Grundlage beruhen müsse. Auch in dem Aufsatze über Clebsch, diese Annalen Bd. VII, p. 1, ist eine Identität beider Methoden nirgends behauptet worden. Ich verstehe daher eigentlich nicht, inwiefern der Sachverhalt dort unrichtig dargestellt sein sollte. Wie dem aber auch sei, jedenfalls kann man sich nur freuen, dass die betreffende Stelle Herrn Weiler veranlasst hat, seine Methode in ausführlicherer Bearbeitung jetzt von Neuem zu veröffentlichen**).

In dieser neuesten Auflage ist allerdings der Gegenstand weit eingehender behandelt als früher, aber trotzdem ist die Darstellung

*) Borchardt's Journal Bd. 65, p. 263.

**) Schlömilch's Zeitschrift Bd. XX, p. 83 und p. 271.

auch hier noch eine solche, dass sie nach meiner Meinung nicht zu verstehen ist.

Es rührt dies einmal davon her, dass ein und dasselbe Zeichen $(\varphi\psi)$ in ganz verschiedenen Bedeutungen gebraucht wird, so dass man nur an sehr wenigen Stellen mit völliger Sicherheit angeben kann, welches der eigentliche Sinn der gerade betrachteten Gleichungen oder Operationen ist. Selbst ausführlich hingeschriebene und numerirte Gleichungen (vgl. § 5. der Weiler'schen Abhandlung) ändern mit jedem Schritte, den die Rechnung weiter geht, ihre Form und Bedeutung, ohne dass auch nur ein einziges Mal durch Zeichen oder in Worten auf diese stillschweigenden Veränderungen aufmerksam gemacht würde. Dann kommen aber auch wirkliche Unrichtigkeiten vor. So ist namentlich der Satz*) „Wenn m partielle Differentialgleichungen ein vollständiges System bilden, so werden auch je i von diesen m partiellen Differentialgleichungen ein vollständiges System bilden, und deshalb $n-i$ gemeinsame Lösungen haben" offenbar falsch, wie unmittelbar aus dem Clebsch'schen Fundamentaltheorem hervorgeht, nach welchem m unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen

$$A_1(f) = 0, \quad A_2(f) = 0, \cdots A_m(f) = 0$$

dann und nur dann ein vollständiges System bilden, wenn jedes

$$A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f))$$

sich als eine lineare Combination der $A(f)$ darstellt. Der Satz gilt vielmehr nur für den speciellen Fall eines Involutionssystems, in welchem jene Ausdrücke sämmtlich den Werth Null haben. Und dass dieser Satz nicht bloss den Charakter einer beiläufigen Nebenbemerkung besitzt, dafür sprechen, ganz abgesehen von sachlichen Gründen, deren Auseinandersetzung mich hier zu weit führen würde, die Worte selbst: „Diese Sätze .... werden im Folgenden mehrfache Verwendung finden", die Herr Weiler der citirten Behauptung unmittelbar nachfolgen lässt.

Nach meiner Ansicht ist überhaupt das Meiste durchaus nicht so selbstverständlich, wie es in der Weiler'schen Darstellung erscheint. Aber die Methode selbst ist richtig**) und wohl werth, bekannt und beachtet zu werden, und zwar nicht nur um der Resultate willen, sondern vorzüglich auch wegen der ganz eigenthümlichen Art der Schlussweise, die öfters auf eine blosse Abzählung der Lösungen und Variabeln hinausläuft und es fast immer verschmäht, sich auf hergebrachter Bahn zu bewegen. Aus diesem Grunde halte ich es nicht für überflüssig, in diesen Annalen, die ja einmal schon die meisten neueren Unter-

*) A. a. O. p. 278.

**) Vgl. jedoch die Anmerkung am Schlusse.

suchungen über partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung enthalten, den Versuch zu machen, auch die Weiler'sche Methode so, wie ich sie verstehe, möglichst klar und präcis auseinanderzusetzen.

Dieser Auseinandersetzung sind die 3 ersten § des vorliegenden Aufsatzes gewidmet, in denen der Vollständigkeit halber auch manches Bekannte wiederholt wird. Der erste § bringt die Weiler'sche Integrationsmethode der vollständigen Systeme, die Herr Weiler selbst merkwürdiger Weise nur für ein vollständiges System von zwei Gleichungen mitgetheilt hat. Während alle sonstigen Methoden ein gegebenes vollständiges System zum Behufe der Integration auf ein Involutionssystem zurückführen, wird hier das System auf eine andere besondere Form gebracht, die ich die Weiler'sche Form nenne. Im folgenden § werden die Involutionssysteme, die in der Jacobi'schen Methode auftreten, durch solche Weiler'sche Systeme ersetzt. Die Anwendung der Methode des § 1. liefert dann in § 3. unmittelbar eine Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung, die an Zahl und Höhe der Integrationen sich nicht von der Jacobi'schen Methode unterscheidet. In Folge einer besonderen Eigenschaft jener Weiler'schen Systeme ergiebt aber schliesslich die Combination je zweier aufeinanderfolgender Schritte die eigentliche Weiler'sche Vereinfachung, welche zeigt, dass man im Allgemeinen eine grosse Zahl von Integrationen ersparen kann, und dabei wesentlich einfacher zu Werke geht, als das entsprechende Verfahren von Clebsch. Erfordern auch diese Vereinfachungen von Weiler und Clebsch immer noch bedeutend mehr Integrationen, als meine oder die Lie'sche Methode*), so ist andererseits doch auch wieder in Betracht zu ziehen, dass in den meisten Fällen diese Integrationen niedriger ausfallen werden als in den letztgenannten Methoden.

Ich habe der Kürze und Klarheit halber im Folgenden nur den einfachsten und wegen seiner Beziehungen zur Dynamik und Variationsrechnung wichtigsten Fall der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachtet, den Fall, wo in der gegebenen Gleichung die unbekannte Function selbst nicht auftritt. Dafür ist, dem Schlusse des Weiler'schen Aufsatzes entsprechend, in § 4. eine Untersuchung hinzugefügt werden, die in keinem nothwendigen Zusammenhange mit dem Vorhergehenden steht und die ein altes, auch von mir selbst früher getheiltes Vorurtheil gegen die Jacobi'sche Reduction des allgemeinen Falles der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung auf den angegebenen einfacheren Fall**) beseitigen soll.

---

*) Math. Annalen Bd. V, p. 448, und Bd. VI, p. 162.

**) Borchardt's Journal Bd. 60, p. 1.

§ 1.

Integration der vollständigen Systeme.

Es seien:

$$(1) \qquad A_1(f) = 0, \quad A_2(f) = 0, \cdots A_m(f) = 0,$$

wo

$$A_i(f) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_\lambda^i \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

und $m < n$ ist, m gegebene lineare partielle Differentialgleichungen, von denen keine eine blosse algebraische Folge der anderen ist, die also m von den Differentialquotienten als Functionen der übrigen und der unabhängigen Variabeln bestimmen. Ich nehme an, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m}$$

solche m Differentialquotienten sind. Durch Auflösung nach denselben erhält dann das System (1) die Form:

$$(2) \qquad B_1(f) = 0, \quad B_2(f) = 0, \cdots B_m(f) = 0,$$

wo

$$B_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{k=m+1}^{k=n} b_k^i \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Diese aufgelöste Form des Systems (1) führt sofort zu dem Satze, dass, wenn die Gleichungen (1) mehrere gemeinsame Lösungen $f = f_1, f_2, \cdots f_k$ besitzen, von denen keine eine blosse Function der übrigen ist, diese Lösungen nothwendig in Bezug auf die $n - m$ Variabeln $x_{m+1}, \cdots x_n$ von einander unabhängig sein müssen.

In der That wäre

$$f_k = \varphi(f_1, \cdots f_{k-1}, x_1, \cdots x_m),$$

so würde

$$B_i(f_k) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

werden und somit aus den Gleichungen (2) gegen die Voraussetzung folgen:

$$f_k = \varphi(f_1, \cdots f_{k-1}).$$

Aus diesem Satze ergiebt sich unmittelbar der weitere, dass die Gleichungen (1) nie mehr als $n - m$ von einander unabhängige gemeinsame Lösungen besitzen können. Lassen sie $n - m$ solche Lösungen zu, so wird das System (1) ein *vollständiges System* genannt.

Ich nehme im Folgenden an, dass das System (1) ein vollständiges System sei, und bezeichne durch $f_{m+1}, \cdots f_n$ irgend $n - m$ unabhängige Lösungen desselben. Die Functionen $f_{m+1}, \cdots f_n$ sind dann

unabhängig von einander in Bezug auf $x_{m+1}, \cdots x_n$; jede Lösung des Systems (1) lässt sich als eine blosse Function von $f_{m+1}, \cdots f_n$ ausdrücken und umgekehrt ist jede Function von $x_1, x_2, \cdots x_n$, die diese Variabeln nur in den Verbindungen $f_{m+1}, \cdots f_n$ enthält, eine gemeinsame Lösung der Gleichungen (1).

Da die m Gleichungen (1) die m ersten Differentialquotienten bestimmen sollen, so müssen sich auch für jedes $h < m$ die h Gleichungen

$$A_1(f) = 0, \quad A_2(f) = 0, \cdots A_h(f) = 0$$

nach h von diesen m Grössen auflösen lassen. Nimmt man an, dass immer

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_h}$$

solche h Differentialquotienten seien, und bezeichnet das Resultat der Substitution ihrer Werthe in $A_{h+1}(f)$ durch $A^h_{h+1}(f)$, so kann man das System (1) ersetzen durch das folgende:

$$A_1(f) = 0, \quad A_2^1(f) = 0, \cdots A_m^{m-1}(f) = 0, \tag{3}$$

in welchem allgemein $A_k^{k-1}(f)$ die Form hat:

$$A_k^{k-1}(f) = \sum_{\lambda=k}^{\lambda=n} b_\lambda^k \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \tag{4}$$

und $A_k^{k-1}(x_k)$ verschieden von Null ist. Des kürzeren Ausdruckes wegen werde diese Form des vollständigen Systems (1) die Weiler'sche Form genannt.

Das System (3) besitzt die wichtige Eigenschaft, dass je die $m-i$ letzten Gleichungen desselben selbst wieder ein vollständiges System bilden.

In der That, die $m-i$ Gleichungen

$$A_{i+1}^i(f) = 0, \cdots A_m^{m-1}(f) = 0, \tag{5}$$

welche nur die $n-i$ Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ enthalten und sich nach den $m-i$ ersten derselben auflösen lassen, besitzen die

$$n - m = (n-i) - (m-i)$$

gemeinsamen Lösungen $f = f_{m+1}, \cdots f_n$, die unabhängige Functionen der Variabeln $x_{m+1}, \cdots x_n$ sind.

Seien nun $f = \varphi_{m+1}, \cdots \varphi_n$ irgend $n-m$ unabhängige Lösungen des vollständigen Systems (5).

Aus den Gleichungen:

$$\varphi_{m+1} = x'_{m+1}, \cdots \varphi_n = x'_n$$

lassen sich dann $x_{m+1}, \cdots x_n$ ausdrücken durch $x_1, \cdots x_m, x'_{m+1}, \cdots x'_n$.

Bezeichnet man die Substitution dieser Werthe durch [ ] und setzt $[f] = f'$, so hat man:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}\right] = \sum_{h=1}^{h=m} \frac{\partial f'}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial x_\lambda} + \sum_{\mu=m+1}^{\mu=n} \frac{\partial f'}{\partial x'_\mu} \left[\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\lambda}\right],$$

folglich, weil nach (4) $A_k^{k-1}(f)$ eine lineare Function der $\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$ ist, die für $f = x_1, x_2, \cdots x_{k-1}$ verschwindet:

$$\left[A_k^{k-1}(f)\right] = \sum_{h=k}^{h=m} \left[A_k^{k-1}(x_h)\right] \frac{\partial f'}{\partial x_h} + \sum_{\mu=m+1}^{\mu=n} \left[A_k^{k-1}(\varphi_\mu)\right] \frac{\partial f'}{\partial x'_\mu}.$$

Durch Einführung der neuen Variabeln x' geht hiernach das vollständige System:

$$(6) \qquad A_i^{i-1}(f) = 0, \quad A_{i+1}^{i}(f) = 0, \cdots A_m^{m-1}(f) = 0$$

über in das folgende:

$$\sum_{h=i}^{h=m} \left[A_i^{i-1}(x_h)\right] \frac{\partial f'}{\partial x_h} + \sum_{\mu=m+1}^{\mu=n} \left[A_i^{i-1}(\varphi_\mu)\right] \frac{\partial f'}{\partial x'_\mu} = 0,$$

$$\sum_{h=i+1}^{h=m} \left[A_{i+1}^{i}(x_h)\right] \frac{\partial f'}{\partial x_h} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left[A_m^{m-1}(x_m)\right] \frac{\partial f'}{\partial x_m} = 0.$$

Die $m-i$ letzten Gleichungen ergeben aber:

$$\frac{\partial f'}{\partial x_m} = 0, \cdots \frac{\partial f'}{\partial x_{i+1}} = 0.$$

Jede Lösung f des Systems (6) geht also durch die Substitution [ ] über in eine von $x_{i+1}, \cdots x_m$ freie Lösung f' der Gleichung:

$$(7) \qquad \frac{\partial f'}{\partial x_i} + \sum_{\mu=m+1}^{\mu=n} \left[\frac{A_i^{i-1}(\varphi_\mu)}{A_i^{i-1}(x_i)}\right] \frac{\partial f'}{\partial x'_\mu} = 0.$$

Nun besitzt das vollständige System (6) $n-m$ Lösungen, die von einander unabhängig in Bezug auf $x_{m+1}, \cdots x_n$ sind. Die Gleichung (7) muss folglich $n-m$ Lösungen zulassen, die frei von $x_{i+1}, \cdots x_m$ und unabhängige Functionen von $x'_{m+1}, \cdots x'_n$ sind. Jede dieser Lösungen genügt aber, wenn man unter x eine beliebige der Variabeln $x_{i+1}, \cdots x_m$ versteht, mit der Gleichung (7) zugleich auch der Gleichung:

$$(8) \qquad \sum_{\mu=m+1}^{\mu=n} \frac{\partial f'}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{A_i^{i-1}(\varphi_\mu)}{A_i^{i-1}(x_i)} \right] = 0,$$

die man erhält, wenn man unter Voraussetzung eines von x freien f' die Gleichung (7) nach x differentiirt.

Die Gleichung (8) müsste also, falls sie keine Identität wäre, $n-m$ in Bezug auf $x'_{m+1}, \cdots x'_n$ unabhängige Lösungen besitzen. Das ist aber unmöglich, da sie nur die $n-m$ Differentialquotienten $\frac{\partial f'}{\partial x'_{m+1}}, \cdots \frac{\partial f'}{\partial x'_n}$ enthält. Sie muss daher nothwendig an und für sich identisch sein, d. h. es muss jedes

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{A_i^{i-1}(\varphi_\mu)}{A_i^{i-1}(x_i)} \right] = 0$$

sein, oder es müssen sich die sämmtlichen Ausdrücke

$$\frac{A_i^{i-1}(\varphi_\mu)}{A_i^{i-1}(x_i)}$$

als blosse Functionen von $x_1, \cdots x_i, \varphi_{m+1}, \cdots \varphi_n$ darstellen. Als solche sind sie aber selbst wieder Lösungen des Systems (5), in dem $x_1, \cdots x_i$ nur als Constanten auftreten. Man hat also den Satz:

I. *Es sei:*

$$A_1(f) = 0, \quad A_2^1(f) = 0, \cdots A_m^{m-1}(f) = 0,$$

wo allgemein $A_i^{i-1}(f)$ *die Form besitzt*

$$A_i^{i-1}(f) = \sum_{h=i}^{h=n} b_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h}$$

und $A_i^{i-1}(x_i)$ *nicht Null ist, ein vollständiges System. Wenn dann* $f = \varphi$ *eine gemeinsame Lösung der* $m-i$ *letzten Gleichungen dieses Systems ist, so ist zugleich stets auch*

$$f = \frac{A_i^{i-1}(\varphi)}{A_i^{i-1}(x_i)}$$

eine solche.

Hieraus ergiebt sich nun sofort eine Methode, um von einer gegebenen gemeinsamen Lösung der $m-i$ letzten Gleichungen (3) oder der Gleichungen (5) zu einer gemeinsamen Lösung der $m-i+1$ letzten Gleichungen (3) zu gelangen.

Ist nämlich $f = \varphi_1$ die gegebene Lösung, so sind nach I. auch

$$(9)\quad \varphi_2 = \frac{A_i^{i-1}(\varphi_1)}{A_i^{i-1}(x_i)},\quad \varphi_3 = \frac{A_i^{i-1}(\varphi_2)}{A_i^{i-1}(x_i)},\quad \cdots\quad \varphi_{k+1} = \frac{A_i^{i-1}(\varphi_k)}{A_i^{i-1}(x_i)}$$

gemeinsame Lösungen der Gleichungen (5). Diese Gleichungen besitzen aber nur $n-m$ von einander unabhängige gemeinsame Lösungen. Wenn daher φ_{k+1} die erste der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ ist, die sich durch die vorhergehenden und $x_1, x_2, \cdots x_i$ allein ausdrücken lässt, so muss

$$k \leq n - m$$

sein. Setzt man nun

$$f = f'(x_1, \cdots x_i, \varphi_1, \cdots \varphi_k),$$

so geht, wenn man sie durch $A_i^{i-1}(x_i)$ dividirt, die Gleichung

$$A_i^{i-1}(f) = 0$$

nach (9) über in:

$$(10)\quad \frac{\partial f'}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \varphi_{\lambda+1} \frac{\partial f'}{\partial \varphi_\lambda} = 0.$$

In diese Gleichung gehen nur $x_1, \cdots x_i, \varphi_1, \cdots \varphi_k$, also nur solche Grössen ein, die Lösungen des Systems (5) sind. Jede Lösung der Gleichung (10) ist demnach eine gemeinsame Lösung der $m-i+1$ letzten Gleichungen (3). Man findet also eine Lösung dieser Gleichungen durch Ermittelung eines Integrales des Systems von k gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$dx_i : d\varphi_1 : \cdots : d\varphi_{k-1} : d\varphi_k$$
$$= 1 : \varphi_2 : \cdots : \varphi_k : \varphi_{k+1},$$

oder durch eine Operation von der Ordnung $k \leq n - m$.

Zur Auffindung einer Lösung des gegebenen vollständigen Systems (1) bietet sich hiernach der folgende Weg dar:

Man bringt zunächst durch successive Auflösung seiner Gleichungen und Substitution der Auflösungen das System auf die Weiler'sche Form (3), was, eventuell nach passender Vertauschung der Variabeln, immer möglich ist.

Man bestimmt hierauf durch eine Operation von der Ordnung $n-m$ eine Lösung der letzten Gleichung (3). Durch eine Operation von höchstens $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung erhält man daraus eine gemeinsame Lösung der beiden letzten Gleichungen (3). Eine Operation, die wiederum höchstens von der Ordnung $n-m$ ist, liefert sodann eine gemeinsame Lösung der drei letzten Gleichungen (3) u. s. f., so dass also zur Ermittelung einer gemeinsamen Lösung des ganzen vollständigen Systems von m Gleichungen mit n unabhängigen Variabeln

erforderlich sind eine Operation von der Ordnung $n-m$ und $m-1$ Operationen, deren jede höchstens von der Ordnung $n-m$ ist.

Meine Methode*) erreicht dasselbe Ziel durch eine einzige Operation von der Ordnung $n-m$.

§ 2.

Die Weiler'schen Systeme, auf die sich das allgemeine Problem der Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen lässt.

Lie hat gezeigt**), dass die vollständige Integration einer gegebenen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\varphi_1(x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n) = c_1,$$

in der $p_1, \cdots p_n$ die partiellen Differentialquotienten der unbekannten Function nach den unabhängigen Variabeln $x_1, \cdots x_n$ bedeuten, darauf zurückgeführt werden kann, $n-1$ Functionen $\varphi_2, \cdots \varphi_n$ der $2n$ unabhängigen Variabeln $x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n$ zu finden, die paarweise den Bedingungen:

$$(\varphi_k \varphi_h) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_h}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} \right) = 0$$

Genüge leisten und von einander wie von φ_1 unabhängig sind.

Hat man die Functionen $\varphi_2, \cdots \varphi_i$ bereits gefunden, so ist φ_{i+1} zu bestimmen als eine von $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_i$ unabhängige gemeinsame Lösung der i Gleichungen:

$$(1) \qquad (\varphi_1 f) = 0, \quad (\varphi_2 f) = 0, \cdots (\varphi_i f) = 0.$$

Diese i Gleichungen, von denen, wie aus der Unabhängigkeit der Functionen $\varphi_1, \cdots \varphi_i$ sofort erhellt, keine eine blosse algebraische Folge der übrigen ist, bilden bekanntlich wegen der Voraussetzungen $(\varphi_k \varphi_h) = 0$ ein vollständiges System.

Man kann sich davon sofort überzeugen, wenn man die berühmte Formel von Jacobi, nach welcher für je drei beliebige Functionen f, φ, ψ der $2n$ Variabeln x, p identisch

$$(f, (\varphi\psi)) + (\varphi, (\psi f)) + (\psi, (f\varphi)) = 0$$

ist, mit dem bekannten Satze verbindet, dass jedes *Involutionssystem*, d. h. jedes System von einander unabhängiger linearer partieller Differentialgleichungen

---

*) Math. Annalen Bd. V, p. 465.

**) Math. Annalen Bd. VIII, p. 245. Vgl. auch p. 318 desselben Bandes.

$$A_1(f) = 0, \quad A_2(f) = 0, \cdots A_m(f) = 0,$$

deren linke Seiten den Bedingungen:

$$A_i(A_k f) - A_k(A_i f) = 0$$

genügen, zugleich ein vollständiges System ist, ein Satz, für den Lie, p. 249 dieses Bandes, einen einfachen directen Beweis mitgetheilt hat.

Da nämlich $(\psi, f\varphi) = -(\psi, (\varphi f))$ ist, so ergiebt die Jacobi'sche Identität unter der Voraussetzung $(\varphi\psi) = 0$:

$$(\varphi, \psi f) - (\psi, \varphi f) = 0.$$

So oft also $(\varphi\psi) = 0$ ist, besteht zwischen den Operationen:

$$A(f) = (\varphi f), \quad B(f) = (\psi f)$$

die Beziehung:

$$A(Bf) - B(Af) = 0.$$

In Folge der Annahmen $(\varphi_i\varphi_k) = 0$ liegt aber dieser Fall eben beim System (1) vor und dieses ist also ein Involutionssystem*).

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich zugleich auch noch der Poisson-Jacobi'sche Satz, den ich hier gleich in der speciellen Form ausspreche, in der wir ihn später benutzen werden:

Wenn $h < i$ und $f = \alpha$ eine Lösung des Involutionssystems

$$(\varphi_1 f) = 0, \quad (\varphi_2 f) = 0, \cdots (\varphi_h f) = 0$$

*) Ich benutze diese Gelegenheit, um den schönen Beweis zu veröffentlichen, den Clebsch in seinen Vorlesungen von der Jacobi'schen Identität gab:

Man sieht unmittelbar, dass sich, so oft $A(f)$ und $B(f)$ irgend zwei Ausdrücke von der Form

$$A(f) = \sum_{k=1}^{k=m} a_k \frac{\partial f}{\partial y_k}, \qquad B(f) = \sum_{k=1}^{k=m} b_k \frac{\partial f}{\partial y_k}$$

bedeuten, bei der Operation

$$A(B(f)) - B(A(f))$$

die zweiten partiellen Differentialquotienten der Function f von selbst wegheben. Daraus ergiebt sich sofort, dass der Ausdruck

$$M = (f, (\varphi\psi)) + (\varphi, (\psi f)) + (\psi, (f\varphi))$$

von keiner der 3 Functionen f, φ, ψ zweite Differentialquotienten enthält. In der That zweite Differentialquotienten von f z. B. könnten nur herrühren von der Summe

$$(\varphi, (\psi f)) + (\psi, (f\varphi)).$$

Diese aber ist, wie oben gezeigt wurde, ein Ausdruck von der Form

$$A(B(f)) - B(A(f))$$

und folglich frei von den zweiten Differentialquotienten von f. Andrerseits enthält in Folge seiner Zusammensetzung der Ausdruck M kein Glied, in welchem nicht ein zweiter Differentialquotient von f, φ oder ψ vorkäme. Also kann M nur den Werth Null haben.

ist, so ist stets auch

$$f = (\varphi_i \alpha)$$

eine solche. —

Das vollständige System (1) besitzt nun i bekannte Lösungen $f = \varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_i$. Man könnte daher, indem man diese i Lösungen als neue Variable einführte, die Gleichungen (1) auf ein vollständiges System von i Gleichungen mit nur noch $2n - i$ unabhängigen Variabeln zurückführen, und auf dieses reducirte System, nachdem man es durch successive Auflösung seiner Gleichungen und Substitution der Auflösungen auf die Weiler'sche Form gebracht hat, direct die Methode des vorigen § anwenden.

Wollte man aber auf diesem nächstliegenden Wege diejenigen Gleichungen aufstellen, aus denen nach jener Methode die Function φ_{i+1} zu berechnen ist, so würde man schwerlich die wichtige Eigenschaft dieser Gleichungen entdecken, auf die sich die eigentliche Weiler'sche Vereinfachung des Integrationsgeschäfts gründet.

Wir wollen daher die Reduction des vollständigen Systems (1) auf die Weiler'sche Form auf einem andern indirecten Wege ausführen.

Nach Voraussetzung sind die bereits bekannten Functionen φ_1, $\varphi_2, \cdots \varphi_i$, die in den gegenseitigen Beziehungen $(\varphi_h \varphi_k) = 0$ stehen, von einander unabhängig. Für jedes $h \leq i$ bestimmen daher die h Gleichungen

$$\varphi_1 = c_1, \quad \varphi_2 = c_2, \cdots \varphi_h = c_h \tag{2}$$

h von den $2n$ Variabeln $x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n$ als Functionen der übrigen und der c. Diese $2n$ Variabeln sind überdies einander paarweise zugeordnet. Ich will dieselben, in irgend einer Reihenfolge genommen, durch $u_1, \cdots u_n, v_1, \cdots v_n$ bezeichnen, in der Art, dass $u_1, \cdots u_n$ irgend n verschiedene der x, p bedeuten sollen und v_k die der Variabeln u_k zugeordnete, so dass also z. B. $v_k = x_k$ ist, wenn $u_k = p_k$ gesetzt wird. Dabei sollen stets $u_1, u_2, \cdots u_h$ solche h der Variabeln x, p bezeichnen, die sich aus den Gleichungen (2) bestimmen lassen.

Der Deutlichkeit halber möge die Substitution der Werthe von $u_1, \cdots u_h$, die sich aus den Gleichungen (2) ergeben, durch das Zeichen $[\ ]^h$ oder auch kurzweg durch Beifügung des oberen Index h angezeigt werden. Bei dieser Festsetzung ist für jedes $h \leq i$

$$[f]^i = [f^h]^i = f^i$$

und $\dfrac{\partial \varphi_h^{h-1}}{\partial u_h}$ verschieden von Null. Endlich bedeute w eine beliebige der Variabeln x, p. —

Aus der Identität $[f]^1 = f^1$, die durch Substitution des Werthes von u_1 aus der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ hervorgeht, folgt:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \omega}\right]^1 = \frac{\partial f^1}{\partial \omega} + \frac{\partial f^1}{\partial c_1}\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \omega}\right]^1$$

Substituirt man diese Werthe der $\left[\frac{\partial f}{\partial \omega}\right]^1$ in den Ausdruck $(\varphi_h f)^1$, der eine lineare homogene Function dieser Grössen ist, so ergiebt sich für $h = 1, 2, \cdots i$ wegen $(\varphi_h \varphi_1) = 0$

$$(\varphi_h f)^1 = (\varphi_h f^1)^1, \tag{3}$$

eine Formel, die wie mehrere der folgenden auch direct aus der bekannten Art hätte gezogen werden können, in der man eine Charakteristik mit Hülfe gegebener Lösungen um ebensoviel Glieder verkürzt.

Setzt man in der vorletzten Formel $f = \varphi_h$, wo $h > 1$, und wendet dieselbe alsdann auf den Ausdruck $(\varphi_h f^1)^1$ an, so folgt weiter:

$$(\varphi_h f^1)^1 = (\varphi_h^1 f^1) + \frac{\partial \varphi_h^1}{\partial c_1}(\varphi_1 f^1)^1.$$

Man hat somit die identischen Formeln:

$$\begin{cases} (\varphi_1 f)^1 = (\varphi_1 f^1)^1, \\ (\varphi_h f)^1 = (\varphi_h^1 f^1) + \frac{\partial \varphi_h^1}{\partial c_1}(\varphi_1 f^1)^1. \end{cases} \tag{4}$$

In Folge der Voraussetzungen $(\varphi_1 \varphi_\lambda) = (\varphi_h \varphi_\lambda) = 0$ ist hiernach auch

$$(\varphi_h^1 \varphi_\lambda^1) = 0.$$

Ueberdies entsteht der Ausdruck $(\varphi^1 \psi^1)$ aus den beiden Functionen φ^1 und ψ^1 genau ebenso wie der Ausdruck $(\varphi\,\psi)$ aus φ und ψ. Daher bilden für jedes $h < i$ die Gleichungen

$$(\varphi_2^1 f^1) = 0, \quad (\varphi_3^1 f^1) = 0, \cdots (\varphi_h^1 f^1) = 0 \tag{5}$$

ein Involutionssystem.

Aus der Identität

$$[\varphi_h^1]^{h-1} = \varphi_h^{h-1}$$

ferner, welche entsteht, wenn man in der Function φ_h^1 für $u_2, \cdots u_{h-1}$ die Werthe setzt, die sich aus den Gleichungen

$$\varphi_2^1 = c_2, \cdots \varphi_{h-1}^1 = c_{h-1}$$

ergeben, erhält man die Formel:

$$\left[\frac{\partial \varphi_h^1}{\partial \omega}\right]^{h-1} = \frac{\partial \varphi_h^{h-1}}{\partial \omega} + \sum_{k=2}^{\lambda=h-1} \frac{\partial \varphi_h^{h-1}}{\partial c_\lambda}\left[\frac{\partial \varphi_\lambda^1}{\partial \omega}\right]^{h-1}$$

und durch Anwendung derselben:

$$(6) \qquad (\varphi_h^1 f^1)^{h-1} = (\varphi_h^{h-1} f^1)^{h-1} + \sum_{\lambda=2}^{\lambda=h-1} \frac{\partial \varphi_h^{h-1}}{\partial c_\lambda} (\varphi_\lambda^1 f^1)^{h-1}.$$

Ebenso folgt aus der durch die Gleichungen $\varphi_2^1 = c_2, \cdots \varphi_i^1 = c_i$ identischen Formel $[f^1]^i = f^i$:

$$\left[\frac{\partial f^1}{\partial \omega}\right]^i = \frac{\partial f^i}{\partial \omega} + \sum_{k=2}^{k=i} \frac{\partial f^i}{\partial c_k} \left[\frac{\partial \varphi_k^1}{\partial \omega}\right]^i$$

und hieraus, weil nach (4) auch $(\varphi_1 \varphi_k^1)^1 = 0$ ist:

$$(7) \qquad (\varphi_1 f^1)^i = (\varphi_1 f^i)^i,$$

eine Formel, die von derselben Natur ist, wie die Formel (3).

Macht man endlich unter der Voraussetzung $h \leq i$ in der Identität (6) die Substitution $[\,]^i$ und wendet sodann auf $(\varphi_h^{h-1} f^1)^i$ die vorletzte Formel an, so ergiebt sich:

$$(\varphi_h^1 f^1)^i = (\varphi_h^{h-1} f^i)^i + \sum_{k=2}^{k=i} \frac{\partial f^i}{\partial c_k} (\varphi_h^{h-1} \varphi_k^1)^i + \sum_{\lambda=2}^{\lambda=h-1} \left[\frac{\partial \varphi_h^{h-1}}{\partial c_\lambda}\right]^i (\varphi_\lambda^1 f^1)^i.$$

Wegen $(\varphi_\lambda^1 \varphi_k^1) = 0$ ist aber nach (6) auch $(\varphi_h^{h-1} \varphi_k^1)^{h-1} = 0$, folglich bleibt nur:

$$(8) \qquad (\varphi_h^1 f^1)^i = (\varphi_h^{h-1} f^i)^i + \sum_{\lambda=2}^{\lambda=h-1} \left[\frac{\partial \varphi_h^{h-1}}{\partial c_\lambda}\right]^i (\varphi_\lambda^1 f^1)^i.$$

Die Verbindung der Formeln (7) und (8) mit den Formeln (4) zeigt nun, wenn man der Reihe nach $h = 2, 3, \cdots i$ setzt, dass durch die Substitution $[\,]^i$ jede von $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_i$ unabhängige Lösung f des vollständigen Systems (1) übergeführt wird in eine Lösung f^i des Systems mit nur noch $2n-i$ unabhängigen Variabeln

$$(9) \qquad (\varphi_1 f^i)^i = 0, \quad (\varphi_2^1 f^i)^i = 0, \cdots (\varphi_i^{i-1} f^i)^i = 0,$$

während umgekehrt durch die Substitution $c_1 = \varphi_1, c_2 = \varphi_2, \cdots c_i = \varphi_i$ jede Lösung f^i des letzteren Systems wieder übergeht in eine von $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_i$ unabhängige Lösung des gegebenen Systems (1), so dass man dieses ersetzen kann durch das System (9).

Hieraus ergiebt sich ohne Weiteres, dass auch das System (9) wiederum ein vollständiges System (9) ist.

Das System (9) aber hat die Weiler'sche Form. Denn, da φ_h^{h-1} frei ist von $u_1, u_2, \cdots u_{h-1}$ und in dem Ausdrucke $(\varphi_h^{h-1} f^i)^i$ der Differentialquotient $\frac{\partial f^i}{\partial v_k}$ nur in dem Gliede

$$\pm\left[\frac{\partial \varphi_h^{h-1}}{\partial u_k}\right]^i \frac{\partial f^i}{\partial v_k}$$

vorkommt, so enthält jede folgende Gleichung des Systems (9) einen der Differentialquotienten

$$\frac{\partial f^i}{\partial v_1}, \quad \frac{\partial f^i}{\partial v_2}, \quad \cdots \quad \frac{\partial f^i}{\partial v_{i-1}}$$

weniger als die vorhergehende und es ist:

$$(\varphi_h^{h-1} v_h)^i = \pm\left[\frac{\partial \varphi_h^{h-1}}{\partial u_h}\right]^i,$$

also verschieden von Null.

Sobald also die Functionen $\varphi_2, \cdots \varphi_i$ bereits bekannt sind, können wir unmittelbar aus ihnen und der gegebenen Function φ_1 das Weiler'sche System bilden, von welchem die nächste der gesuchten Functionen abhängt.

Es bleibt aber noch übrig, die besprochene wichtige Eigenschaft der Gleichungen (9) zu finden.

Hierzu werden uns wieder die Formeln (7) und (8) verhelfen.

Diese lehren nämlich auch noch, dass durch die Substitution $[\ ]^i$ das Involutionssystem (5) verwandelt wird in das folgende System:

$$(10) \qquad (\varphi_2^1 f^i)^i = 0, \quad (\varphi_3^2 f^i)^i = 0, \cdots (\varphi_h^{h-1} f^i)^i = 0,$$

welches sonach ebenfalls ein vollständiges System ist.

Umgekehrt, wenn $f^i = \alpha^i$ eine Lösung des Systems (10) ist und durch die Substitution $c_2 = \varphi_2^1, \cdots c_i = \varphi_i^1$ die Function α^i übergeht in α^1, so ist $f^1 = \alpha^1$ eine Lösung des Involutionssystems (5). Unter der Voraussetzung $h < i$ ist aber nach dem Poisson-Jacobi'schen Satze mit $f^1 = \alpha^1$ zugleich auch

$$f^1 = (\varphi_i^1 \alpha^1)$$

eine Lösung dieses Systems und jede Lösung f^1 desselben geht durch die Substitution $[\ ]^i$ in eine Lösung f^i des vollständigen Systems (10) über. Mit $f^i = \alpha^i$ ist daher alsdann auch

$$f^i = (\varphi_i^1 \alpha^1)^i$$

eine Lösung von (10). Nach (8) ist aber

$$(\varphi_i^1 \alpha^1)^i = (\varphi_i^{i-1} \alpha^i)^i.$$

Man hat demnach den Satz:

II. *Wenn $f^i = \alpha^i$ eine Lösung des vollständigen Systems* (10) *und in diesem $h < i$ ist, so ist stets auch*

$$f^i = (\varphi_i^{i-1} \alpha^i)^i$$

eine Lösung dieses Systems,
welches eben die gesuchte Eigenschaft der Gleichungen (9) ist.

Endlich, wenn man eine Lösung $f^i = \varphi_{i+1}^i$ des Systems (9) gefunden hat und die Substitution der Werthe von $u_1, u_2, \cdots u_{i+1}$, die aus den Gleichungen:

$$\varphi_1 = c_1, \quad \varphi_2^1 = c_2, \cdots \varphi_{i+1}^i = c_{i+1}$$

folgen, durch den obern Index $i+1$ andeutet, so hat man noch

$$(\varphi_h^{h-1} f^i)^{i+1} = (\varphi_h^{h-1} f^{i+1})^{i+1}.$$

Aus dieser Formel, die wiederum von der Natur der Formel (3) ist, fliesst im Besondern der Satz:

III. Wenn $f^i = \alpha^i$ irgend eine von v_1 und φ_{i+1}^i unabhängige Lösung des Systems:

$$(\varphi_2^1 f^i)^i = 0, \quad (\varphi_3^2 f^i)^i = 0, \cdots (\varphi_i^{i-1} f^i)^i = 0$$

ist, so ist $f^{i+1} = \alpha^{i+1}$ eine Lösung des Systems:

$$(\varphi_2^1 f^{i+1})^{i+1} = 0, \quad (\varphi_3^2 f^{i+1})^{i+1} = 0, \cdots (\varphi_i^{i-1} f^{i+1})^{i+1} = 0.$$

§ 3.

Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Nach dem zu Grunde gelegten Satze von Lie ist mit der Zurückführung des Involutionssystems (1) auf das Weiler'sche System (9) zugleich ein Weg direct vorgezeichnet, auf dem man die Methode des § 1. zur Integration der gegebenen partiellen Differentialgleichung $\varphi_1 = c_1$ verwenden kann.

Das System (9), dessen Aufstellung voraussetzt, dass man bereits $i-1$ von einander wie von φ_1 unabhängige Functionen $\varphi_2, \cdots \varphi_i$ kenne, die den Bedingungen $(\varphi_h \varphi_k) = 0$ genügen, enthält i Gleichungen und $2n-i$ unabhängige Variabeln.

Nach § 1. findet man also eine Lösung $f^i = \varphi_{i+1}^i$ desselben durch eine Operation von der Ordnung $2n-2i$ und durch $i-1$ Operationen, von denen eine jede höchstens von derselben Ordnung ist.

Sobald daher die Functionen $\varphi_2, \cdots \varphi_i$ bereits bekannt sind — und bei den partiellen Differentialgleichungen der Dynamik kann man ja meistens aus den allgemeinen Principien selbst eine Reihe solcher Functionen erhalten *) — erfordert der nächste Schritt zur Integration

*) Vgl. Lie, Math. Annalen Bd. VIII, p. 282.

der gegebenen partiellen Differentialgleichung in der Weiler'schen Methode ebensoviel Integrationen wie in der Jacobi'schen Methode; auch lässt sich nicht a priori entscheiden, ob die Ordnungen dieser Integrationen in der einen Methode niedriger ausfallen werden als in der andern. Es zeigt sich also bei diesem ersten Schritte noch durchaus kein Vortheil der Weiler'schen Methode vor der von Jacobi.

Aber dies Verhältniss ändert sich, sobald man nun weiter geht. Während nach der Jacobi'schen Methode auch zur Ermittelung von φ_{i+2} wesentlich dasselbe Verfahren wiederholt werden muss, welches bereits φ_{i+1} ergab, kann im Allgemeinen durch Verwerthung von Resultaten, die gewissermassen als Nebenproducte bei der Gewinnung von φ_{i+1} erhalten wurden, die Weiler'sche Methode jetzt eine sehr bemerkenswerthe Vereinfachung eintreten lassen, die eben das eigentlich Charakteristische an dieser Methode ist.

Um diese Vereinfachung richtig verstehen zu können, müssen wir zunächst die Operationen wirklich aufstellen, durch welche nach dem Vorhergehenden die Function φ_{i+1}^i gefunden wird.

Zur Bestimmung dieser Function hat man zuerst eine Lösung der Gleichung zu suchen:

$$(\varphi_i^{i-1} f^i)^i = 0,$$

dann eine gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen:

$$(\varphi_{i-1}^{i-2} f^i)^i = 0, \quad (\varphi_i^{i-1} f^i)^i = 0$$

u. s. w. Endlich, nachdem man eine gemeinsame Lösung der $i-1$ Gleichungen:

$$(11) \qquad (\varphi_2^1 f^i)^i = 0, \quad (\varphi_3^2 f^i)^i = 0, \cdots (\varphi_i^{i-1} f^i)^i = 0$$

gefunden hat, wird eine gemeinsame Lösung aller i Gleichungen (9) in folgender Weise gewonnen:

Es sei $f^i = \alpha_1^i$ die gefundene Lösung des Systems (11). Man berechnet daraus nach Satz I. die neuen Lösungen:

$$\alpha_2^i = \frac{(\varphi_1 \alpha_1^i)^i}{(\varphi_1 v_1)^i}, \quad \alpha_3^i = \frac{(\varphi_1 \alpha_1^i)^i}{(\varphi_1 v_1)^i}, \cdots,$$

bis zur ersten Function α_{k+1}^i, die sich durch die vorhergehenden und v_1 allein ausdrücken lässt, was nothwendig für ein $k \leq 2n - 2i$ eintreten muss.

Indem man dann:

$$f^i = F^i(x_1 \alpha_1^i \alpha_2^i \cdots \alpha_k^i)$$

setzt, verwandelt man die Gleichung $(\varphi_1 f^i)^i = 0$ in die folgende:

$$(12) \qquad \frac{\partial F^i}{\partial v_1} + \sum_{h=1}^{h=k} \alpha^i_{h+1} \frac{\partial F^i}{\partial \alpha^i_h} = 0 .$$

Jede Lösung dieser Gleichung, deren unabhängige Variable v_1, $\alpha^i_1, \cdots \alpha^i_k$ sind, liefert eine gemeinsame Lösung $f^i = \varphi^i_{i+1}$ des ganzen Systems (9).

Nachdem somit φ^i_{i+1} gefunden ist, kommt es nunmehr darauf an, eine Lösung $f^{i+1} = \varphi^{i+1}_{i+2}$ des Weiler'schen Systems

$$(13) \quad (\varphi_1 f^{i+1})^{i+1} = 0, \quad (\varphi^1_2 f^{i+1})^{i+1} = 0, \cdots (\varphi^i_{i+1} f^{i+1})^{i+1} = 0$$

zu finden, in welchem der obere Index $i+1$ die Substitution der aus den Gleichungen

$$\varphi_1 = c_1, \quad \varphi^1_2 = c_2, \cdots \varphi^i_{i+1} = c_{i+1}$$

folgenden Werthe der Variabeln $u_1, u_2, \cdots u_{i+1}$ anzeigt.

Nun wird man im Allgemeinen bei der Aufstellung der Gleichung (12) ausser φ^i_{i+1} noch eine andere Lösung $f^i = \beta^i_1$ des Systems (11) gefunden haben, die durch die Substitution des Werthes von u_{i+1} aus der Gleichung $\varphi^i_{i+1} = c_{i+1}$ nicht in eine blosse Function von v_1 übergeht. Dies ist in der That immer der Fall, sobald in (12) $k > 1$ ist. Nach III. verwandelt sich diese Lösung durch die genannte Substitution in eine Lösung $f^{i+1} = \beta^{i+1}_1$ des Systems:

$$(14) \quad (\varphi^1_2 f^{i+1})^{i+1} = 0, \quad (\varphi^2_3 f^{i+1})^{i+1} = 0, \cdots (\varphi^{i-1}_i f^{i+1})^{i+1} = 0.$$

Mit β^{i+1}_1 sind aber nach dem Satze II., in welchem jetzt i mit $i+1$ zu vertauschen ist, gleichzeitig auch:

$$(15) \qquad \beta^{i+1}_2 = (\varphi^i_{i+1} \beta^{i+1}_1)^{i+1}, \quad \beta^{i+1}_3 = (\varphi^i_{i+1} \beta^{i+1}_2)^{i+1}, \cdots$$

Lösungen des Systems (14). Es sei $\beta^{i+1}_{\lambda+1}$ die erste der Functionen $\beta^{i+1}_1, \beta^{i+1}_2, \cdots$, die sich durch die vorhergehenden und v_1 allein ausdrücken lässt. Dann muss

$$\lambda \leq 2n - 2i - 1$$

sein, weil das vollständige System (14) $i-1$ Gleichungen und nur $2n - i - 2$ wirkliche Variable enthält, also nur

$$2n - i - 2 - (i-1) = 2n - 2i - 1$$

unabhängige Lösungen zulässt.

Nimmt man nun

$$f^{i+1} = F^{i+1}(v_1, \beta^{i+1}_1, \cdots \beta^{i+1}_\lambda),$$

so wird hierdurch die Gleichung:

$$(\varphi^i_{i+1} f^{i+1})^{i+1} = 0$$

übergeführt in die folgende:

$$\sum_{h=1}^{h=\lambda}\left(\varphi_{i+1}^{i}\beta_{h}^{i+1}\right)^{i+1}\frac{\partial F^{i+1}}{\partial \beta_{h}^{i+1}}=0,$$

die sich nach (15) so schreiben lässt:

$$\sum_{h=1}^{h=\lambda}\beta_{h+1}^{i+1}\frac{\partial F^{i+1}}{\partial \beta_{h}^{i+1}}=0 \tag{16}$$

und folglich nur solche Grössen enthält, die Lösungen des Systems (14) sind.

Jede Lösung dieser Gleichung — und die Auffindung einer solchen erfordert eine Operation von höchstens $(2n-2i-2)^{\text{ter}}$ Ordnung — liefert eine Lösung des Systems:

$$(\varphi_2^1 f^{i+1})^{i+1}=0,\quad (\varphi_3^2 f^{i+1})^{i+1}=0,\quad \cdots\ (\varphi_{i+1}^{i} f^{i+1})^{i+1}=0. \tag{17}$$

Jedoch muss, falls nicht gerade $\beta_2^{i+1}=0$, also β_1^{i+1} selbst schon eine Lösung dieses Systems ist, $\lambda>1$ sein, wenn die Gleichung (16) eine andere als die evidente und unbrauchbare Lösung $F^{i+1}=$ einer blossen Function von v_1 liefern soll.

Es setzt also diese Art, eine gemeinsame Lösung der Gleichungen (17) zu finden, voraus, dass die Operationen (15) ausser β_1^{i+1} noch wenigstens eine zweite, von dieser und v_1 unabhängige Lösung β_2^{i+1} des Systems (14) geliefert haben, oder aber dass man bereits bei der Bildung der Gleichung (12) zwei von einander, wie von φ_{i+1}^{i} und v_1 unabhängige Lösungen des Systems (11) gefunden habe.

Trifft keine dieser beiden Voraussetzungen zu, so muss man auch zur Bestimmung von φ_{i+2}^{i+1} wieder dasselbe Verfahren anwenden, wie vorher zur Auffindung von φ_{i+1}^{i}. Dann aber war schon bei dieser früheren Aufgabe der sehr günstige Umstand eingetreten, dass der letzte Schritt zur Ermittelung von φ_{i+1}^{i}, die Auffindung einer Lösung der Gleichung (12), nur eine Operation von höchstens 2^{ter} Ordnung erforderte.

Hat man auf die eine oder andere Weise eine Lösung $f^{i+1}=\gamma_1^{i+1}$ des Systems (17) gefunden, so bildet man daraus die neuen

$$\gamma_2^{i+1}=\frac{(\varphi_1\gamma_1^{i+1})^{i+1}}{(\varphi_1 v_1)^{i+1}},\quad \gamma_3^{i+1}=\frac{(\varphi_1\gamma_2^{i+1})^{i+1}}{(\varphi_1 v_1)^{i+1}},\quad \cdots$$

bis zur ersten Function $\gamma_{\mu+1}^{i}$, die sich durch die vorhergehenden und v_1 allein ausdrücken lässt und erhält dann durch Auffindung einer Lösung F^{i+1} der Gleichung

$$\frac{\partial F^{i+1}}{\partial v_1}+\sum_{h=1}^{h=\mu}\gamma_{h+1}^{i+1}\frac{\partial F^{i+1}}{\partial \gamma_h^{i+1}}=0, \tag{17}$$

also durch eine Operation von der Ordnung $\mu \leq 2n - 2i - 2$ eine gemeinsame Lösung $f^{i+1} = \varphi_{i+2}^{i+1}$ des ganzen Systems (13).

Man braucht also, nachdem man bei gegebenem $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_i$ die Function φ_{i+1} bereits durch die Weiler'sche Methode gefunden hat, zur Ermittelung von φ_{i+2} im Allgemeinen nur zwei Operationen, deren jede höchstens von der Ordnung $2n - 2i - 2$ ist, was offenbar der Jacobi'schen Methode gegenüber eine sehr wesentliche Vereinfachung ist.

Dieselbe Ersparung von Integrationen erreicht auch Clebsch durch seine Modification der Jacobi'schen Methode. Indessen muss man doch zugeben, dass das Verfahren von Clebsch umständlicher ist als das Weiler'sche und überdies nur dann zur Anwendung gebracht werden kann, wenn man von dem System, das bei Clebsch an die Stelle des Weiler'schen Systems (11) tritt, ausser der gesuchten Function φ_{i+1} noch zwei andere Lösungen gefunden hat.

Auch im Vergleich zu meiner Methode lässt sich, wie schon in der Einleitung angedeutet wurde, ein Punkt angeben, der in gewisser Hinsicht als ein Vorzug der Weiler'schen Methode angesehen werden kann. Meine Methode nämlich erfordert zur Bestimmung von φ_{i+2}, nachdem $\varphi_2, \varphi_3, \cdots \varphi_{i+1}$ bereits gefunden sind, immer eine Operation von der Ordnung $2n - 2i - 2$, während nach dem Vorhergehenden die beiden Operationen, durch welche sich nach der Weiler'schen Vereinfachung die Function φ_{i+2} im Allgemeinen bestimmen lässt, nur in den allerungünstigsten Fällen diese Ordnung erreichen werden. Auf der andern Seite darf man dagegen nicht übersehen, dass meine Methode den Vortheil hat, von der Gunst oder Ungunst der Fälle ganz unabhängig zu sein, und dass ihr erster Schritt, die Bestimmung von φ_{i+1} bei gegebenem $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_i$ stets nur eine einzige Operation von der Ordnung $2n - 2i$ verlangt, wo die Weiler'sche Methode ausser einer Operation von der Ordnung $2n - 2i$ noch $i - 1$ andere Operationen, die höchstens von derselben Ordnung sind, ausführen muss.

Herr Weiler hebt seltsamer Weise bei der Besprechung meiner Methode nicht den oben angegebenen, sondern ganz einen andern Punkt zu Gunsten seiner Methode hervor. Er betont nämlich als Einwurf gegen meine Methode, dass die eine lineare partielle Differentialgleichung, die bei mir die Stelle der beiden Weiler'schen Gleichungen (16) und (18) vertritt, ausser ihren $2n - 2i - 1$ unabhängigen Variabeln noch i andere Variable als unbestimmte Constanten enthält, was bei den Gleichungen (16) und (18) nicht der Fall ist. Nun steht es allerdings ausser Frage, dass, wenn man in einer und derselben partiellen Differentialgleichung den darin vorkommenden unbestimmten Constanten bestimmte Werthe beilegen darf, hierdurch eine wesentliche Erleichterung für die Integration der Gleichung erzielt werden kann.

Aber dass es nur desshalb schwerer sei, von einer linearen partiellen Differentialgleichung eine Lösung zu finden, als von einer andern, weil die erstere eine Anzahl unbestimmter Constanten enthält, die in der zweiten nicht vorkommen, das ist denn doch offenbar (ganz abgesehen davon, dass im vorliegenden Falle sich nicht zwei Gleichungen gegenüberstehen, sondern eine Gleichung zweien andern), wenn die beiden Gleichungen auch sonst noch ganz anders gebildet sind, eben nur eine Behauptung!

§ 4.

Ueber die Jacobi'sche Behandlung derjenigen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung, in denen die unbekannte Function selbst auftritt.

Am Schlusse seines Aufsatzes kommt Herr Weiler auch auf die Art zu sprechen, wie Jacobi partielle Differentialgleichungen, in denen die unbekannte Function selbst vorkommt, auf solche zurückführt, welche die abhängige Variable explicite nicht mehr enthalten, und wiederholt dabei den alten Einwurf, den man gegen diese Jacobi'sche Reduction gemacht hat.

Wenn nämlich:

$$z = F\left(x_1, \cdots x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \tag{1}$$

die gegebene partielle Differentialgleichung ist, so verwandelt Jacobi dieselbe, indem er durch die Substitution:

$$V = tz \tag{2}$$

eine neue unabhängige Variable t und eine neue unbekannte Function V einführt, in die folgende Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = F\left(x_1, \cdots x_n, \frac{1}{t}\frac{\partial V}{\partial x_1}, \cdots \frac{1}{t}\frac{\partial V}{\partial x_n}\right). \tag{3}$$

Diese Transformation lehrt aber unmittelbar nur, dass man aus jeder Lösung z der Gleichung (1) eine Lösung V der Gleichung (3) erhalten kann, und man kannte kein Mittel, um umgekehrt, worauf es doch gerade ankommt, aus einer beliebigen Lösung V der Gleichung (3) eine Lösung z der Gleichung (1) abzuleiten. Daher verwarf man diese Jacobi'sche Reduction und ersetzte sie durch jene andere, aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen bekannte Transformation, welche an Stelle von z eine endliche Gleichung von der Form:

$$W(z, x_1, \cdots x_n) = \text{const.} \tag{4}$$

sucht, deren Auflösung eine der Gleichung (1) genügende Function z liefert. Man erhält dann für die neue unbekannte Function W die partielle Differentialgleichung:

$$(5) \qquad z = F\left(x_1, \cdots x_n, -\frac{\frac{\partial W}{\partial x_1}}{\frac{\partial W}{\partial z}}, \cdots, -\frac{\frac{\partial W}{\partial x_n}}{\frac{\partial W}{\partial z}}\right).$$

Durch eine nähere Untersuchung des Problems, deren Grundgedanken ich einer brieflichen Mittheilung von Lie verdanke, habe ich mich aber überzeugt, dass durchaus kein Grund vorhanden ist, die Jacobi'sche Reduction aufzugeben. Es gilt nämlich der folgende einfache Satz, durch den die Aufgabe, auf welche diese Reduction hinausläuft, allgemein gelöst wird:

Wenn $V = \varphi(t, x_1, \cdots, x_n)$ *eine Lösung der Gleichung (3) ist, so ist stets*

$$(6) \qquad z = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

eine Lösung der Gleichung (1), vorausgesetzt, dass man, so oft dies möglich ist, für t *den Werth substituirt, der sich aus der Gleichung*

$$(7) \qquad -\varphi + t\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{const.} = c$$

ergiebt.

Von dem nur bei einer ganz besondern Form der Gleichung (3) möglichen Ausnahmefalle einer von t freien Lösung V dieser Gleichung wird natürlich abgesehen.

Zum Beweise dieses Satzes bemerke ich zunächst, dass stets $z = \frac{\partial V}{\partial t}$ an sich eine Lösung der Gleichung (1) ist, so oft in der gegebenen Lösung V der Gleichung (3) die Variable t nur in linearer Weise eingeht. In der That, wenn der Gleichung (3) genügt wird durch

$$V = t\psi + \chi,$$

wo die Functionen ψ und χ frei von t sind, so hat man identisch für jeden Werth von t:

$$\psi = F\left(x_1, \cdots x_n, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{1}{t}\frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n} + \frac{1}{t}\frac{\partial \chi}{\partial x_n}\right).$$

Setzt man aber in dieser Identität, die rechter Hand t nur scheinbar erhalten kann, $t = \infty$, so folgt:

$$\psi = F\left(x_1, \cdots x_n, \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right),$$

also genügt alsdann $z = \psi$ der Gleichung (1). Wir brauchen daher nur noch den Fall zu untersuchen, wo die gegebene Lösung $V = \varphi$ der Gleichung (3) keine lineare Function von t ist.

In diesem Falle kann der Ausdruck

$$-\varphi + t\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

nicht frei von t sein. Denn die Annahme

$$-\varphi + t\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = P,$$

wo P frei von t, ergiebt durch Integration

$$\varphi = tQ - P,$$

wo auch Q eine blosse Function der x ist, und widerspricht also unserer Voraussetzung.

Sobald daher φ nicht linear in Bezug auf t ist, kann die Gleichung (7) stets zur Bestimmung von t benutzt werden. Bezeichnet man nun die Substitution des aus ihr folgenden Werthes von t durch $[\,]$ und setzt:

$$z = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] = \left[\frac{\varphi+c}{t}\right]$$

so wird:

$$\frac{\partial z}{\partial x_h} = \left[\frac{1}{t}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}\right]$$

und daher geht durch die Substitution dieser Werthe von t und von z die Identität:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = F\left(x_1, \cdots x_n, \frac{1}{t}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \cdots \frac{1}{t}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$$

über in die folgende:

$$z = F\left(x_1, \cdots x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right). \quad -$$

Hiermit ist der angegebene Satz bewiesen und die Berechtigung der Jacobi'schen Reduction dargethan.

Ich füge noch hinzu, dass dieselbe nicht nur der andern, in den Formeln (4) und (5) enthaltenen Zurückführungsart ebenbürtig zur Seite steht, sondern überdies vor dieser einen nicht ganz unwesentlichen Vorzug besitzt, der allerdings erst dann richtig zur Geltung gelangt, wenn man nicht eine einzige, sondern mehrere zusammengehörige partielle Differentialgleichungen zwischen denselben Variabeln zu betrachten hat.

Während nämlich beide Verfahren für vollständige oder particuläre Lösungen dasselbe leisten, unterscheiden sie sich wesentlich von einander in ihrem Verhalten gegen singuläre Lösungen. Bei der zweiten Reductionsart schliesst man die letzteren von vornherein aus und daher können durch dieselbe Lösungen ganz und unwiederbringlich verloren gehen, was bei der Jacobi'schen Art unmöglich ist.

In der That jede Lösung z des gegebenen Systems partieller Differentialgleichungen:

$$F_h\left(z, x_1, \cdots x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{8}$$

die man durch Auflösung der Gleichung $W = \text{const.}$ aus einer Lösung W des transformirten Systems

$$(9) \qquad F_k\left(z, x_1, \cdots x_n, -\frac{\frac{\partial W}{\partial x_1}}{\frac{\partial W}{\partial z}}, \cdots -\frac{\frac{\partial W}{\partial x_n}}{\frac{\partial W}{\partial z}}\right) = 0$$

erhalten hat, enthält eine willkürliche Constante.

Wenn daher das gegebene System (8) eine solche Lösung besitzt, die weder selbst willkürliche Constanten enthält, noch auch aus einer Lösung mit willkürlichen Constanten dadurch erhalten werden kann, dass man diesen Constanten bestimmte Werthe beilegt, so ist es unmöglich, diese Lösung auf die angegebene Weise aus einer Lösung W des Systems (9) abzuleiten. Und wenn im Besondern das System (8) keine andere als eine solche singuläre Lösung zulässt, so können die Gleichungen (9) überhaupt keine gemeinsame Lösung besitzen, wenigstens keine, die z enthält, und es geht dann also die Lösung des Systems (8) ganz verloren, wenn man den Gleichungen (8) die Gleichungen (9) substituirt. Ein System von dieser Natur bilden z. B. die beiden Gleichungen:

$$F = 0, \qquad F + z - \varphi = 0,$$

unter der Voraussetzung, dass die erste eine gegebene partielle Differentialgleichung darstellt, von der $z = \varphi$ irgend eine Lösung ist.

Dasjenige System dagegen, welches aus dem gegebenen (8) durch die Substitution $V = zt$ hervorgeht, hat stets eine Lösung, die t enthält, sobald die Gleichungen (8) überhaupt eine gemeinsame Lösung z zulassen, gleichviel ob diese Lösung willkürliche Constanten enthält oder nicht. Daher kann ein solches Verlorengehen von Lösungen bei der Jacobi'schen Reductionsart niemals eintreten. —

Anmerkung. Bei meinen Versuchen, mir die Weiler'sche Methode klar zu machen, hatte ich von vornherein immer nur den mir geläufigeren Fall einer partiellen Differentialgleichung vor Augen, in der die gesuchte Function explicite nicht vorkommt, und es war mir in Folge dessen ein Punkt in der Weiler'schen Abhandlung ganz entgangen, der, erst während des Druckes bemerkt, mich nun nachträglich nöthigt, eine frühere Behauptung zu rectificiren.

Herr Weiler behandelt den allgemeinen Fall, wo in der gegebenen partiellen Differentialgleichung die unbekannte Function selbst auftritt, und legt sogar in seinem letzten § ein ganz besonderes Gewicht darauf, dass er auf die Anwesenheit der abhängigen Variabeln Rücksicht nimmt. In dieser Allgemeinheit genommen sind aber seine Resultate nicht bloss unklar dargestellt, sondern auch gerade-

zu falsch, und zwar desshalb falsch, weil die Ueberschrift des Weiler'schen § 4. ebenso unrichtig ist, wie die Betrachtungen, welche sie beweisen sollen.

Versteht man nämlich unter dem Zeichen $\frac{d}{dx_h}$ die Operation:

$$\frac{d}{dx_h} = \frac{\partial}{\partial x_h} + p_h \frac{\partial}{\partial z}$$

und setzt:

$$[AB] = \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{dA}{dx_h} \frac{\partial B}{\partial p_h} - \frac{\partial A}{\partial p_h} \frac{dB}{dx_h} \right),$$

so treten, wenn die gegebene partielle Differentialgleichung $\varphi_1 = c_1$ die unbekannte Function z selbst enthält, an Stelle der früheren Gleichungen $(\varphi_i \varphi_k) = 0$ nunmehr die Gleichungen

$$[\varphi_i \varphi_k] = 0 .$$

Herr Weiler sucht nun in dem genannten § nachzuweisen, dass auch für diese allgemeineren Gleichungen der Poisson-Jacobi'sche Satz Geltung habe, d. h. dass, wenn $f = \psi$ und $f = \chi$ der Gleichung

$$[\varphi f] = 0$$

genügen, immer auch $f = [\psi \chi]$ eine Lösung dieser Gleichung sei.

Das ist aber falsch. Aus der Jacobi'schen Identität ergiebt sich nämlich bei Anwendung der Jacobi'schen Reduction ohne Schwierigkeit, dass für irgend drei Functionen φ, ψ, χ der $2n + 1$ Variabeln z, $x_1, \cdots x_n$, $p_1, \cdots p_n$ die identische Formel besteht:

$$\begin{aligned} &\big[\varphi, [\psi\chi]\big] + \big[\psi, [\chi\varphi]\big] + \big[\chi, [\varphi\psi]\big] \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} [\psi\chi] + \frac{\partial \psi}{\partial z} [\chi\varphi] + \frac{\partial \chi}{\partial z} [\varphi\psi] , \end{aligned}$$

und hieraus folgt, wenn man $[\varphi\chi] = [\varphi\psi] = 0$ annimmt:

$$[\varphi, [\psi\chi]] = \frac{\partial \varphi}{\partial z} [\psi\chi] ,$$

d. h. wenn $f = \psi$ und $f = \chi$ irgend zwei Lösungen der Gleichung

$$[\varphi f] = 0$$

sind und $[\psi\chi]$ nicht Null ist, so ist $f = [\psi\chi]$ dann und nur dann wiederum eine Lösung dieser Gleichung, wenn die Function φ frei von z ist. —

Ueber eine Behandlungsweise der algebraischen Differentiale in homogenen Coordinaten.

Von

Axel Harnack in Leipzig.

Die nachstehenden Untersuchungen wollen die Behandlungsweisen der algebraischen Differentiale, welche durch drei homogene Variabele, zwischen denen eine Bedingungsgleichung besteht, definirt sind, ausbilden helfen. Die Einführung homogener Coordinaten gewährte zuerst ein zweckmässiges Mittel, um bei der Auswerthung der Integrale vom Geschlecht: $p = 0$ allgemeine Integrationsmethoden zu erkennen, welche durch die bis dahin übliche Form des Differentiales mehr oder minder verdeckt waren. Seitdem aber, zumal durch die Arbeiten von Clebsch, der innere Zusammenhang zwischen der Theorie der algebraischen Differentiale und der Theorie der algebraischen Curven erschlossen ward, musste die Verwerthung homogener Coordinaten bei der Behandlung der Differentiale dieselbe Bedeutung gewinnen, wie bei den Problemen der projectivischen Geometrie; denn ebenso wie hier bildet auch dort die unendlich ferne Gerade der Ebene für die zunächst gestellten Aufgaben nach keinerlei Beziehung eine besonders ausgezeichnete Linie. Nichtsdestoweniger ist seit der grundlegenden Arbeit von Aronhold die Rechnung mit homogenen Differentialen nur wenig gefördert worden. Auch in dem Werke von Clebsch und Gordan (Theorie der Abel'schen Functionen) wird das Differential zwar durch trimetrische Coordinaten zuerst definirt, zu allen weiteren Entwickelungen jedoch in einen Ausdruck mit zwei nicht homogenen Veränderlichen umgewandelt*). Im Folgenden habe ich versucht, *die wesentlichsten Eigenschaften der Differentiale auf Grund ihrer Darstellbarkeit durch homogene Coordinaten einigermassen vollständig abzuleiten*, und

*) In der Bearbeitung der „Vorlesungen über Geometrie von Clebsch" hat Herr Lindemann die Rechnung mit trimetrischen Coordinaten durchaus beibehalten und dem entsprechend für die Ableitung des Jacobi'schen Satzes sowie des Abel'schen Theoremes neue Beweismethoden gegeben. (Vgl. den demnächst erscheinenden zweiten Theil des ersten Bandes: Abth. VI.)

durch diese Aufgabe ist die äussere Form, welche diese Untersuchungen erhalten haben, bedingt.

Die consequente Durchführung der Rechnung mit homogenen Veränderlichen schien sich mir in der That zuvörderst *bei dem Beweise des Additionstheoremes* von neuem zu rechtfertigen. Denn der wesentliche Inhalt desselben, die Zurückführung einer Summe von *irrationalen* Integralen auf eine Summe von *rationalen*, lässt sich vermöge der homogenen Darstellung in anschaulicher Weise mit einer Eigenschaft algebraischer Functionen allgemeinerer Art identificiren, womit zugleich die fertige Form dieser rationalen Integrale, welche zu dem ursprünglichen irrationalen Integrale in sehr einfacher Verwandtschaft stehen, gegeben ist. Diese Eigenschaft war bereits von Jacobi für einen speciellen Fall erkannt und dem entsprechend von Clebsch für den Beweis des Abel'schen Theorems bei den Fällen, in welchen die Summe der irrationalen Integrale constant wird, verwerthet worden. In dem Beweise und in der Erweiterung, welche ich für diesen Satz im § 2. aufgestellt habe, ist, wie ich glaube, das Wesen desselben aufgedeckt, da hier eine wirkliche Rechnung nicht mehr nöthig ist und ausschliesslich mit den Begriffen der algebraischen Formen operirt wird. Diese Erweiterung kann zugleich als ein Corollar zu dem engeren Jacobi'schen Satze gefasst werden, indem man denselben auf eine *zerfallene* Fundamentalcurve anwendet; ebenso ergiebt sich das allgemeine Abel'sche Theorem als eine Folgerung aus dem speciellen, nach welchem die Summe gewisser irrationaler Integrale constant wird, indem man wiederum für diese Integrale eine *reducibele* Curve zu Grunde legt (§ 3.).

Erst mit Zuhilfenahme dieses erweiterten Jacobi'schen Satzes gelingt es ferner, die Methoden, welche Aronhold zur Darstellung des Additionstheorems bei Integralen vom Geschlecht: $p = 0$, welche sich auf einen Kegelschnitt als Fundamentalcurve beziehen, gegeben hat, allgemein auf Differentiale von beliebigem Geschlechte auszudehnen und somit die Endformeln des Abel'schen Theorems, nämlich die Entwickelung einer Summe von rationalen Integralen nach logarithmischen und algebraischen Functionen, ohne jede beschränkende Voraussetzung abzuleiten. Bei diesen Untersuchungen, welche im § 4. ziemlich eingehend erörtert worden sind, kam es mir hauptsächlich darauf an, das Bildungsgesetz anzugeben für die constanten Coefficienten, mit welchen die logarithmischen und algebraischen Functionen, deren Anzahl und deren Form sich noch einfacher aus den Riemann'schen Betrachtungsweisen vorausbestimmen lässt, multiplicirt sind.

Die Behandlung des durch *homogene* Coordinaten definirten Differentiales führte aber auch dazu, nicht blos die Summe, sondern überhaupt *symmetrische Functionen* der für ein Schnittpunktsystem geltenden

Differentialwerthe zu bilden. Die Fragestellungen, welche sich hieran knüpfen und deren Ziele in dem ersten § des *zweiten Abschnittes* näher bezeichnet sind, leiten zur Integration von Differentialgleichungen, welche in der Form von Connexen auch schon bei der Betrachtung der algebraischen Curven nach den Methoden der projectivischen Geometrie als wesentlich erkannt worden sind. Wenn gerade diese Untersuchungen den Zusammenhang des algebraischen Differentiales mit der zu Grunde liegenden Curve noch weiter zu vertiefen bestimmt sind, und damit zugleich die Darstellungsweise desselben durch homogene Coordinaten ebenfalls rechtfertigen werden, so bieten sich doch andererseits für allgemeine Betrachtungen dieser Art gewisse Schwierigkeiten, so dass ich mich zunächst auf die Erörterung der einfachsten Fälle beschränken musste. Von den drei speciellen Problemen, welche sich auf Differentiale vom Geschlecht $p = 0$, 1 und 3 beziehen und bei diesen das Schnittpunktsystem einer Geraden behandeln, sind in dem zweiten Abschnitte die ersten beiden zu einem Abschlusse geführt, während das letzte zunächst nur eine formale Lösung gefunden hat.

Erster Abschnitt.

Das Additionstheorem der algebraischen Differentiale.

§ 1.

Darstellung der zu untersuchenden Differentialausdrücke.

Im 61. Bande des *Journal für die reine und angewandte Mathematik* hat Aronhold*) eine homogene und symmetrische Darstellung der algebraischen Differentiale gegeben, die den Ausgang aller derjenigen Untersuchungen bildet, welche die Theorie der algebraischen Integrale im Zusammenhange mit der Theorie der algebraischen Curven behandeln. In der bald darauf folgenden Abhandlung von Clebsch**) wurde diese Definition auch auf Differentiale mit n homogenen Veränderlichen, zwischen denen $n-2$ Bedingungsgleichungen bestehen, ausgedehnt, während in der Arbeit von Nöther***) auch diejenigen Differentiale, welche zu mehrfachen Integralen Anlass gegeben, in entsprechender Weise definirt sind. Für die nachstehenden

*) Ueber eine neue algebraische Behandlungsweise der Integrale irrationaler Differentiale von der Form: $\Pi(xy) \cdot dx$, in welcher $\Pi(xy)$ eine beliebige rationale Function ist, und zwischen x und y eine allgemeine Gleichung zweiter Ordnung besteht.

**) Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie. Journal, Bd. 63.

***) Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. Math. Annalen Bd. II.

Untersuchungen wird gleichfalls diese Aronhold'sche Form zu Grunde gelegt werden, wobei indessen von vornherein eine formale Aenderung bei der ursprünglichen Definition hervorgehoben werden soll, welche in vielen Fällen dazu dienen wird, bei der Behandlung einzelner Probleme eine Transformation des Differentials ein für allemal zu vermeiden. Durch diese Umformung wird zugleich das Differential als einer bestimmten Gattung von algebraischen Ausdrücken angehörig erscheinen, aus deren Eigenschaften sich alle auf das Differential bezüglichen Sätze ableiten lassen.

Bezeichnet man durch:

$$(1) \qquad f(x_1 x_2 x_3) = a_x^n = 0$$

die Gleichung einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung, bezogen auf Dreieckscoordinaten, so besteht nach dem Euler'schen Satze für jeden Punkt dieser Curve die Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot x_3 = n \cdot f = 0,$$

während die dem Punkte x benachbarten Curvenpunkte $x + dx$ in erster Annäherung bekanntlich der Bedingung:

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot dx_3 = 0$$

genügen müssen. Aus diesen beiden Gleichungen folgt die Proportion:

$$(4) \qquad x_2 dx_3 - x_3 dx_2 : x_3 dx_1 - x_1 dx_3 : x_1 dx_2 - x_2 dx_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Mithin ist der Quotient:

$$\frac{c_1(x_2 dx_3 - x_3 dx_2) + c_2(x_3 dx_1 - x_1 dx_3) + c_3(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)}{\frac{1}{n} \cdot \left(c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)} = \frac{|cx\,dx|}{a_x^{n-1} a_c}$$

von den willkührlichen Grössen c_i völlig unabhängig. Wird derselbe dann noch mit einer Function: $\Theta(x_1 x_2 x_3)$ multiplicirt, welche in den Variabelen x_i rational und homogen ist, und deren Zähler um $n-3$ Ordnungen höher ist als der Nenner, so ist:

$$(5) \qquad D = \frac{|cx\,dx|\,\Theta(x_1 x_2 x_3)}{a_x^{n-1} a_c} \quad \text{(unter der Bedingung: } f = a_x^n = 0)$$

der Aronhold'sche Differentialausdruck, welcher, wie leicht ersichtlich, nun noch von *einer* unabhängigen Veränderlichen bedingt ist.

Eine an sich nicht wesentliche Aenderung, deren Bedeutung an dem hier vorliegenden Falle von drei Variabelen am wenigsten hervortritt, kann nun dadurch getroffen werden, dass man an Stelle des *einen* willkührlichen Punktes mit den Coordinaten: c_i die Coordinaten

zweier willkührlichen Linien ($u_y = 0$ und $v_y = 0$) einführt, welche, falls y laufende Coordinaten bedeuten, durch ihren Durchschnitt den Punkt c bestimmen. Vermittelst der Substitution:

$$\varrho \cdot c_i = \widehat{uv}_i, \text{ das heisst: } \varrho \cdot c_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 \text{ u. s. w.}$$

geht dann das Differential (5) in die Form über:

$$D = \frac{\Theta(x_1 x_2 x_3)\,(u_x v_{dx} - v_x u_{dx})}{a_x^{n-1}\,(auv)}, \tag{6}$$

in deren Nenner nunmehr eine Functionaldeterminante erscheint, auf deren Eigenschaften alle algebraischen Sätze über die zu untersuchenden Differentiale beruhen. Dabei sei insbesondere noch erwähnt, dass an Stelle der willkührlichen Linien: $u_y = 0$ und $v_y = 0$ die linearen Polaren des Punktes x in Bezug auf irgendwelche Curven: $\varphi_y^\mu = 0$ und $\psi_y^\nu = 0$ eingeführt werden können, so dass also die Coordinaten u_i und v_i von den veränderlichen Grössen x abhängig werden. Der Ausdruck (6) nimmt auf diese Weise die allgemeinste Form an:

$$D = \frac{\Theta(x_1 x_2 x_3)\,\varphi_x^{\mu-1}\,\psi_x^{\nu-1}\,(\varphi_x \psi_{dx} - \psi_x \varphi_{dx})}{a_x^{n-1}\,\varphi_x^{\mu-1}\,\psi_x^{\nu-1}\,(a\varphi\psi)}, \quad (a_x^n = 0), \tag{7}$$

wobei also φ_x^μ und ψ_x^ν durchaus willkührliche Grössen bedeuten*).

Dass in der That dieser Ausdruck von den Grössen φ und ψ völlig unabhängig ist, folgt wiederum unmittelbar aus dem Satze der Proportionalität von $\widehat{xdx}_i$ mit $a_x^{n-1} a_i$. Sodann ergiebt sich in Uebereinstimmung hiermit, dass in allen Punkten x der Fundamentalcurve f, in denen der Zähler, abgesehen von der Form Θ, verschwindet, auch der Nenner von der nämlichen Ordnung gleich Null wird, und umgekehrt; denn das Verschwinden des Zählers wie des Nenners besagt, dass sich die Tangente im Punkte x an der Fundamentalcurve a_x^n mit den linearen Polaren des nämlichen Punktes in Bezug auf φ_x^μ und ψ_x^ν in *einem* Punkte schneidet. Auch wenn die Curven: f, φ und ψ gemeinsame Punkte besitzen sollten, bleibt diese Eigenschaft unverändert giltig. Dagegen bilden die etwa vorhandenen *singulären* Punkte der Fundamentalcurve eine Ausnahme; denn für diese Punkte

*) Wenngleich die hier vorangestellte Definition durch die Hinzunahme der Coordinaten *zweier* willkührlichen Linien nicht an Einfachheit zu gewinnen scheint im Vergleich zu der ursprünglichen Definition, welche dem Differentiale nur *einen* willkührlichen Punkt c adjungirt, so möge darauf hingewiesen werden, dass bei den zu Raumcurven oder Linienflächen gehörigen Differentialen zwei Punkt- oder vier Liniencoordinaten gewöhnlich eingeführt werden müssen, welche, dieser Darstellung entsprechend, immer nur durch *zwei* Ebenen- bezüglich *zwei* Complexcoordinaten ersetzt werden.

verschwindet die im Nenner stehende Functionaldeterminante unabhängig von den Curven φ und ψ. Die Null- und Unendlichkeitspunkte des Differentials, d. h. diejenigen Punkte, in welchen der Werth des zu integrirenden Differentiales D von anderer Ordnung wird als das Differential der veränderlichen Grösse x, werden demnach, abgesehen von den singulären Punkten der Fundamentalcurve, ausschliesslich durch die im Zähler und Nenner von Θ stehenden Functionen auf der Curve: $f = 0$ ausgeschnitten.

Das Integral, zu welchem das Differential (7) Anlass giebt, wird im Folgenden als „längs der Curve $a_x^n = 0$ hinerstreckt" bezeichnet werden.

Die algebraischen Differentiale lassen diesen Entwickelungen zufolge die vor allem wesentliche Eigenschaft erkennen, dass sie gebrochene algebraische Functionen dreier homogenen Variabelen sind, zwischen denen eine Bedingungsgleichung besteht, und dass der Nenner derselben in zwei Factoren zerfällt, von denen der eine die *Functionaldeterminante von drei Curven* darstellt. Bei allen Problemen nun, die sich auf die Ermittelung der Werthe beziehen, welche die Summe oder überhaupt die symmetrischen Functionen der Differentiale in den Schnittpunkten der Fundamentalcurve mit einer beliebigen anderen Curve annehmen, kann dieser Ausdruck ohne Weiteres so umgeformt werden, dass der *Nenner desselben nur noch die Functionaldeterminante enthält.* Zu dem Zwecke gebe man in der Form (7) der gebrochenen Function $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung den Werth:

$$\Theta^{n-3}_{(x_1 x_2 x_3)} = \frac{\alpha_x^{m+n-3}}{\beta_x^m}.$$

Wird nun das Differential hingeleitet von den Schnittpunkten einer beliebigen Curve φ_x^μ bis zu den entsprechenden Punkten einer benachbarten Curve, welche mit $\varphi_x^\mu + \varphi_x^{\mu-1} d\varphi_x = 0$ bezeichnet werden möge (eine Bezeichnung, welche ausdrückt, dass die homogen vorkommenden Constanten der Curve φ in ihren gegenseitigen Verhältnissen unendlich wenig geändert sind), und soll die *Summe* der so erhaltenen Differentialwerthe dargestellt werden, so gelten für die Werthe: x_i und $x_i + dx_i$ die vier Gleichungen:

$$(8)\quad a_x^n = 0,\quad a_x^{n-1} a_{dx} = 0,\quad \varphi_x^\mu = 0,\quad \varphi_x^{\mu-1} \varphi_{dx} + \varphi_x^{\mu-1} d\varphi_x = 0,$$

Die letzte dieser Gleichungen, in welcher der bei formaler Differentiation auftretende Zahlenfactor μ des ersten Gliedes als Divisor zum zweiten Gliede hinzugedacht werden kann, besagt, dass die zu den Punkten x_i unendlich benachbarten Punkte $x_i + dx_i$ von der zu φ benachbarten Curve $\varphi + d\varphi$ ausgeschnitten werden. Setzt man noch

schliesslich die willkührliche Function ψ_x^ν gleich β_x^m, so geht das Differential (7) in die Form über:

$$(9) \qquad D = -\frac{\beta_x^m \varphi_x^{\mu-1} \varphi_{dx} a_x^{m+n-3}}{\beta_x^m (a\varphi\beta) a_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1} \beta_x^{m-1}} = \frac{\varphi_x^{\mu-1} d\varphi_x a_x^{m+n-3}}{(a\varphi\beta) a_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1} \beta_x^{m-1}}$$

unter der Bedingung: $a_x^n \doteq 0$ und $\varphi_x^\mu = 0$ *).

§ 2.

Beweis und Erweiterung eines von Jacobi aufgestellten algebraischen Satzes.

Algebraische Ausdrücke von ähnlicher Art, wie wir sie soeben für das Differential entwickelt haben, sind zuerst von Jacobi**) gebildet und untersucht worden, dergestalt, dass sich aus diesen Untersuchungen die Anzahl der Bedingungsgleichungen ergab, welche zwischen den $\mu \cdot n$ Schnittpunkten der beiden Curven: $a_x^n = 0$ und $\varphi_x^\mu = 0$ bestehen müssen. Zu dem Zwecke genügte es, die dritte in der Functionaldeterminante des Nenners vorhandene Curve β_x^m als gerade Linie anzunehmen und den im Uebrigen *willkührlichen Zähler* dadurch einzuschränken, dass er die nämliche gerade Linie zum Factor erhielt. *Für diese Function:*

$$(1) \qquad D = \frac{U_x^{\mu+n-3} \cdot v_x}{(a\varphi v) a_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1}}, \text{ oder } D \cdot \Psi - U_x^{\mu+n-3} \cdot v_x = 0,$$

$$\left(\Psi = (a\varphi v) a_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1}\right)$$

gilt als wesentliche Eigenschaft der Satz, dass die Summe der Werthe von D, gebildet für die $\mu \cdot n$ Schnittpunkte der Curven $a_x^n = 0$ und $\varphi_x^\mu = 0$ identisch gleich Null ist.

Im Folgenden soll nun dieser Satz zunächst von neuem bewiesen, sodann aber durch eine einfache Umformung begrifflich erweitert werden. Zuvörderst muss als besondere Eigenthümlichkeit hervorgehoben werden, dass der Werth von D, gebildet für *irgend einen* der Schnitt-

---

*) In etwas anderer Weise ist diese Form (9) von Clebsch abgeleitet worden; a. a. O. p. 194.

**) Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum inter duas variabiles propositarum. Journal t. 14.

De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis. Journal t. 15.

Eine Erweiterung dieses Jacobi'schen Satzes auf Functionen beliebig vieler Variabelen ist von Clebsch (a. a. O. p. 224 ff.) gegeben worden.

punkte der beiden Curven: $a_x^n = 0$ und $\varphi_x^\mu = 0$, völlig unabhängig von den Coefficienten der Form v_x ist, dass also statt der linearen Function v_x jede ganze und homogene algebraische Function der Grössen x substituirt werden kann; denn unter der Bedingung: $a_x^n = 0$, $\varphi_x^\mu = 0$ ist:

$$(2) \qquad a_x^{n-1}\varphi_x^{\mu-1}(a\varphi v)\cdot\alpha_x^\nu = a_x^{n-1}\varphi_x^{\mu-1}\alpha_x^{\nu-1}(a\varphi\alpha)\cdot v_x,$$

also

$$\frac{v_x}{a_x^{n-1}\varphi_x^{\mu-1}(a\varphi v)} = \frac{\alpha_x^\nu}{a_x^{n-1}\varphi_x^{\mu-1}\alpha_x^{\nu-1}(a\varphi\alpha)},$$

wobei α_x^ν eine beliebige Function der angegebenen Ordnung bedeutet.

Um nun die Summe der Werthe von D für das Schnittpunktsystem: $a_x^n = 0$, $\varphi_x^\mu = 0$ zu gewinnen, denke man sich die viel umfassendere Aufgabe gestellt: Es sollen aus diesen beiden Gleichungen, sowie der Gleichung (1): $D\cdot\Psi - U\cdot v_x = 0$, die Grössen x eliminirt werden. Durch diese Elimination müsste eine Gleichung vom Grade $\mu\cdot n$ in D hervorgehen, deren Wurzeln die einzelnen Werthe von D in den $\mu\cdot n$ Schnittpunkten der Curven a und φ liefern, während die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von D, dividirt durch den Coefficienten von $D^{\mu n}$, die einfachsten symmetrischen Functionen dieser Werthe repräsentiren. Unter diesen symmetrischen Functionen wird insbesondere die gesuchte Summe dadurch gegeben sein, dass man den Coefficienten von $D^{\mu n-1}$ durch den negativ genommenen Coefficienten von $D^{\mu n}$ dividirt; wir werden daher das Bildungsgesetz dieser beiden Coefficienten zu untersuchen haben. Aus der Zusammenstellung der drei Gleichungen:

$$(3) \qquad a_x^n = 0, \quad \varphi_x^\mu = 0, \quad D\cdot\Psi - U\cdot v_x = 0$$

wird ersichtlich, dass der Factor von $D^{\mu n}$ aus der Resultante von a, φ und Ψ besteht. *Die Resultante zweier Curven a und φ und ihrer mit Hinzunahme einer dritten Curve v gebildeten Functionaldeterminante zerfällt aber bekanntlich in zwei Factoren, von denen der eine die Resultante der drei Curven a, φ und v repräsentirt, indessen der andere, unabhängig von den Coefficienten v, die Berührungsinvariante der beiden erstgenannten Curven darstellt**). Der Beweis dieses Satzes, der auch durch rein geometrische Schlüsse leicht zu begründen ist, folgt auf algebraischem Wege aus der sub (2) gegebenen Relation, die wir kurz so schreiben wollen: $(a\varphi v)\cdot\alpha_x = (a\varphi\alpha)\cdot v_x$. Aus derselben

*) Salmon: Geometrie der höheren ebenen Curven. Deutsch bearbeitet von Fiedler (Art. 98).

Zu dem im Texte eingeschlagenen Beweisgange vergl.: Gordan, Resultanten von Covarianten (Math. Annalen Bd. IV).

ergiebt sich, wenn die Resultante von a, φ und ψ mit $R_{(a,\varphi,\psi)}$ bezeichnet wird, die Gleichung:

$$R_{(a,\varphi,\psi)} \cdot R_{(a,\varphi,\alpha)} = R_{(a,\varphi,(a\varphi\alpha))} \cdot R_{(a,\varphi,v)}.$$

Demnach ist:

$$(4) \qquad R_{(a,\varphi,\psi)} = R_{(a,\varphi,v)} \cdot \frac{R_{(a,\varphi,(a\varphi\alpha))}}{R_{(a,\varphi,\alpha)}},$$

das heisst: die gesuchte Resultante besteht aus zwei Factoren. Die Bedeutung des zweiten Factors, welcher zufolge der linken Seite dieser Gleichung von den Grössen α nur scheinbar abhängen und also lediglich eine simultane Form zwischen a und φ darstellen kann, wird aus der Forderung erkannt, dass die drei Gleichungen: $a_x^n = 0$, $\varphi_x^\mu = 0$ und $(a\varphi\alpha)\, a_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1} \alpha_x^{\nu-1} = 0$ beim Verschwinden der Form: $\frac{R_{(a,\varphi,(a\varphi\alpha))}}{R_{(a,\varphi,\alpha)}}$ für jeden Werth von α gleichzeitig bestehen müssen, was nur so möglich ist, dass die ersten Ableitungen von a_x^n denen von φ_x^μ proportional werden, das heisst: dass die Curven a und φ sich in einem ihrer Schnittpunkte berühren.

Da nun aber die einzelnen Werthe von D nur scheinbar von den Coefficienten der Form: v_x abhängen, so müssen sich auch die symmetrischen Functionen aus diesen μn Werthen unabhängig von v darstellen lassen; es werden also in der gesuchten Gleichung alle Coefficienten, falls sie nicht überhaupt identisch verschwinden, die Resultante: $R_{(a,\varphi,v)}$ zum Factor haben. *Nach Weglassung dieser allen Gliedern gemeinsamen Form besteht der Factor von $D^{\mu n}$ nur noch aus der Berührungsinvariante der Curven a_x^n und φ_x^μ.* Die Bedeutung derselben als des zum höchsten Gliede der Gleichung gehörigen Coefficienten ist durch den Satz ausgesprochen, dass bei einer Berührung der beiden genannten Curven der Werth von mindestens *einer* der Grössen D unendlich wird. Weil jedoch bei einer Berührung der beiden Curven, wozu hierbei auch die Fälle gerechnet werden müssen, dass einer der gemeinsamen Punkte von a_x^n und φ_x^μ zugleich ein singulärer Punkt für eine der beiden Curven ist, *jedenfalls zwei* Werthe von D zusammenfallen und unendlich gross werden, so müsste auch der Coefficient von $D^{\mu n-1}$, falls er nicht überhaupt verschwindet, ausser der genannten Resultante die Berührungsinvariante zum Factor haben. Diese Möglichkeit ist aber dadurch ausgeschlossen, dass dieser Factor in den Coefficienten der beiden Grundformen um einen Grad niedriger ist als der vorangehende. Mithin ist die Forderung, dass das Verschwinden der Berührungsinvariante das Unendlichwerden *zweier* Werthe von D anzeige, nur dann erfüllt, *wenn der Coefficient des zweiten Gliedes für jedes Schnittpunktsystem identisch verschwindet.*

Bezeichnen wir also durch: $\sum_{(a_x^n=0,\ \varphi_x^\mu=0)} D$ die Summe der für das Schnittsystem von $a_x^n=0$ und $\varphi_x^\mu=0$ gebildeten Werthe von D, so ist der Jacobi'sche Satz durch die Form:

$$(5)\qquad \sum D=\sum \frac{U_x^{n+\mu-3}\cdot v_x}{(a\varphi v)a_x^{n-1}\varphi_x^{\mu-1}}=0,\quad (a_x^n=0,\quad \varphi_x^\mu=0)$$

dargestellt.

Man kann nun aus dieser Gleichung eine bemerkenswerthe Eigenschaft algebraischer Functionen ableiten, als deren Specialfall sich alsdann wieder die vorstehende Gleichung erweist. Da nämlich der Beweis, wie wir ihn geführt haben, völlig unabhängig davon war, ob eine der Curven a_x^n und φ_x^μ singuläre Punkte besitzt oder nicht, und von welcher Art diese etwaigen Singularitäten sind, so bleibt auch dann noch die Gleichung (5) bestehen, wenn wir annehmen, dass z. B. *die Curve φ_x^μ in das Product zweier algebraischer Curven zerfällt.* Setzt man nun:

$$\varphi_x^\mu = b_x^{n'}\cdot c_x^{n''},\ \text{wobei also}\ \mu=n'+n'',$$

so wird:

$$(a\varphi v)a_x^{n-1}\varphi_x^{\mu-1} = \frac{n'}{n'+n''}\cdot a_x^{n-1}b_x^{n'-1}(abv)\cdot c_x^{n''} + \frac{n''}{n'+n''}\cdot a_x^{n-1}c_x^{n''-1}(acv)\cdot b_x^{n'}.$$

Führt man diesen Werth in den Nenner des Ausdruckes für D ein und untersucht wiederum die Werthe, welche D in den Schnittpunkten von $a_x^n=0$ mit $b_x^{n'}\cdot c_x^{n''}=0$ annimmt, so zerfällt die Summe dieser Werthe in zwei Theile, je nachdem man die auf $b_x^{n'}=0$ oder $c_x^{n''}=0$ gelegenen Punkte betrachtet. Die Gleichung (5) gewinnt also die Form:

$$(6)\qquad n''\cdot\sum\frac{U_x^{n+n'+n''-3}\cdot v_x}{a_x^{n-1}b_x^{n'-1}(abv)\cdot c_x^{n''}} + n'\sum\frac{U_x^{n+n'+n''-3}\cdot v_x}{a_x^{n-1}c_x^{n''-1}(acv)\cdot b_x^{n'}}=0.$$

Hier bezieht sich die erste Summe auf die Schnittpunkte von $a_x^n=0$ mit $b_x^{n'}=0$, die zweite auf die Schnittpunkte von $a_x^n=0$ mit $c_x^{n''}=0$. Jede dieser beiden Summen ist, wie oben bewiesen wurde, von den Coefficienten der Function v_x völlig unabhängig, so dass diese Gleichung ihre Giltigkeit nicht verliert, wenn in dem ersten Ausdrucke: v_x gleich $c_x^{n''}$, in dem zweiten: v_x gleich $b_x^{n'}$ gesetzt wird. *Durch diese Substitutionen erhält man die Relation:*

$$(7)\qquad n''\cdot\sum_{(a_x^n=0,\ b_x^{n'}=0)}\frac{U_x^{n+n'+n''-3}}{a_x^{n-1}b_x^{n'-1}c_x^{n''-1}(abc)} = n'\sum_{(a_x^n=0,\ c_x^{n''}=0)}\frac{U_x^{n+n'+n''-3}}{a_x^{n-1}b_x^{n'-1}c_x^{n''-1}(abc)}.$$

Aus der Symmetrie dieser beiden Ausdrücke in Bezug auf die drei Functionen a_x^n, $b_x^{n'}$, $c_x^{n''}$ folgt, dass diese Summen auch der mit n multiplicirten Summe von D gleich sind, wenn man die Werthe von D für die $n' \cdot n''$ Schnittpunkte von $b_x^{n'} = 0$ und $c_x^{n''} = 0$ berechnet. Das hiermit gewonnene Resultat, welches die Grundlage der folgenden Betrachtungsweisen bilden wird, fassen wir in dem Satz zusammen:

Ist ein Ausdruck von der Form:

$$D = \frac{U_x^{n+n'+n''-3}}{(abc)a_x^{n-1}b_x^{n'-1}c_x^{n''-1}} \tag{8}$$

gegeben, und wird die Summe der Werthe von D in den Schnittpunkten je zweier der drei in der Functionaldeterminante des Nenners enthaltenen Curven untersucht, was beispielsweise für die $n \cdot n'$ Schnittpunkte der beiden Curven a_x^n und $b_x^{n'}$ durch das Zeichen:

$$\sum_{(a_x^n = 0,\ b_x^{n'} = 0)} D$$

ausgedrückt werden mag, so besteht zwischen diesen Summenwerthen die Gleichung:

$$n'' \cdot \sum_{(a_x^n = 0,\ b_x^{n'} = 0)} D = n \cdot \sum_{(b_x^{n'} = 0,\ c_x^{n''} = 0)} D = n' \cdot \sum_{(c_x^{n''} = 0,\ a_x^n = 0)} D. \tag{9}$$

Der Jacobi'sche Satz ist als Specialfall in diesem mit inbegriffen; denn enthält die Function U eine der Functionen, z. B. $c_x^{n''}$, als Factor, so wird die Summe der Werthe von D auch in den Schnittpunkten von a und b gleich Null, weil für die Schnittpunkte von b und c, oder c und a jedes D sogar einzeln verschwindet. Zugleich lehrt der vorstehende Satz, dass $\sum D$ nur in den Fällen unendlich werden kann, wenn sich die Curven a, b und c in *einem* Punkte schneiden; dagegen bleibt sie bei einer einfachen oder auch mehrfachen Berührung zweier Curven endlich, wiewohl zwei oder mehr Werthe von D in diesem Falle unendlich gross sind.

Der Beweis für die Gleichung (9) kann auch auf die Weise gewonnen werden, dass man, direct von der Form (8) ausgehend, aus dieser sowie aus zweien der Curvengleichungen, z. B. $a_x^n = 0$, $b_x^{n'} = 0$ die Grössen x eliminirt. Der Coefficient von $D^{nn'}$ besteht wiederum aus der Resultante der drei Curven, multiplicirt mit der Berührungsinvariante von a und b, während der Coefficient des nächstfolgenden Gliedes *aus der nämlichen Berührungsinvariante* und einem anderen Ausdrucke zusammengesetzt ist, in welchem, wie leicht ersichtlich, die Coefficienten der *drei* Curven: a, b und c gleichberechtigt auftreten. Der aus beiden Coefficienten erhaltene Quotient reproducirt sich dem-

nach bis auf einen Zahlenfactor für jedes zwischen zweien der Curven bestehende Schnittpunktsystem*).

Aus unserem Beweisgange wird ferner erschlossen, dass ebenso wie der specielle Jacobi'sche Satz auch der aus diesem abgeleitete allgemeinere seine Giltigkeit bei Schnittpunktsystemen beliebig vieler Variabelen nicht verliert. Definirt man z. B. als Berührungsinvariante dreier Flächen diejenige Form ihrer Coefficienten, durch deren Verschwinden ausgesagt wird, dass in einem der gemeinsamen Punkte die drei Tangentialebenen ein Büschel bilden, so bleiben alle Schlussweisen unverändert bestehen, und es folgt auch hierbei der Satz:

Bedeuten: $a_x^n = 0$, $b_x^{n'} = 0$, $c_x^{n''} = 0$, $d_x^{n'''} = 0$ *die Gleichungen von vier Flächen, so gilt, wenn* U *eine beliebige Function vom Grade:* $n + n' + n'' + n''' - 4$ *darstellt, für die Summe der Werthe von:*

$$D = \frac{U}{(abcd)\, a_x^{n-1} b_x^{n'-1} c_x^{n''-1} d_x^{n'''-1}} \tag{10}$$

in den vier Punktsystemen, welche durch den Schnitt je dreier der Flächen erzeugt werden $\left(\sum_{(I)} D\right.$ bezeichne das Schnittpunktsystem der Flächen: b, c und $\left.d\right)$, *die Beziehung:*

$$n \cdot \sum_{(I)} D = n' \cdot \sum_{(II)} D = n'' \cdot \sum_{(III)} D = n''' \cdot \sum_{(IV)} D. \tag{11}$$

Bei zwei Gleichungen $a_x^n = 0$ und $b_x^{n'} = 0$ mit zwei homogenen Veränderlichen beruht dieses Gesetz auf der Bedeutung der Discriminante und erhält die einfache Form:

Die Summe der Werthe von $D = \frac{U_x^{n+n'-2}}{(ab)\, a_x^{n-1} b_x^{n'-1}}$, *gebildet für die Wurzeln der Gleichung* $a_x^n = 0$, *ist gleich der mit* $\frac{n}{n'}$ *multiplicirten Summe von* D, *gebildet für die Wurzeln der Gleichung* $b_x^{n'} = 0$, *wobei* U *jede beliebige Function vom angegebenen Grade sein kann.*

---

*) Das Bildungsgesetz für den Coefficienten des Gliedes: $D^{n\,n'-1}$ lässt sich folgendermassen aussprechen: Bezeichne

$$\varrho_x^{n+n'+n''-3} = (abc)\, a_x^{n-1} b_x^{n'-1} c_x^{n''-1}$$

die im Nenner von D stehende Functionaldeterminante, so wird die Resultante $R_{(a,\,b,\,\varrho)}$ auch dann noch in ihre beiden Factoren zerfallen, wenn man alle Symbole ϱ *mit Ausnahme einer Symbolreihe* durch Einführung der Werthe $(abc)\, a_i b_k c_l$ auflöst. Man ersetze nun in der Resultante $R_{(a,\,b,\,c)}$, in welcher dieser Entstehung zufolge immer noch *eine* Reihe der Symbole: a, b und c zu ϱ zusammengefasst ist, diese Symbole ϱ durch die von U. Multiplicirt man alsdann den so gewonnenen Ausdruck mit dem Zahlenfactor nn' und der Berührungsinvariante von a und b, so stellt dieses Product den gesuchten Coefficienten dar.

§ 3.

Das Abel'sche Theorem.

Der Satz, welchen wir im vorigen § für algebraische Ausdrücke von der Form D bewiesen haben, kann in gewissem Sinne als mit dem Abel'schen Theoreme identisch betrachtet werden, sobald wir ihn auf die algebraischen Differentiale anwenden, welche zufolge der Form (9) des § 1. dieser Classe von algebraischen Functionen angehören. Um dieses deutlich einzusehen, wird man zunächst die einfachsten Differentiale ins Auge zu fassen haben, das heisst diejenigen, welche entweder keine Unstetigkeitspunkte oder nur solche besitzen, die durch etwaige Singularitäten der Fundamentalcurve bedingt sind.

Für dieses Differential:

$$(1) \qquad D = \frac{cx\,dx\,|\,\alpha_x^{n-3}}{a_x^{n-1}a_c} \quad \text{(unter der Bedingung: } a_x^n = 0),$$

dessen Summenwerth für die Schnittpunkte einer Curve $\varphi_x^\mu = 0$ und einer dieser benachbarten Curve: $\varphi_x^\mu + \varphi_x^{\mu-1} d\varphi_x = 0$ mit $a_x^n = 0$ untersucht werden soll, ergiebt sich zufolge der früheren Entwickelungen der gleichberechtigte Ausdruck:

$$(2) \qquad D = \frac{\alpha_x^{n-3} v_x \varphi_x^{\mu-1} d\varphi_x}{a_x^{n-1}\varphi_x^{\mu-1}(a\varphi v)}, \quad (a_x^n = 0,\ \varphi_x^\mu = 0),$$

wobei v_x eine im Uebrigen beliebige, ganze und homogene algebraische Function bedeutet, von deren Coefficienten die zu untersuchenden Werthe von D gänzlich unabhängig sind. Gemäss des Jacobi'schen Satzes ist also die Summe der Werthe eines algebraischen Differentiales hingeleitet auf der Curve $a_x^n = 0$ von den μn Schnittpunkten der Curve $\varphi_x^\mu = 0$ bis zu den jedesmal benachbarten Schnittpunkten der Curve: $\varphi_x^\mu + \varphi_x^{\mu-1} d\varphi_x = 0$ gleich Null, wenn das Differential nur in den etwa vorhandenen, singulären Punkten der Fundamentalcurve unendlich werden kann. Betrachtet man demnach die Summe von μn längs der Curve hinerstreckten Integralen des Differentiales D, bei denen die unteren Grenzpunkte durch die Curve $\varphi_x^\mu = 0$, die oberen durch $\psi_x^\mu = 0$ ausgeschnitten werden, und deren Integrationswege durch einen continuirlichen Uebergang von φ_x^μ zu ψ_x^μ festgelegt sind, *so ist diese Integralsumme gleich einer Constanten, welche nur durch die Integrationswege, nicht aber durch die beiden äusseren Grenzsysteme bedingt ist**).

Aus dieser Gleichung, welche wir kurz so schreiben:

---

*) Clebsch a. a. O. p. 195.

$$(3)\qquad \sum\int_{\varphi}^{\psi} D = \sum\int_{\varphi}^{\psi} \frac{c\,x\,dx\;a_x^{n-2}}{a_x^{n-1}a_c} = \text{const.} \qquad (a_x^n = 0),$$

wird nun wiederum, ebenso wie im vorigen §, eine neue und allgemeine Relation abgeleitet, wenn man annimmt, dass die Curve $a_x^n = 0$, über deren Singularitäten keinerlei Voraussetzungen gemacht sind, in *zwei Curven zerfällt*, wenn man also statt a_x^n das Product: $a_x^n \cdot \beta_x^m$ einführt. Alsdann wird nämlich:

$$(4)\qquad \sum\int_{\varphi}^{\psi} \frac{c\,x\,dx\;a_x^{m+n-3}}{n\cdot\beta_x^m\cdot a_x^{n-1}a_c + m\cdot a_x^n\cdot\beta_x^{m-1}\beta_c} = \text{const.} \qquad (a_x^n\cdot\beta_x^m = 0).$$

Diese Integralsumme zerfällt aber in zwei Theile, je nachdem die Integrale längs der Curve: $a_x^n = 0$ oder längs: $\beta_x^m = 0$ geführt werden. Aus der Trennung dieser beiden Theile folgt die Relation:

$$(5)\quad m\cdot\sum_{(a_x^n=0)}\int_{\varphi}^{\psi} \frac{c\,x\,dx\;a_x^{m+n-3}}{\beta_x^m\cdot a_x^{n-1}a_c} = -n\cdot\sum_{(\beta_x^m=0)}\int_{\varphi}^{\psi} \frac{c\,x\,dx\;a_x^{m+n-3}}{a_x^n\cdot\beta_x^{m-1}\beta_c} + \text{const.}^*).$$

Beachtet man, dass die Curve $\beta_x^m = 0$ in den auf der linken Seite des Gleichheitszeichens stehenden Integralen die Unendlichkeitspunkte auf der Fundamentalcurve: $a_x^n = 0$ ausschneidet, so lässt sich der Inhalt dieser Gleichung in dem Satze aussprechen:

Jede auf die Schnittpunktsysteme der Fundamentalcurve mit einem beliebigen Curvenpaare bezügliche Integralsumme kann direct durch die Summe neuer Integrale dargestellt werden, welche längs derjenigen Curve, die auf der ersten die Unendlichkeitspunkte des Integrales bestimmt, innerhalb der nämlichen Grenzen und auf den entsprechenden Integrationswegen hinerstreckt sind.

Die beiden im Nenner stehenden Functionen haben mithin für jedes Schnittpunktsystem in Bezug auf Bildung der Integralsumme,

. . . . . .

*) Substituirt man in den links stehenden Ausdruck für c den Werth: $\widehat{\beta\varphi}\cdot\beta_x^{m-1}\varphi_x^{\mu-1}$, in den rechts stehenden den Werth: $c = \widehat{a\varphi}\cdot a_x^{n-1}\varphi_x^{\mu-1}$, so folgt die Gleichung:

$$m\sum_{(a_x^n=0,\ \varphi_x^\mu=0)} \frac{\varphi_x^{\mu-1}\,d\varphi_x\cdot a_x^{m+n-3}}{a_x^{n-1}\beta_x^{m-1}\varphi_x^{\mu-1}(a\beta\varphi)} = -n\sum_{(\beta_x^m=0,\ \varphi_x^\mu=0)} \frac{\varphi_x^{\mu-1}\,d\varphi_x\cdot a_x^{m+n-3}}{\beta_x^{m-1}a_x^{n-1}\varphi_x^{\mu-1}(\beta a\varphi)},$$

wodurch auch dieser Satz direct auf den im vorigen § gegebenen zurückgeführt ist.

abgesehen von einer multiplicativen und einer additiven Constante, vollkommen gleiche Bedeutung.

Falls demnach β_x^m eine rationale Curve insbesondere eine gerade Linie darstellt, so wird durch diese Vertauschung die Summe von irrationalen Integralen irgend welchen Geschlechtes ohne Weiteres durch eine Summe von rationalen Integralen ausgedrückt, wie solches das Abel'sche Theorem verlangt.

Aber auch in dem Falle, dass die Unendlichkeitspunkte auf einer Curve von beliebigem Geschlechte liegen, führt nach einer einfachen Substitution die nämliche Vertauschungsweise zu einer Darstellung der Integralsumme durch lauter rationale Integrale. Eine Substitution, welche dieses leistet, ist folgende*): Man lege durch die mn Schnittpunkte der Curven: $a_x^n = 0$ und $\beta_x^m = 0$ von einem beliebigen Punkte der Ebene aus mn gerade Linien, von denen jede die Curve a_x^n noch in $n-1$ weiteren Punkten schneidet. Bezeichnet man das Product dieser Geraden durch: $p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdots p_x^{(mn)}$, so lässt sich, im Allgemeinen noch auf mannigfaltige Art, eine Curve Θ von der $m(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung finden, welche durch diese $mn(n-1)$ überflüssigen Schnittpunkte hindurchgeht; denn diese Bestimmung liefert für die $\frac{(mn-m)(mn-m+3)}{2}$ von einander unabhängigen Constanten der Function Θ nur $mn(n-1) - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ lineare Bedingungsgleichungen. Es bleiben also noch $\frac{1}{2}(mn-m-n+1)(mn-m-n+2)$ Constanten willkührlich; über diese kann man, was indessen für die gegenwärtige Betrachtung nicht wesentlich ist, insbesondere so verfügen, dass die Curve Θ in dem gemeinsamen Schnittpunkte der mn Strahlen einen $(m-1)(n-1)$-fachen Punkt erhält, was gerade mit $\frac{1}{2}(mn-m-n+1)(mn-m-n+2)$ Bedingungen äquivalent ist.

Demzufolge besteht *bis auf Glieder mit dem Factor a_x^n* die Gleichung:

$$p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdots p_x^{(mn)} = \lambda \cdot \beta_x^m \cdot \Theta_x^{m(n-1)}, \tag{6}$$

wobei λ eine beliebige, je nach der Normirung der homogenen Coeffi-

*) Um die Summe von irrationalen Integralen durch rationale auszudrücken, genügt es bereits eine rationale Curve zu bestimmen, welche, ohne in das Product von geraden Linien zu zerfallen, das nämliche Schnittpunktsystem wie β_x^m und überdies eine Anzahl von Punkten ausschneidet, deren Einfluss durch Aufnahme einer entsprechenden Function in den Zähler des Differentiales compensirt wird. Die im Texte ausgeführte Substitutionsweise ist deshalb gewählt worden, weil sie zugleich dazu dient, die Summe irrationaler Integrale nach logarithmischen und algebraischen Functionen zu entwickeln.

Vgl. hierzu: Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen p. 5 ff.

cienten zu bestimmende Constante bedeutet; denn bei variabelem Werthe von λ ist innerhalb des Curvenbüschels:

$$p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdots p_x^{(mn)} - \lambda \cdot \beta_x^m \cdot \Theta_x^{m(n-1)} = 0$$

jedenfalls eine Curve vorhanden, welche die Curve $a_x^n = 0$ in mn^2+1 Punkten schneidet, das heisst: welche diese Curve als einen Theil ihrer selbst enthält. Nach Einführung des Werthes:

$$\beta_x^m = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdots p_x^{(mn)}}{\Theta_x^{m(n-1)}}$$

in das Differential:

$$D = \frac{|cx\,dx|\,a_x^{m+n-3}}{\beta_x^m \cdot a_x^{n-1} a_c}$$

geht dieses in ein solches über, dessen Unendlichkeitspunkte durch lauter Gerade ausgeschnitten werden. *Nach dem Vertauschungssatze wird also die ursprüngliche Integralsumme auf eine Summe von mn verschiedenen Integralen gebracht, welche längs gerader Linien erstreckt, das heisst rational sind.* Auf jeder der mn Geraden $p_x^{(i)}$ ist die Integralsumme zu bilden von den μ Schnittpunkten der Curve φ ab bis zu den μ Schnittpunkten der Curve ψ, und jedes der auf eine dieser Geraden bezüglichen Integrale besitzt *zwei* Unendlichkeitspunkte, nämlich den einen in einem der Schnittpunkte von a_x^n mit β_x^m, den anderen, bei welchem der Nenner des Differentiales in der $(m+n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung verschwindet, in dem gemeinsamen Schnittpunkt aller Geraden $p_x^{(i)}$.

§ 4.

Ueber die Darstellung von Summen rationaler Integrale durch logarithmische und algebraische Functionen.

Nachdem im vorhergehenden § gezeigt ist, wie sich die Summe von *irrationalen* Integralen durch eine Summe von *rationalen* Integralen ausdrücken lässt, erscheint es von weiterem Interesse, diese letztere Integralsumme nach logarithmischen und algebraischen Functionen zu entwickeln und dadurch auf ihre einfachsten Grundformen zurückzuführen. Es soll daher im Folgenden das auf eine Gerade als Fundamentalcurve bezügliche Integral, auf dessen Typus nach den letzten Entwickelungen die Summe aller algebraischen Integrale gebracht ist, näher behandelt und die Darstellung desselben durch logarithmische und rationale Functionen vollständig durchgeführt werden. Die Methode, welche dabei zur Anwendung kommen wird, unterscheidet sich in einigen Punkten, zum Theil wohl auch in der ganzen Auffas-

sung von derjenigen, welche Aronhold zur Lösung ähnlicher Aufgaben gegeben hat*).

I. Der Vollständigkeit halber beginne ich auch hier zunächst mit dem *irrationalen Differentiale:*

$$(1) \qquad D = \frac{|cx\,dx|\,\alpha_x^{n-2}}{v_x \cdot a_x^{n-1} a_c} \text{ (unter der Bedingung: } a_x^n = 0).$$

Die Curve $f = a_x^n$ möge beliebige Singularitäten besitzen; dagegen sei zuerst die Voraussetzung eingeführt, dass dieselbe von der Linie v_x in n Punkten geschnitten werde, von denen nicht mehr als je zwei zusammenfallen. Die Integralsumme, gebildet vom Differentiale D für ein Schnittpunktsystem von φ_x^μ bis ψ_x^μ längs der Curve f, geht über in die mit $-n$ multiplicirte Summe der Integrale des *rationalen Differentiales:*

$$(2) \qquad D' = \frac{|cx\,dx|\,\alpha_x^{n-2}}{a_x^n \cdot v_c} \text{ (unter der Bedingung: } v_x = 0),$$

wenn jetzt diese Summe genommen wird auf der Geraden v_x auch wieder von den μ Schnittpunkten mit φ bis zu den μ Schnittpunkten mit ψ. Das auf die Curve bezügliche Integral ist also so zu sagen auf das längs der Geraden erstreckte abgebildet, wobei aber immer nur eine *Gruppe* von μn Schnittpunkten auf der Curve eine *Gruppe* von μ Schnittpunkten auf der Geraden entspricht. Die Unendlichkeitspunkte beider Integrale bleiben hierbei die nämlichen, während mit den $n(n-2)$ Punkten, in denen das Differential (1) verschwindet, nur $n-2$ Verschwindungspunkte des Differentiales (2) correspondiren. Zur Entwickelung des Summenwerthes der über das Differential D' genommenen Integrale dient nun eine einfache Partialbruchzerlegung.

Unter der Bedingung $v_x = 0$ kann nämlich die Curve $a_x^n = 0$ durch ein Product von n geraden Linien ersetzt werden, von denen jede durch je einen der Schnittpunkte von v_x mit a_x^n hindurchgeht. Bei der Voraussetzung, dass von diesen n Schnittpunkten nicht mehr als höchstens je zwei paarweise zusammenfallen, lassen sich diese n Linien so bestimmen, dass niemals drei unter ihnen durch denselben Punkt gehen. Das Product dieser n von einander verschiedenen Linien werde durch $p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdots p_x^{(n)}$ bezeichnet; dann ist:

$$(3) \qquad D' = \frac{|cx\,dx|\,a_x^{n-2}}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdots p_x^{(n)} v_c}, \quad (v_x = 0).$$

Dieser Ausdruck gestattet folgende Zerlegung; man setze:

*) A. a. O: Bd. 61.

$$(4)\qquad \frac{\alpha_x^{n-2}}{p_x^{(1)}p_x^{(2)}\cdots p_x^{(n)}} = \frac{a_{12}}{p_x^{(1)}p_x^{(2)}} + \frac{a_{13}}{p_x^{(1)}p_x^{(3)}} + \cdots + \frac{a_{ik}}{p_x^{(i)}p_x^{(k)}} + \cdots + \frac{a_{n-1,n}}{p_x^{(n-1)}p_x^{(n)}} = \sum_{i,k} \frac{a_{ik}}{p_x^{(i)}p_x^{(k)}}.$$

Zulässig ist diese Entwickelung deshalb, weil unter den Formen $p_x^{(i)}$ keine drei von einander in linearer Weise abhängen und weil die Anzahl der Constanten a_{ik} mit der zu α_x^{n-2} gehörigen Zahl $\frac{1}{2}n(n-1)$ von willkürlichen Constanten übereinstimmt. Gingen aber irgend drei der Linien p durch den nämlichen Punkt, so würde die linke Seite für diesen Punkt im Allgemeinen von der *dritten* Ordnung unendlich gross werden, die vorstehende Gleichung mithin ihre Giltigkeit verlieren. Man findet den Werth eines dieser Coefficienten z. B. a_{ik}, indem man beide Seiten der Gleichung (4) mit $p_x^{(i)}p_x^{(k)}$ multiplicirt und sodann für x den Schnittpunkt dieser beiden Linien substituirt, also $x = \widehat{p^{(i)}p^{(k)}}$ setzt. Demzufolge wird:

$$(5)\qquad a_{ik} = a_{ki} = \frac{(\alpha p^{(i)}p^{(k)})^{n-2}}{\Pi(pp^{(i)}p^{(k)})},$$

wenn $\Pi(pp^{(i)}p^{(k)})$ das Product aller Determinanten bezeichnet, welche dadurch entstehen, dass p alle Werthe von $p^{(1)}$ bis $p^{(n)}$ mit Ausnahme der beiden Werthe $p^{(i)}$ und $p^{(k)}$ durchläuft.

Betrachtet man nun ein Integral von der Form:

$$(6)\qquad a_{ik}\int \frac{|cxdx|}{p_x^{(i)}p_x^{(k)}v_c}, \qquad (v_x = 0)$$

und erstreckt dasselbe von den Schnittpunkten der Geraden v_x mit φ_x^{μ} bis zu den Schnittpunkten derselben Linie mit ψ_x^{μ}, so kann man wiederum statt der Curven φ und ψ Producte von μ Geraden einführen, und die Integrationswege zwischen den Grenzen φ und ψ durch Integrationswege zwischen den Linien $u_x^{(1)}u_x^{(2)}\cdots u_x^{(\mu)}$ und $w_x^{(1)}w_x^{(2)}\cdots w_x^{(\mu)}$ ersetzen. Dabei bildet der auf v_x gelegene Durchschnitt mit $u_x^{(i)}$ die untere Grenze des Weges, welcher im Punkte der Linie $w_x^{(i)}$ endet. Substituirt man also für x den Werth $\widehat{vu}$, für dx den Werth $\widehat{vdu}$, so erhält man aus (6) das Integral:

$$(7)\qquad a_{ik}\int \frac{(vudu)}{(p^{(i)}vu)(p^{(k)}vu)}.$$

Bezeichne $\xi^{(i)}$ den Unendlichkeitspunkt, welcher durch die Linie $p_x^{(i)}$ auf v_x ausgeschnitten wird, so lässt sich $\widehat{p^{(i)}v} = \xi^{(i)}$ setzen. Aus dieser Annahme folgt:

$$(\xi^{(i)}\xi^{(k)}x) = v_x(vp^{(i)}p^{(k)}) \text{ also } (vudu) = \frac{u_{\xi^{(i)}}du_{\xi^{(k)}} - u_{\xi^{(k)}}du_{\xi^{(i)}}}{(vp^{(i)}p^{(k)})}.$$

Das Integral (7) verwandelt sich also in:

$$(8)\quad \frac{a_{ik}}{(vp^{(i)}p^{(k)})}\int_u^w \frac{u_{\xi^{(i)}}du_{\xi^{(k)}} - u_{\xi^{(k)}}du_{\xi^{(i)}}}{u_{\xi^{(i)}}u_{\xi^{(k)}}} = \frac{a_{ik}}{(vp^{(i)}p^{(k)})}\log\frac{w_{\xi^{(k)}}u_{\xi^{(i)}}}{w_{\xi^{(i)}}u_{\xi}}\,.$$

Nun wird aber das mit dem Factor a_{ik} behaftete Integral für alle μ Linien zu bilden sein, welche das Schnittpunktsystem von φ oder ψ mit v repräsentiren, und da $\xi^{(i)}$ einen auf v gelegenen Punkt bedeutet, so ist zufolge der Gleichung: $(\varphi vu)^{\mu} = (u^{(1)}vu)\,(u^{(2)}vu)\ldots(u^{(\mu)}vu)$ auch:

$$\varphi^{\mu}_{\xi^{(i)}} = u^{(1)}_{\xi^{(i)}}u^{(2)}_{\xi^{(i)}}\cdots u^{(\mu)}_{\xi^{(i)}} \text{ und ebenso: } \psi^{\mu}_{\xi^{(i)}} = w^{(1)}_{\xi^{(i)}}w^{(2)}_{\xi^{(i)}}\cdots w^{(\mu)}_{\xi^{(i)}}\,.$$

Die Summe aller mit a_{ik} multiplicirten Integrale geht auf diese Weise in die Form über:

$$\frac{a_{ik}}{(vp^{(i)}p^{(k)})}\log\frac{\psi^{\mu}_{\xi^{(k)}}\varphi^{\mu}_{\xi^{(i)}}}{\psi^{\mu}_{\xi^{(i)}}\varphi^{\mu}_{\xi^{(k)}}}\,.$$

Mithin ist schliesslich:

$$(9)\quad \sum\int_{\varphi}^{\psi}\frac{|cxdx|\,\alpha_x^{n-2}}{v_x a_x^{n-1}a_o} = -n\sum_{i,k}\frac{a_{ik}}{(vp^{(i)}p^{(k)})}\log\frac{\psi^{\mu}_{\xi^{(k)}}\varphi^{\mu}_{\xi^{(i)}}}{\psi^{\mu}_{\xi^{(i)}}\varphi^{\mu}_{\xi^{(k)}}}\,,$$

unter Voraussetzung der Gleichung (5) und der Relation:

$$(avu)^n = (p^{(1)}vu)\,(p^{(2)}vu)\cdots(p^{(n)}vu) = u_{\xi^{(1)}}u_{\xi^{(2)}}\cdots u_{\xi^{(n)}}\,.$$

Bemerkenswerth ist die scheinbare Willkürlichkeit, welche in dieser Darstellung je nach Wahl der Grössen $p^{(i)}$ zu liegen scheint, welche aber auf das Gesammtresultat keinen Einfluss auszuüben vermag. So können z. B. mehrere der Coefficienten a_{ik} zum Verschwinden gebracht werden, indem man die Linien $p_x^{(i)}$, $p_x^{(k)}\cdots$ so wählt, dass α_x^{n-2} durch mehrere der Schnittpunkte $\widehat{p^{(i)}p^{(k)}}$ hindurchgeht. Auf diese Weise lassen sich unter Anderem alle a_{1i} (wobei i die Werthe von 2 bis n annimmt) bis auf eines zerstören, dadurch dass $n-2$ der Linien $p_x^{(2)}\cdots p_x^{(n)}$ durch die $n-2$ Schnittpunkte von $p_x^{(1)}$ mit α_x^{n-2} hindurchgelegt werden: bei dieser Darstellung bleibt wie erforderlich immer noch *ein* Ausdruck bestehen, in welchem der Punkt $\xi^{(1)}$ unter dem Logarithmus auftritt. Die Maximalzahl der auf diese Weise zum Verschwinden gebrachten Coefficienten beträgt: $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, *so dass nur* $n-1$ *logarithmische Glieder nachbleiben*, welche durch die Formen: $a_{k1}, a_{k2},\cdots a_{kn}$ dargestellt werden. — *Für die normirten Differentiale dritter Gattung* ist α_x^{n-2} durch $n-2$ der Punkte ξ hindurchgelegt, so dass:

$$\frac{\alpha_x^{n-2}}{p_x^{(1)}p_x^{(2)}\cdots p_x^{(n)}} = \frac{a_{ik}}{p_x^{(i)}p_x^{(k)}}\,,\qquad (v_x = 0)\,.$$

Mithin reducirt sich die obige Form (9) in diesem Falle auf das *eine* mit a_{ik} multiplicirte logarithmische Glied. Ueberhaupt bestehen, sobald die Curve α_x^{n-2} durch einen der Schnittpunkte von v_x mit a_x^n, z. B. durch den Punkt $\widehat{p^{(i)}v}$, hindurchgelegt ist, zwischen den Coefficienten a_{ik} Relationen von der Form:

$$\frac{a_{1i}}{(p^{(1)}p^{(i)}v)} + \frac{a_{2i}}{(p^{(2)}p^{(i)}v)} \cdots \cdots \frac{a_{ni}}{(p^{(n)}p^{(i)}v)} = 0\,,$$

zu Folge deren sämmtliche Glieder, in welchen der Punkt $\xi^{(i)}$ vorkommt, sich gegenseitig aufheben.

Die oben ausgeführte Partialbruchzerlegung bleibt, wie schon erwähnt wurde, auch dann noch giltig, wenn mehrere der Schnittpunkte von v_x mit a_x^n paarweise unter einander zusammenfallen, weil auch dann noch sämmtliche Linien $p_x^{(i)}$ von einander verschieden sind, und keine drei beliebigen unter ihnen in linearer Weise von einander abhängen. Fallen z. B. die Punkte $\xi^{(i)}$ und $\xi^{(k)}$ zusammen, so liegt der Schnittpunkt $\widehat{p^{(i)}p^{(k)}}$ auf v_x. Die Bestimmung der Constanten a_{ik} bleibt dabei ungeändert und in der Formel (9) erhält nur das Integral

$$\int \frac{|cx\,dx}{p_x^{(i)}\,p_x^{(k)}\,v_c}\,, \qquad (v_x = 0) \tag{10}$$

einen andern Werth. Setzt man auch hier wieder:

$$\widehat{p^{(i)}v} = \xi^{(i)}\,, \qquad \widehat{p^{(k)}v} = \xi^{(k)} = \xi^{(i)}$$

und führt einen beliebigen auf v_x gelegenen Punkt c ein, so wird:

$$(\xi^{(i)}cx) = (\widehat{p^{(i)}v}\,cx) = p_c^{(i)} \cdot v_x\,, \text{ also } (vu\,du) = \frac{u_{\xi^{(i)}}\,du_c - u_c\,du_{\xi^{(i)}}}{p_c^{(i)}}\,.$$

Das Integral (10) verwandelt sich also in:

$$\frac{1}{p_c^{(i)}} \int_u^w \frac{u_{\xi^{(i)}}\,du_c - u_c\,du_{\xi^{(i)}}}{u_{\xi^{(i)}}^2} = \frac{1}{p_c^{(i)}} \left(\frac{w_c}{w_{\xi^{(i)}}} - \frac{u_c}{u_{\xi^{(i)}}} \right). \tag{11}$$

Ausgeführt über alle Linien u, welche das Schnittpunktsystem von φ und ψ bestimmen, ergiebt diese Formel nach Multiplication mit dem zugehörigen Factor a_{ik} den Werth:

$$\frac{a_{ik}}{\sqrt{p_c^{(i)}\,p_c^{(k)}}} \cdot \frac{d\left(\log \frac{\psi_\xi^{\mu(i)}}{\varphi_\xi^{\mu(i)}} \right)}{dc} \tag{12}$$

Sobald *r algebraische* Unendlichkeitspunkte im Differentiale durch das Zusammenfallen je zweier Schnittpunkte auftreten, gehen demnach

von den $\frac{n(n-1)}{2}$ logarithmischen Functionen r in algebraische über, während die übrigen zunächst ungeändert bleiben. Ist die Curve α_x^{n-2} durch mehrere dieser Punkte die Linie v_x einfach schneidend hindurchgelegt, so verschwinden die Coefficienten der betreffenden algebraischen Glieder, da $(\alpha p^{(i)} p^{(k)})^{n-2}$ gleich Null wird, während die logarithmischen bestehen bleiben.

II. Nicht mehr durchführbar wird dagegen die vorstehende Partialbruchzerlegung, sobald *mehr als zwei* der Punkte ξ zusammenrücken. Denn alsdann schneiden sich mindestens drei der Linien $p_x^{(i)}$ in einem Punkte und die Gleichung (4) bleibt nur noch giltig, wenn auch die Curve α_x^{n-2} mindestens einfach durch diesen Punkt hindurchgeht. Mithin umfasst diese Formel nur diejenigen Fälle, in denen das Differential entweder *logarithmisch oder von der ersten Ordnung algebraisch* unendlich wird. Die Fälle höherer Berührung zwischen a_x^n und v_x werden am einfachsten mit Hilfe des von Aronhold angegebenen δ-Processes erledigt. Zu dem Zwecke seien die vielfach zählenden Schnittpunkte nicht mehr durch ein Product verschiedener Linien, welche durch den nämlichen Punkt gehen, sondern *durch Potenzen linearer Ausdrücke* bezeichnet, so dass unter der Bedingung: $v_x = 0$:

$$(13)\quad a_x^n = \left(p_x^{(1)}\right)^{\lambda_1} \left(p_x^{(2)}\right)^{\lambda_2} \cdots \left(p_x^{(m)}\right)^{\lambda_m}, \quad n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_m .$$

Entwickelt man dann zunächst den Ausdruck:

$$\frac{\alpha_x^{m-2}}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdots p_x^{(m)}},$$

in welchem alle Factoren des Nenners nur in der ersten Potenz auftreten, nach Partialbrüchen, so gelangt man durch wiederholte Differentiation nach den Coefficienten von $p_x^{(i)}$ auf beiden Seiten, indem man für die Incremente die entsprechenden Symbole α substituirt (also α_1 für $dp_1^{(i)}$, α_2 für $dp_2^{(i)}$, α_3 für $dp_3^{(i)}$), zu einem Ausdruck von der Form:

$$\frac{\alpha_x^{n-2}}{\left(p_x^{(1)}\right)^{\lambda_1} \left(p_x^{(2)}\right)^{\lambda_2} \cdots \left(p_x^{(m)}\right)^{\lambda_m}} .$$

Die oben behandelten Fundamentalintegrale gehen dadurch in die Form über:

$$(14)\quad \int \frac{|cx\,dx|\ \alpha_x^{\lambda_i+\lambda_k-2}}{\left(p_x^{(i)}\right)^{\lambda_i} \left(p_x^{(k)}\right)^{\lambda_k} v_c}, \quad (v_x = 0),$$

für welche sich eine Recursionsformel auf folgendem Wege aufstellen lässt. Der Kürze halber werde, *immer unter der Bedingung* $v_x = 0$:

(15) $$\int \frac{|cxdx|}{p_x^{(i)} p_x^{(k)}} = \omega(i, k), \qquad \int \frac{|cxdx|\, \alpha_x^{\lambda+\mu-2}}{(p_x^{(i)})^{\lambda} (p_x^{(k)})^{\mu}} = \omega(i^{\lambda}, k^{\mu})$$

gesetzt. Alsdann ist:

(16) $$\omega(i^2, k) = -\delta_i(\omega(i, k)), \quad \omega(i^3, k^2) = -\tfrac{1}{2}\delta_i(\omega(i^2, k)),$$
$$\omega(i^2, k^2) = -\delta_k(\omega(i^2, k)) \text{ u. s. w.}$$

Aus der Gleichung:

$$\omega(i, k) = \frac{1}{(vp^{(i)}p^{(k)})} \log\left(\frac{u_{\xi^{(k)}}}{u_{\xi^{(i)}}}\right)$$

folgt aber:

$$\omega(i^2, k) = -\delta_i(\omega(i, k)) = \frac{(v\alpha p^{(k)})}{(vp^{(i)}p^{(k)})}\omega(i, k) - \frac{1}{(vp^{(i)}p^{(k)})}\delta_i\left(\log\frac{u_{\xi^{(k)}}}{u_{\xi^{(i)}}}\right).$$

Für die Berechnung des letzten Ausdruckes betrachte man, um die additiven Constanten in Uebereinstimmung zu bringen, das Integral:

$$\omega(i^2, k) - \frac{(v\alpha p^{(k)})}{(vp^{(i)}p^{(k)})}\omega(i, k)$$
$$= \frac{1}{(vp^{(i)}p^{(k)})}\int \frac{|cxdx\,\left(\alpha_x(vp^{(i)}p^{(k)}) - p_x^{(i)}(v\alpha p^{(k)})\right)}{(p_x^{(i)})^2 (p_x^{(k)}) v_c}.$$

Der Werth desselben ist, da für alle Punkte die Relation: $v_x = 0$ gilt:

$$\frac{(vp^{(i)}\alpha)}{(vp^{(i)}p^{(k)})}\int \frac{(vudu)}{(p^{(i)}vu)^2} = \frac{(vp^{(i)}\alpha)}{(vp^{(i)}p^{(k)})}\cdot\frac{1}{p_c^{(i)}}\cdot\frac{u_c}{(up^{(i)}v)},$$

wenn auch hier c einen beliebigen auf v gelegenen Punkt bezeichnet. Setzt man dann insbesondere für c den Werth $\widehat{p^{(k)}v}$, so erhält man:

(17) $$(vp^{(i)}p^{(k)})\,\omega(i^2, k) - (v\alpha p^{(k)})\,\omega(i, k) = \frac{(u\alpha v)}{(up^{(i)}v)} - \frac{(p^{(k)}\alpha v)}{(p^{(k)}p^{(i)}v)}.$$

Die Linie u, welche hierbei auftritt, bedeutet die obere Grenze, bis zu welcher das Integral erstreckt ist. Differentiirt man diese Formel $(\lambda - 2)$ mal nach $p_x^{(i)}$, so folgt:

(18) $$(vp^{(i)}p^{(k)})\,\omega(i^{\lambda}, k) - (v\alpha p^{(k)})\,\omega(i^{\lambda-1}, k)$$
$$= \frac{1}{\lambda - 1}\left\{\frac{(u\alpha v)^{\lambda-1}}{(up^{(i)}v)^{\lambda-1}} - \frac{(p^{(k)}\alpha v)^{\lambda-1}}{(p^{(i)}p^{(k)}v)^{\lambda-1}}\right\}.$$

Um eine Recursionsformel für das allgemeinere Integral: $\omega(i^{\lambda}, k^{\mu})$ zu gewinnen, gehe man von der durch Differentation nach $p^{(k)}$ aus (17) gewonnenen Form aus:

(19) $$(vp^{(i)}p^{(k)})\,\omega(i^2, k^2) - (vp^{(i)}\alpha)\,\omega(i^2, k) + (vp^{(k)}\alpha)\,\omega(i, k^2)$$
$$= \frac{(\alpha vp^{(i)})\,(\alpha vp^{(k)})}{(vp^{(i)}p^{(k)})^2}$$

und differentiire dieselbe zuerst nach $p_x^{(i)}$, alsdann nach $p_x^{(k)}$, so folgt:

$$(20)\quad (vp^{(i)}p^{(k)})\,\omega(i^\lambda, k^\mu) - (vp^{(i)}\alpha)\,\omega(i^\lambda, k^{\mu-1}) + (vp^{(k)}\alpha)\,\omega(i^{\lambda-1}, k^\mu)$$
$$= -\frac{\lambda+\mu-3!}{\lambda-1!\,\mu-1!}\frac{(\alpha v p^{(k)})^{\lambda-1}}{(vp^{(k)}p^{(i)})^{\lambda-1}}\cdot\frac{(\alpha v p^{(i)})^{\mu-1}}{(vp^{(i)}p^{(k)})^{\mu-1}}\quad(\lambda>1,\ \mu>1).$$

Der auf der rechten Seite stehende Ausdruck ist eine von den Grenzen des Integrals unabhängige Constante, und sämmtliche Werthe enthalten ausser algebraischen Functionen, welche nach negativen Potenzen von $p_x^{(i)}$, $p_x^{(k)}\cdots$ fortschreiten, immer nur die eine logarithmische Functionen $\omega(i, k)$. Die Grössen α kommen, weil jeder Ausdruck: $\omega(i^\lambda, k^\mu)$ mit dem Coefficienten a_{ik} multiplicirt wird, zu solchen Potenzen vor, dass sie zugleich als *Symbole einer irreducibelen Form:* α_x^{n-2} aufgefasst werden können.

III. Einer besonderen Behandlung bedarf endlich noch *dasjenige Differential, welches von vornherein das Quadrat oder überhaupt die Potenz einer Function im Nenner enthält.* Denn alsdann liefert der Satz von der Vertauschung der beiden Functionen des Nenners lauter unendlich grosse Differentiale, deren Summen zu je zweien aber einen endlichen Differentialwerth besitzt. Man kann hierbei zu einer auch formal befriedigenden Darstellung durch einen Grenzprocess gelangen, indem man die mehrfach zählende Curve als aus dem Producte benachbarter Curven entstanden auffasst. Es soll im Folgenden der Fall des *Quadrates einer linearen Function* vollständig durchgeführt werden, da auf diesen alle anderen, bei denen Curven höherer Ordnung auftreten, durch eine ähnliche Substitutionsweise, wie die am Schlusse des § 3. angewandte, gebracht werden können:

Es sei gegeben:

$$(21)\qquad D = \frac{|cxdx|\ \alpha_x^{n-1}}{(v_x)^2 a_x^{n-1} a_c}\qquad \text{(unter der Bedingung } a_x^n = 0)$$

und es soll wiederum die Integralsumme gebildet werden von den Schnittpunkten einer Curve $\varphi_x^\mu = 0$ bis zu den Schnittpunkten einer Curve $\psi_x = 0$. Alsdann besteht die Gleichung:

$$(22)\qquad \sum_{\varphi}^{\psi} D = -\frac{n}{2}\sum_{\varphi}^{\psi}\frac{|cxdx|\ \alpha_x^{n-1}}{a_x^n\cdot v_x\cdot v_c}\cdot$$
$$(a_x^n = 0)\qquad\qquad ((v_x)^2 = 0)$$

Setzt man nun $(v_x)^2 = v_x\cdot w_x$ und denkt sich w_x unendlich benachbart zu v_x, so ist statt der rechts stehenden Summe zu schreiben:

$$-n\left[\sum_{(w_x=0)}^{\varphi}\int^{\psi}\frac{|cxdx|\ \alpha_x^{n-1}}{a_x^n v_x w_c}+\sum_{(v_x=0)}^{\varphi}\int^{\psi}\frac{|cxdx|\ \alpha_x^{n-1}}{a_x^n w_x v_c}\right].$$

Nun ist aber nach der oben benutzten Partialbruchzerlegung:

$$\frac{\alpha_x^{n-1}}{a_x^n\cdot v_x}=\frac{\alpha_x^{n-1}}{p_x^{(1)}p_x^{(2)}\cdots p_x^{(n)}v_x}=\sum_{i,k}\frac{a_{ik}}{p_x^{(i)}p_x^{(k)}}+\sum_i\frac{b_i}{p_x^{(i)}v_x},$$

$$\frac{\alpha_x^{n-1}}{a_x^n\cdot w_x}=\frac{\alpha_x^{n-1}}{p_x^{(1)}p_x^{(2)}\cdots p_x^{(n)}w_x}=\sum_{i,k}\frac{a'_{ik}}{p_x^{(i)}p_x^{(k)}}+\sum_i\frac{b'_i}{p_x^{(i)}w_x}.$$

Dabei sind die Linien $p_x^{(i)}$ so bestimmt, dass sie je einen der Schnittpunkte von v_x und a_x^n mit dem benachbarten Punkte von w_x und a_x^n verbinden; das heisst: sie stellen im Grenzfalle die Tangenten der Curve a_x^n in den Schnittpunkten mit der Linie v_x dar, und es kann also schliesslich:

$$p_x^{(i)}=a_{\xi^{(i)}}^{n-1}a_x\qquad(v_{\xi^{(i)}}=0,\qquad a_{\xi^{(i)}}^n=0),$$

gesetzt werden. Die Coefficienten a_{ik} und b_i werden nach der früheren Weise bestimmt, der zufolge

$$a_{ik}=\frac{(\alpha p^{(i)}p^{(k)})^{n-1}}{(vp^{(i)})(p^{(k)})\,\Pi(pp^{(i)}p^{(k)})},\qquad b_i=\frac{(\alpha p^{(i)}v)^{n-1}}{\Pi(pp^{(i)}v)}$$

wird, und ebenso:

$$a'_{ik}=\frac{(\alpha p^{(i)}p^{(k)})^{n-1}}{(wp^{(i)}p^{(k)})\,\Pi(pp^{(i)}p^{(k)})},\qquad b'_i=\frac{(\alpha p^{(i)}w)^{n-1}}{\Pi(pp^{(i)}w)}.$$

Das Integral mit dem Factor a_{ik} vereinigt sich, wenn w_x gleich v_x gesetzt wird, ohne Weiteres mit dem Integral a'_{ik} zu der im Obigen entwickelten Form:

$$2a_{ik}\int\frac{(vudu)}{(p^{(i)}vu)(p^{(k)}vu)}.$$

Dagegen vereinigen sich zwei der Integrale, welche bezüglich mit b_i und b'_i multiplicirt sind, in folgender Weise; es ist:

$$b_i\int\frac{|cxdx|}{p_x^{(i)}v_xw_c}+b'_i\int\frac{|cxdx|}{p_x^{(i)}w_xv_c}$$

$$=b_i\int\frac{|wudu|}{(p^{(i)}wu)(vwu)}-b'_i\int\frac{(vudu)}{(p^{(i)}vu)(vwu)}$$

$$=b_i\int\frac{(wudu)(p^{(i)}vu)-(vudu)(p^{(i)}wu)}{(p^{(i)}vu)(p^{(i)}wu)(vwu)}=-b_i\int\frac{(p^{(i)}udu)}{(p^{(i)}vu)^2},$$

wenn v_x mit w_x zusammenfällt. Führt man nun einen beliebigen auf $p_x^{(i)}$ gelegenen Punkt $c^{(i)}$ ein, setzt demnach $p^{(i)} = \xi^{(i)}\widehat{c^{(i)}}$, so zerlegt sich das letzte Integral in die direct integrirbare Form:

$$-b_i \int \frac{u_{\xi^{(i)}}\, du_{c^{(i)}} - u_{c^{(i)}}\, du_{\xi^{(i)}}}{(u_{\xi^{(i)}})^2 (v_{c^{(i)}})^2} = -\frac{b_i}{(v_{c^{(i)}})^2} \int d\left(\frac{u_{c^{(i)}}}{u_{\xi^{(i)}}}\right).$$

Ausgedehnt über alle μ Linien, welche das Schnittpunktsystem von φ_x^μ vertreten, bis zu den Schnittpunkten der μ Linien, welche statt der Curve ψ_x^μ eingeführt sind, erhält man *die aus n algebraischen, und* $\frac{n(n-1)}{2}$ *logarithmischen Functionen zusammengesetzte Endform:*

$$(23)\quad \sum_{\varphi}^{\psi} \int \frac{|cx\,dx|\; a_x^{n-1}}{(v_x)^2\, a_x^{n-1}\, a_c} = -2n \sum_{i,k} \frac{a_{ik}}{(vp^{(i)}p^{(k)})} \log \frac{\psi^\mu_{\xi^{(k)}}\, \varphi^\mu_{\xi^{(i)}}}{\psi^\mu_{\xi^{(i)}}\, \varphi^\mu_{\xi^{(k)}}}$$

$$+ n \sum_i \frac{b_i}{(v_{c^{(i)}})^2} \frac{d\left(\log \frac{\psi^\mu_{\xi^{(i)}}}{\varphi^\mu_{\xi^{(i)}}}\right)}{dc^{(i)}}.$$

Treten im Nenner des Differentiales höhere Potenzen auf, so ist auch hier der δ-Process in der früher angedeuteten Weise auszuführen; doch will ich, um die Uebersicht über die Betrachtungsweisen, welche dem Vorstehenden zu Grunde liegen, nicht zu hindern, auf besondere Einzelheiten, deren Lösbarkeit durch die entwickelten Methoden ersichtlich gemacht ist, nicht weiter eingehen.

Fassen wir das Resultat der in diesem Abschnitte geführten Untersuchungen kurz zusammen, so erscheint als wesentlichstes Ergebniss die Zurückführung der auf ein Schnittpunktsystem bezüglichen Summe von *irrationalen* Integralen auf eine Summe von *rationalen*, wodurch das Abel'sche Theorem bereits explicite dargestellt wird; die Entwickelung dieser Summe nach logarithmischen und algebraischen Functionen, welche durch Erweiterung der von Aronhold zur Lösung ähnlicher Probleme gegebenen Methoden erzielt wurde, bildete nur eine Ergänzung hierzu. Jene Zurückführbarkeit aber erwies sich als ihrem Wesen nach identisch mit einer Eigenschaft, welche einer ganzen Classe von algebraischen Ausdrücken zukommt, und welche selbst nichts anderes als eine directe Folge aus dem von Jacobi aufgestellten Fundamentalsatze ist.

Zweiter Abschnitt.

Ueber die Integration der durch symmetrische Functionen algebraischer Differentiale dargestellten Differentialgleichungen. Specielle Fälle.

§ 5.

Allgemeine Erörterungen.

Unter allen symmetrischen Functionen, welche sich aus den Differentialen eines gegebenen Schnittpunktsystemes bilden lassen, tritt die Summe der Differentialwerthe deshalb besonders in den Vordergrund, weil diese Summe direct integrirt und somit das Gesetz ihrer Bildung auch auf die Darstellung von Integralen übertragen werden kann. Die übrigen symmetrischen Functionen führen indessen zur Integration von Differentialgleichungen, welche, da sie in der Form von *Connexen* auftreten, für die Theorie der dem Differentiale zu Grunde liegenden Curve nicht ohne Bedeutung sind.

Die Werthe nämlich, welche das auf eine Curve n^{ter} Ordnung bezügliche Differential D in den Schnittpunkten der Fundamentalcurve mit einer Geraden ($u_x = 0$) und einer zu dieser benachbarten Geraden ($u_x + du_x = 0$) besitzt (nur auf diesen einfachsten Fall eines Schnittpunktsystemes sollen die folgenden Untersuchungen sich beschränken), werden durch eine Gleichung n^{ten} Grades dargestellt, deren Coefficienten aus Formen zusammengesetzt sind, welche nur noch von den Variabelen u und $\widehat{udu}$, sowie von den Constanten der das Differential definirenden Functionen abhängen. Mithin bestehen alle diese Coefficienten aus Connexen, welche dem simultanen Systeme der in D enthaltenen algebraischen Functionen angehören. Setzt man einen dieser Coefficienten gleich Null, so wird dadurch auf der Geraden: $u_x = 0$ eine im Allgemeinen endliche Zahl von Punkten $\widehat{udu}$ bestimmt und die unendlich kleine Drehung der Linie u in solch' einem Punkte führt zu n Differentialen, zwischen denen eine Relation besteht, wie sie durch das Verschwinden des betreffenden Coefficienten ausgesagt ist. Man kann nun aber umgekehrt auch von einer beliebigen *linearen* Relation zwischen zweien oder zwischen allen n Differentialen ausgehen. Weil sich diese Relation in den Coefficienten der Gleichung n^{ten} Grades ausdrücken lässt, so erhält man durch dieselbe eine Bedingungsgleichung zwischen der Linie u und ihren „Drehpunkten" $\widehat{udu}$. *Für diese, als für die Hauptcoincidenz eines Connexes, ist das Integrationsproblem auf eine Quadratur zurückgeführt.* Denn die angenommene Relation zwischen den n Differentialwerthen führt

durch ihre Integration zu einer neuen Gleichung zwischen den n auf die Schnittpunkte einer Geraden bezüglichen Integralen, und da sich durch zwei dieser Punkte alle übrigen ausdrücken lassen, so gewinnt man eine endliche Gleichung zwischen zweien auf der Geraden gelegenen Schnittpunkten. Sind also die Punkte der Fundamentalcurve durch zwei nicht homogene Parameter: λ_1 und λ_2, zwischen denen eine Bedingungsgleichung besteht, dargestellt, so erhält man nunmehr eine Schaar von Classencurven auf die Weise, dass man den Punkt, welchem die Parameterwerthe λ_1^0, λ_2^0 angehören, mit demjenigen Punkte verbindet, dessen Parameterwerthe durch die gewonnene Integralgleichung mit λ_1^0, λ_2^0 verknüpft sind. Aus der willkürlichen Constante, welche in dieser Gleichung vorkommt, wird eine Schaar von einfach unendlich vielen Curven abgeleitet.

Ein einfaches Beispiel für diese Art der Problemstellung liefert die Frage nach der Drehung, vermöge deren auch für die allgemeinen Differentiale dritter Gattung die Summe aller auf das Schnittpunktsystem einer Geraden bezüglichen Integrale constant bleibt, und es gilt allgemein das Gesetz, dass solch ein Drehpunkt auf jeder Geraden immer nur einmal vorhanden ist. Ueberhaupt gehört die allgemeine Behandlung dieser Fragen einem Gebiete an, welches dadurch eine Erweiterung des Abel'schen Theoremes bildet, dass hier nicht die *einfache* Summe der Differentiale untersucht wird, sondern eine solche, in welcher jedes Glied mit einem beliebigen aber constanten Factor, der auch Null sein kann, behaftet ist.

Alle Connexe, deren Integration sich durch diese Untersuchung auf eine Quadratur zurückführen lässt, haben zufolge ihrer Entstehung die besondere Eigenschaft, dass sie, falls sie sich auf *ternäre* Formen beziehen, *durch Uebertragung aus dem Systeme binärer Formen* gewonnen werden, und zwar solcher Formen, welche unmittelbar dem simultanen Systeme der in dem Differentiale vorkommenden Functionen entnommen sind, wenn man dieselben wie Formen, welche um eine Dimension niedriger sind, behandelt. Auch wird aus einer einfachen Abzählung ersichtlich, dass durch die Bildung der symmetrischen Functionen von D unter den ebenen Curven nur bei der Curve 3^{ter} Ordnung Connexe auftreten, welche dem Formensysteme der Fundamentalcurve ausschliesslich angehören*).

Im Folgenden habe ich versucht, diese Probleme, auf welche ich durch das Studium des auf eine ebene Curve 3^{ter} Ordnung bezüglichen

*) Unter den Raumcurven sind es gleichfalls die Normalcurven vom Geschlecht $p = 1$, nämlich die Curven 4^{ter} Ordnung, 1^{ter} Species, deren Differential keine Functionen weiter erfordert, als die Combinanten der beiden Flächen zweiter Ordnung, durch deren Durchschnitt die Curve erzeugt wird.

elliptischen Integrales geführt wurde*), auch für Differentiale *vom Geschlecht:* $p=0$ (§ 7.) und $p=3$ (§ 8.) zu erörtern. Der Vollständigkeit und des Zusammenhanges halber sind zunächst die für die Curve 3^{ter} Ordnung gefundenen Resultate kurz erwähnt worden (§ 6.); denn das auf diese Curve bezügliche überall endliche Integral lässt sich in eine bemerkenswerthe Beziehung zu dem einfachen Integrale vom Geschlecht $p=0$ bringen, zu welchem ein Kegelschnitt als Fundamentalgebilde Anlass giebt (§ 7, II). Jedoch musste ich mich im Allgemeinen fast nur darauf beschränken, an diesen Beispielen zunächst die Methode zu entwickeln, vermöge deren es gelingt, *eine wirkliche Darstellung aller auf das Schnittpunktsystem einer Fundamentalcurve beliebiger Ordnung mit einer Geraden bezüglichen Differentiale zu gewinnen* (§ 8, I und II), und bin noch nicht auf die Schwierigkeiten eingegegangen, welche bei der Parameterdarstellung von Curven beliebigen Geschlechts einer geometrischen Discussion solange entgegenstehen, als man sich, wie es bei diesen Untersuchungen zunächst der Fall ist, immer nur auf die Betrachtung *eines* Integrales beziehen kann.

Bei der Behandlung des längs eines Kegelschnittes erstreckten Differentiales lag es nahe, die Aronhold'sche *Integrationsmethode* nochmals zu berühren und die von Aronhold erledigten Probleme in den Zusammenhang dieser Untersuchungen aufzunehmen.

§ 6.

Ueber ein Differential vom Geschlecht: $p=1$.

Die Untersuchung derjenigen Connexe, bei welchen die Integration der Hauptcoincidenzcurven durch eine Quadratur geleistet werden kann, gewinnt bei den *ebenen Curven dritter Ordnung* besonderes Interesse, weil man hierbei, wie schon erwähnt wurde, auf Connexe geführt wird, welche ausschliesslich dem ternären cubischen Formensysteme angehören und daher für die Geometrie der Curve dritter Ordnung überhaupt von unmittelbarer Bedeutung sind. Zugleich liegt in der verhältnissmässig einfachen Periodicität des einen, überall endlichen, elliptischen Integrales die Möglichkeit begründet, auch die geometrischen Eigenschaften der Integralgleichungen, welche sich ergeben, ohne weitere Schwierigkeit zu übersehen.

Bezeichnet man das elliptische Differential erster Gattung, welches sich auf die zu Grunde gelegte Curve $f = a_x{}^3 = 0$ bezieht, mit:

$$(1) \qquad D = \frac{cxdx}{a_x{}^2 a_c} \qquad (a_x{}^3 = 0),$$

*) Zur Theorie der ternären cubischen Formen (§ 6). Math. Annalen Bd. IX, pag. 235.

so soll die cubische Gleichung für die drei Werthe von D entwickelt werden, welche dadurch entstehen, dass man auf der Curve von den drei Schnittpunkten einer Geraden: $u_x = 0$ zu den drei Schnittpunkten einer benachbarten Geraden: $u_x + du_x = 0$ fortschreitet. Man gewinnt diese Gleichung durch Elimination der Grössen x_i und dx_i aus den *fünf* Gleichungen:

$$(2)\quad D \cdot a_x^2 a_c - |cxdx| = 0,\ a_x^3 = 0,\ a_x^2 a_{dx} = 0,\ u_x = 0,\ (du)_x + u_{dx} = 0.$$

Diese fünf Gleichungen reichen zur Elimination der sechs Grössen: x_i und dx_i aus, weil zwischen diesen homogenen Veränderlichen noch zwei weitere Gleichungen von der Form:

$$(3)\quad k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 1 \qquad k_1 dx_1 + k_2 dx_2 + k_3 dx_3 = 0$$

vorausgesetzt werden können. Giebt man dem Differentiale (1) die im Vorhergehenden vielfach benutzte Form:

$$(4)\quad D = -\frac{du_x v_x}{a_x^2 (avu)}\ (a_x^3 = 0,\ u_x = 0),$$

in welcher die Coefficienten v_i beliebige Constanten bedeuten, so sind die Grössen dx_i bereits eliminirt und die vollständige Erledigung des gestellten Problemes erfordert also die Elimination der Grössen x aus einer linearen, einer quadratischen und einer cubischen Form. Diese Rechnung lässt sich noch dahin vereinfachen, dass man statt $a_x^3 = 0$ die Gleichung: $D \cdot a_x^2 (awu) + du_x w_x = 0$ einführt, wobei wiederum die Grössen w_i beliebige Constante darstellen; denn das gleichzeitige Bestehen der beiden Gleichungen: $u_x = 0$ und:

$$D = -\frac{v_x du_x}{a_x^2 (avu)} = -\frac{w_x du_x}{a_x^2 (awu)}$$

ist an die Bedingung $a_x^3 = 0$ geknüpft. Auf diese Weise ist die Eliminationsaufgabe auf zwei quadratische und eine lineare Gleichung gebracht; *das Resultat derselben, von welchem sich der die willkürlichen Constanten enthaltende Factor: (vwu) absondert, wird durch die cubische Gleichung dargestellt:*

$$(5)\quad D^3 \cdot F + 3D \cdot \Theta + 2f = 0,$$

wobei F, Θ, f die geläufigen Bedeutungen haben:

$$F = (abu)^2 (cdu)^2 (acu)(bdu),\quad \Theta = (abu)^2 a_x b_x,\ f = a_x^3,$$

nur dass hierbei die Grössen x durch die Unterdeterminanten $\widehat{udu}$ zu ersetzen sind. Zufolge des Abel'schen Theoremes verschwindet das zweite Glied dieser Gleichung, deren Wurzeln, mit D_1, D_2, D_3, bezeichnet, der Relation $D_1 + D_2 + D_3 = 0$ Genüge leisten.

Nimmt man zwischen diesen Wurzeln eine zweite lineare Beziehung an: $m_1 D_1 + m_2 D_2 + m_3 D_3 = 0$, die auch vermittelst der

ersten Gleichung in der Form: $(m_1 - m_3) D_1 + (m_2 - m_3) D_2 = 0$ dargestellt werden kann, wobei die Grössen m irgend welche rationale oder irrationale Zahlen bedeuten, so wird durch diese Forderung auf jeder Geraden u_x eine endliche Anzahl von Drehpunkten: $\widehat{udu}$ festgelegt. Denn damit dieselbe befriedigt sei, muss, wenn mit

$$\varrho = -\frac{m_2 - m_3}{m_1 - m_3}$$

das Verhältniss zweier Wurzeln bezeichnet wird, zwischen den Coefficienten der Gleichung (5) die Relation bestehen:

$$(6) \qquad F \cdot f^2 + \frac{(3\sigma - 2)}{\sigma^3} \Theta^3 = 0, \quad \sigma = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varrho^2 + \varrho + 1}{\varrho(\varrho + 1)}.$$

In dieser Gleichung können selbstverständlich, ohne dass sich der Werth von $\frac{3\sigma - 2}{\sigma^3}$ ändert, für ϱ die Werthe $-\frac{1}{1+\varrho} = -\frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1}$ und $-\frac{1+\varrho}{\varrho} = -\frac{m_1 - m_2}{m_3 - m_2}$ oder die reciproken Werthe dieser drei Ausdrücke substituirt werden. Diese Connexe bestimmen im Allgemeinen je *sechs* Drehpunkte auf der Geraden u und die Differentialgleichungen, welche durch die Hauptcoincidenzen derselben dargestellt werden, sind durch die vorstehende Betrachtung auf die Quadratur des der Curve dritter Ordnung zu Grunde liegenden elliptischen Integrales gebracht. Der Verlauf dieser Curven lässt sich zumal in den Fällen, in welchen ϱ eine *rationale* Zahl bedeutet, und in denen daher die Integralcurven *algebraisch* werden, ziemlich vollständig übersehen; doch darf ich wohl bei diesen Betrachtungen, in denen insbesondere die Curven, für welche $\varrho = 1$ wird, eine ausgezeichnete Rolle spielen, auf meine früheren Arbeiten mich zurückbeziehen*).

§ 7.

Ueber Differentiale vom Geschlecht: $p = 0$.

I.

Das Fundamentalintegral: $\omega(v) = \int \frac{|cx\,dx}{v_x a_x a_c} \cdots$.

Wenn zufolge des Abel'schen Theoremes die *Summe* der auf ein Schnittpunktsystem bezüglichen Integrale nach logarithmischen und algebraischen Functionen entwickelt werden kann, so liefert bei den Differentialen vom Geschlecht: $p = 0$ der nämliche Satz solch eine

*) Die geometrischen Eigenschaften dieser Curven sind näher behandelt in dem Aufsatze: Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades. Math. Annalen Bd. IX, pag. 1 ff.

Entwickelung für das *einzelne*, längs der Curve erstreckte Integral selber. Denn es besitzen die rationalen Curven Büschel von adjungirten Curven (im Allgemeinen von der Ordnung $n-2$) dergestalt, dass jede Curve des Büschels die Fundamentalcurve nur noch in einem variabelen Punkte trifft. Insbesondere lässt sich bei denjenigen Differentialen, *zu welchen ein Kegelschnitt als Fundamentalgebilde Anlass giebt*, die Ermittelung des Integrales so durchführen, dass zunächst die Summe der beiden Differentialwerthe, welche durch den Schnitt einer Geraden bei ihrer Drehung um einen festen, auf ihr gelegenen Punkt entstehen, integrirt und sodann der Mittelpunkt des Strahlbüschels auf den Kegelschnitt selbst verlegt wird. Die Einführung der unabhängigen Liniencoordinaten gewährt von vornherein, und hierauf beruht wohl ein Vorzug, eine Darstellung des Integrales, bei welcher die Variabelen frei von jeder Irrationalität erscheinen.

Als allgemeinste Form der hier geltenden Differentiale ist der Ausdruck:

$$(1)\quad D = \frac{|cxdx|\,\Theta(x_1x_2x_3)}{a_x a_c} = \frac{\Theta(x_1x_2x_3)\,(\widehat{uw}\,xdx)}{a_x(auw)} \qquad (a_x^2 = 0)$$

zu betrachten, wenn Θ eine algebraische, rationale und homogene Function der Grössen x bedeutet, in welcher der Nenner um eine Ordnung höher ist als der Zähler. Demnach erhält das einfachste dieser Differentiale die Form:

$$(2)\qquad D = \frac{|cxdx|}{v_x a_x a_c} = \frac{|\widehat{uw}\,xdx|}{v_x a_x (auw)} \qquad (a_x^2 = 0)\,.$$

Untersucht man nun die Summe der beiden Differentiale in den Schnittpunkten der Gerade u_x und der ihr benachbarten $u_x + du_x = 0$ mit a_x^2, so wird diese Summe nach unserem allgemeinen Satze gleich sein einem längs der Geraden v_x erstreckten Differentiale von der Form:

$$(3)\qquad D' = \frac{|cxdx|}{a_x^2 v_c} \qquad (v_x = 0)\,,$$

wenn dieses gleichfalls für den Schnitt der nämlichen Geraden gebildet und mit dem Factor -2 multiplicirt wird; demzufolge substituire man in die Gleichung (3) für x den Werth $\widehat{vu}$, für dx den Werth $\widehat{vdu}$, so wird:

$$(4)\qquad \sum D = -2D' = -2\frac{(vudu)}{(avu)^2}\,.$$

Bedeuten nun ξ und η diejenigen beiden Punkte, in welchen die Linie v_x den Kegelschnitt a_x^2 schneidet, das heisst: die beiden Unendlichkeitspunkte des Integrales (2), so kann

$$v = \widehat{\xi\eta}\,, \quad a_\xi^2 = 0\,, \quad a_\eta^2 = 0\,, \quad (abv)^2 = -2(a_\xi a_\eta)^2$$

gesetzt werden. Demnach ist:

$$(5)\quad \sum\int D = \sqrt{\frac{-2}{(abv)^2}} \int \frac{u_\xi du_\eta - u_\eta du_\xi}{u_\xi u_\eta} = \sqrt{\frac{-2}{(abv)^2}} \cdot \log \frac{u_\eta}{u_\xi} + C.$$

Um nun den auf einen bestimmten Punkt x des Kegelschnittes bezüglichen Integralwerth zu ermitteln, setze man $u = \widehat{kx}$ *und betrachte* k_i *als die Coordinaten eines festen, auf dem Kegelschnitte gelegenen Punktes*; dann ist:

$$(6)\quad \int^x \frac{|cx\,dx|}{v_x a_x a_c} = \sqrt{\frac{-2}{(abv)^2}} \log \frac{|kx\eta|}{|kx\xi|} + \text{const.}\,, \quad (a_x^2 = 0\,,\ a_k^2 = 0).^*)$$

Für den Fall, dass die Linie v_x den Kegelschnitt tangirt, also $(abv)^2 = 0$ und $\xi = \eta$ wird, erhält das Integral durch Substitution des Werthes $v = \widehat{\xi c}$, wobei ξ den Berührungspunkt, c einen beliebigen auf v gelegenen Punkt bezeichnet, die Form:

$$(7)\quad \int^x \frac{|cx\,dx|}{v_x a_x a_c} = -2\int^u \frac{(vu\,du)}{(avu)^2} = -\frac{2}{a_c^2}\int^u \frac{u_\xi du_c - u_c du_\xi}{u_\xi^2} = -\frac{2}{a_b^2}\,\frac{|kxc|}{|kx\xi|}\,.$$

Die *vollständige* Durchführung der Elimination der Grössen x aus den drei Gleichungen:

$$D = \frac{|\widehat{vu}\,x\,dx|}{v_x a_x (avu)} = -\frac{du_x}{a_x (avu)}\,, \quad a_x^2 = 0\,, \quad u_x = 0$$

führt zu der in D quadratischen Gleichung:

$$(8)\quad \tfrac{1}{2} D^2 \cdot (abu)^2 \cdot (avu)^2 + D(abu)^2 \cdot (vu\,du) + (au\,du)^2 = 0\,.$$

Die Summe der beiden Differentialwerthe wird also *gleich null*, wenn

---

*) Die von Aronhold angegebene, in den Punkten ξ und η nicht symmetrische Form lautet in den hier gebrauchten Bezeichnungen:

$$\sqrt{\frac{-2}{(abv)^2}} \log \frac{a_x a_\xi}{v_x}\,.$$

Der Uebergang von dem oben gefundenen Ausdrucke zu diesem bedingt eine Aenderung der additiven Constante, und zwar mit Durchgang durch einen Unendlichkeitspunkt; es ist:

$$\log\left(\frac{|kx\eta|}{|kx\xi|}\, a_k a_\xi\right) = \log\left(\frac{|k\xi\eta|}{|kx\xi|}\, a_x a_k + a_k a_\eta\right).$$

Setzt man hier $k = \eta$, so geht dieser Ausdruck in die Aronhold'sche Form über.

der Drehpunkt der Linie u in den Schnittpunkt von u mit v hineinrückt.

Sollen dagegen die beiden Differentialwerthe *einander gleich* sein, die vorstehende Gleichung (8) mithin eine reine quadratische werden, so muss die Bedingung erfüllt sein:

$$(9) \qquad (abu)^2 \left\{ (abu)^2 (vudu)^2 - 2(avu)^2 \cdot (audu)^2 \right\} = 0 .$$

Durch diesen Connex, den wir nach Absonderung des Factors $(abu)^2$ und nach Einführung der Bezeichnung: $\widehat{udu} = x$ wie folgt schreiben können:

$$(10) \qquad (abu)^2 \cdot v_x^2 - 2(avu)^2 \cdot a_x^2 = 0$$

werden jeder Geraden scheinbar *zwei* Punkte zugeordnet, welche jedoch, wie eine einfache Umformung lehrt, in einen zusammenfallen; unter der Bedingung $u_x = 0$ geht nämlich die vorstehende Gleichung in die Form über: $-2(a_x(avu))^2 = 0$ *). Demnach ergiebt sich der Satz: *Dreht man eine gerade Linie u_x in demjenigen Punkte, welcher harmonisch zu dem Schnittpunkte von u mit der Linie $v = \widehat{\xi\eta}$ in Bezug auf die beiden dem Kegelschnitte angehörigen Punkte gelegen ist, so sind die beiden so erhaltenen Werthe des Differentiales: $D = \frac{|cx\,dx|}{v_x a_x a_c}$ einander gleich.*

Die in der Gleichung (9) aufgestellte Hauptcoincidenz des Connexes (10) bietet ein immerhin bemerkenswerthes Beispiel dafür, wie eine durch einen Connex gegebene Differentialgleichung unter gewissen Bedingungen sofort dadurch integrirt werden kann, dass man statt der Differentiale $\widehat{udu}$ wiederum die Variabelen x einführt und die ausserdem noch vorkommenden Grössen u als Integrationsconstante auffasst. Denn setzt man die Grösse: $\frac{2(avu)^2}{(abu)^2} = \lambda$, so ist durch $v_x^2 - \lambda a_x^2 = 0$ ein Büschel von Kegelschnitten geliefert mit der Eigenschaft, dass auf jeder Tangente: u_x einer beliebigen im Büschel enthaltenen Curve der Berührungspunkt harmonisch liegt zu dem Punkte $\widehat{vu}$ in Bezug auf die beiden Schnittpunkte von u_x mit a_x^2, eine Eigenschaft, welche

---

*) Die Integration der Hauptcoincidenz des Connexes: $a_x\,(avu) = 0$ erfolgt am einfachsten, wenn $u = \widehat{xdx}$ gesetzt wird, alsdann ist $a_x(avu) = a_x^2 v_{dx} - a_x a_{dx} v_x$, und mit Hülfe des integrirenden Factors: $\frac{v_x}{(a_x^2)^2}$ gewinnt die Differentialgleichung die direct integrirbare Form:

$$\frac{1}{2} d\left(\frac{v_x^2}{a_x^2}\right) = 0 .$$

die Gleichung (10) als Integral der Differentialgleichung (9) erkennen lehrt. Ebenso bedeutet dann auch: $\lambda(abu)^2 - 2(avu)^2 = 0$ das nämliche Kegelschnittbüschel in Liniencoordinaten, wobei jetzt $\lambda = \frac{v_x^2}{a_x^2}$ ist. Während also im Allgemeinen jeder Connex zwei Reihen von zweifach unendlich vielen Connexcurven enthält, das heisst jedem Punkte der Ebene eine Classencurve, jeder Geraden eine Ordnungscurve zuordnet, welche im allgemeinen Falle sämmtlich von einander verschieden sind, weist der behandelte Connex die besondere Eigenschaft auf, dass er je einfach unendlich vielen Punkten die *nämliche* Classencurve, je einfach unendlich vielen Linien die *nämliche* Ordnungscurve entsprechen lässt, und zwar liegen diese einfach unendlich vielen Punkte jedesmal selbst auf einem der Kegelschnitte, welcher als Tangentengebilde aufgefasst zu jedem seiner Punkte die zugeordnete Connexcurve bildet. Den Punkten der Linie v_x entspricht der in ein Punktepaar zerfallene Kegelschnitt: $(avu)^2 = 0$, während umgekehrt der Verbindungslinie dieser beiden Punkte der ausgeartete Kegelschnitt: $(v_x)^2 = 0$ angehört. Einen weiteren Ausnahmepunkt im Connexe bildet auch noch der Durchschnitt der beiden Tangenten, welche in den Schnittpunkten von v_x mit a_x^2 gezogen werden können; für diesen wird $\lambda = \frac{3(abv)^2}{(abc)^2}$ und ihm entspricht als Classencurve das Quadrat des von ihm ausgehenden Strahlbüschels; die beiden genannten Tangenten endlich sind ebenso wie v_x zwei Ausnahmelinien, für sie ist gleichfalls

$$\lambda = \frac{2(avu)^2}{(abu)^2} = \frac{3(abv)^2}{(abc)^2}.$$

Die allgemeine Bedingung dafür, dass ein Connex: $\varphi(x, u) = 0$ durch seine Connexcurven zugleich die Integralcurven seiner Hauptcoincidenz *vollständig* darstellt, besteht geometrisch gefasst darin, dass die Ordnungscurve, welche der Linie u durch den Connex zugeordnet wird, dieselbe in *allen* Schnittpunkten berührt; aus der dualistischen Umkehr dieser Forderung folgt, dass auch die Classencurve, welche dem Punkte x entspricht, *alle* Tangenten, welche sich von x aus ziehen lassen, in diesem Punkte selber tangiren muss. Da aber dieses nur bei den Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe zutreffen kann, so kann auch diese behandelte Eigenschaft eines Connexes, falls dieser nicht in das Product niederer zerfallen soll, überhaupt nur noch für die *Connexe zweiter Ordnung und zweiter Classe* stattfinden. Dagegen ist es auch in viel allgemeineren Fällen möglich, dass die Connexcurven *einen Theil* der Integralcurven der Hauptcoincidenz bilden. Dieses tritt dann ein, wenn *jede* einer Linie u zugeordnete Ordnungscurve dieselbe in *einem* ihrer Schnittpunkte zugleich berührt,

oder wenn *jede* einem Punkte x entsprechende Classencurve durch diesen Punkt selber hindurchgeht. Die analytische Bedingung hierfür ist folgende:

Bezeichne $\varphi(x,u)=0$ die Gleichung des Connexes, so stellt die nämliche Form die dem Punkte x zugehörige Classencurve dar, sobald der Variabelen x ein fester Werth x^0 beigelegt wird. Die von dem Punkte x^0 an diese Curve ausgehenden Tangenten sind durch die beiden Gleichungen: $\varphi(x^0,u)=0$, $u_{x^0}=0$ gegeben, und die Coordinaten der auf denselben gelegenen Berührungspunkte sind den Werthen von: $\frac{\partial\varphi(x^0,u)}{\partial u_1}$, $\frac{\partial\varphi(x^0,u)}{\partial u_2}$, $\frac{\partial\varphi(x^0,u)}{\partial u_3}$ proportional. Soll nun einer dieser Berührungspunkte mit x^0 zusammenfallen, so muss, wenn u_i^0 die Coordinaten der zugehörigen Tangente bezeichnen, auch die Ordnungscurve $\varphi(x,u^0)=0$, welche der Linie u^0 entspricht, diese Linie im Punkte x^0 berühren; die Tangente dieser Curve im Punkte x^0 hat aber die Coordinaten: $\frac{\partial\varphi(x^0,u^0)}{\partial x_1^0}$ u. s. w., mithin wird die gesuchte Bedingung durch die Gleichungen:

$$\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=0,\quad \varphi(x,u)=0,\quad u_x=0$$

dargestellt*).

Soll in der oben sub (8) gefundenen Gleichung zwischen den beiden Wurzeln das *Verhältniss* ϱ (oder auch $\frac{1}{\varrho}$) *bestehen*, also:

$$D_1-\varrho D_2=0$$

sein, so müssen die Coefficienten dieser Gleichung der Bedingung genügen:

$$(11)\quad 2(abu)^2(vudu)^2(1-\sigma)+(audu)^2(bvu)^2\sigma^2=0,\quad \sigma=\frac{\varrho+1}{\varrho}.$$

Hier mag noch insbesondere der specielle Fall hervorgehoben werden, dass ϱ einen der complexen Werthe von $\sqrt[3]{1}$ bedeutet; alsdann

---

*) Die Relation: $\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}=0$ bildet einen speciellen Fall der Bedingungsgleichung, welche zwischen zweien Connexen: $\varphi(x,u)=0$ und $\psi(x,u)=0$ bestehen muss, damit die Differentialgleichungen, welche durch die Hauptcoincidenz derselben geliefert werden, in involutorischer Lage sich befinden, d. h. eine Integralcurve gemein haben. Diese Forderung ist nämlich, wie ich einer Vorlesung des Herrn Klein entnehme, durch das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen:

$$\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)=0,\quad \varphi(x,u)=0,\quad \psi(x,u)=0,\quad u_x=0$$

ausgedrückt.

wird σ gleich einer primitiven dritten Wurzel aus -1 und der zugehörige Connex, welcher durch seinen Drehpunkt diese Beziehung liefert, ist, wenn für $\widehat{ud}u$ die Variabelen x eingeführt werden, durch die Gleichung:

$$2(abu)^2 v_x^2 - (avu)^2 \cdot a_x^2 = 0 \tag{12}$$

gegeben. Die Punkte, welche durch diesen Connex der Geraden u zugeordnet werden, sind *äquianharmonisch* gelegen zu den drei Schnittpunkten von $u_x = 0$ mit $a_x^2 = 0$ und $v_x = 0$. Ueberhaupt gilt, wie durch directe Rechnung gefunden wird, allgemein das Gesetz, dass der Connex (11) auf jeder Geraden diejenigen beiden Punkte ausschneidet, welche mit je einem der Schnittpunkte des Kegelschnittes das Doppelverhältniss σ bestimmen in Bezug auf den anderen Schnittpunkt und den Punkt $\widehat{uv}$. Dabei besitzen indessen alle diese Connexe die besondere Eigenschaft, dass sie immer nur *einfach* unendlich viele Ordnungs- und einfach unendlich viele Classencurven enthalten; und zwar werden diese beiden Reihen von Connexcurven für die ganze Connexschaar immer durch *dieselben* Kegelschnitte, nämlich durch das Büschel: $v_x^2 - \lambda \cdot a_x^2 = 0$ und durch die Schaar: $\lambda (abu)^2 - 2(avu)^2 = 0$ dargestellt. Wir können diese, wohl auch durch anderweitige Betrachtungen leicht abzuleitenden Resultate dahin zusammenfassen:

Ist in der Ebene ein Kegelschnitt: $a_x^2 = 0$ und eine gerade Linie: $v_x = 0$ gegeben, und construirt man auf jeder Geraden u_x diejenigen beiden Punkte, welche mit je einem auf der Geraden gelegenen, dem Kegelschnitte angehörigen Punkte das Doppelverhältniss σ bestimmen in Bezug auf den anderen Schnittpunkt und den Punkt $\widehat{uv}$, so liegen diese beiden Punkte auf einem Kegelschnitte, welcher den Fundamentalkegelschnitt in seinen Schnittpunkten mit v_x tangirt. In der Gesammtheit von *einfach* unendlich vielen, auf diese Weise construirten Kegelschnitten lässt sich nun eine paarweise und reciproke Zuordnung auf einfach unendlich viele Arten treffen, indem allen denjenigen Geraden, welche den Kegelschnitt: $2(avu)^2 - \lambda(abu)^2 = 0$ (wobei jetzt λ irgend einen festen Werth bedeutet) umhüllen, der *nämliche* Kegelschnitt: $4 v_x^2 (1 - \sigma) + \lambda a_x^2 \sigma^2 = 0$ angehört, welcher alsdann durch seine Schnittpunkte auf allen diesen Geraden das Doppelverhältniss σ in dem soeben festgesetzten Sinne liefert. Durch diese Zuordnungen werden zugleich *Differentialgleichungen* construirt, wenn man in jedem Punkte der Ebene die beiden Richtungen betrachtet, welche von diesem Punkte als Tangenten des ihm jedesmal zugeordneten Kegelschnittes ausgehen. Sind dann die Punkte der Fundamentalcurve durch einfach periodische Functionen eines Parameters v dargestellt, so erhält man die *Integralcurven* dieser Differentialgleichungen, indem man aus den Co-

ordinaten zweier Curvenpunkte mit den Argumenten v und $\varrho \cdot v + \text{const.}$, $x_i = \varphi_i(v)$ und $y_i = \varphi_i(\varrho v + c)$, die Coordinaten der Verbindungslinie: $u = \widehat{xy}$ bildet; durch den Werth von ϱ (oder auch $\frac{1}{\varrho}$) ist die zugehörige Differentialgleichung $\left(\sigma = \frac{\varrho + 1}{\varrho}\right)$ charakterisirt, durch c die Integrationsconstante geliefert. Die Integralcurven sind *algebraisch*, sobald der Werth des Doppelverhältnisses: σ (also auch ϱ) *rational*, *transscendent* sobald er *irrational ist*. Der Kegelschnitt: $a_x^2 = 0$ und ebenso die doppeltzählende Gerade: $(v_x)^2 = 0$ bilden ein particuläres Integral in Punktcoordinaten, die Classencurve: $(abu)^2 = 0$ und das Punktepaar $(avu)^2 = 0$ ein particuläres Integral in Liniencoordinaten für sämmtliche Differentialgleichungen.

II.

Ueber den Zusammenhang des Fundamentalintegrales $\omega(v)$ mit dem auf eine Curve dritter Ordnung bezüglichen elliptischen Integrale.

Die eben behandelte quadratische Gleichung (8) kann nach dem allgemeinen Gedanken, welcher dem Beweise des Abel'schen Theorems zu Grunde gelegt wurde, in engste Beziehung zu der cubischen Gleichung gesetzt werden, welche im vorigen § für die allgemeine Curve dritter Ordnung aufgestellt ist. Zu dem Zwecke betrachte man das Product: $a_x^2 \cdot v_x = 0$ als zusammengehörige cubische Gleichung, so ist:

$$(1) \qquad D = \frac{|\, cx\, dx\,|}{2\, a_x a_c v_x + a_x^2 v_c} \qquad (a_x^2 \cdot v_x = 0)$$

ein Differential, *dessen Summenwerth für jedes Schnittpunktsystem gleich Null ist*. Dieses Differential zerfällt aber in zwei Theile, von denen sich der eine auf den Kegelschnitt: $a_x^2 = 0$, der andere auf die Gerade: $v_x = 0$ bezieht. Die drei zu den Schnittpunkten einer Geraden u_x gehörigen Differentialwerthe werden demnach durch eine cubische Gleichung gewonnen, welche sich aus dem Producte der Gleichung: $D \cdot (avu)^2 - (vudu) = 0$, durch welche der auf die Gerade v_x bezügliche Differentialwerth dargestellt wird, mit der obigen quadratischen Gleichung (8) zusammensetzt, wenn in derselben für D der Werth $2D$ geschrieben wird. Auf diese Weise erhält man das Resultat:

$$(2) \quad 2D^3(abu)^2 \cdot \left((avu)^2\right)^2 + D\left((audu)^2 \cdot (avu)^2 - 2\,(abu)^2 (vudu)^2\right) - (audu)^2 (vudu) = 0,$$

und diese Gleichung, in welcher der Coefficient von D^2, wie erforderlich, verschwindet, entspricht genau der im § 6. (5) gebildeten, wenn

dort für D der Werth $3D$ substituirt wird und beide Seiten mit dem Factor $-\frac{1}{2}$ multiplicirt werden:

$$-\tfrac{27}{2} D^3 \cdot F - \tfrac{9}{2} D \cdot \Theta - f = 0.$$

Denn setzt man: $a_x^3 = a_x^2 v_x$, so ist:

$$(3) \quad \begin{aligned} F &= (\alpha\beta u)^2(\gamma\delta u)^2(\alpha\gamma u)(\beta\delta u) = -\tfrac{4}{27}(abu)^2(cvu)^2(dvu)^2, \\ \Theta &= (\alpha\beta u)^2 a_x \beta_x = \tfrac{2}{9}\left(2(abu)^2 v_x^2 - (avu)^2 \cdot a_x^2\right). \end{aligned}$$

Diese Ergänzung des Differentiales dritter Gattung zu einem solchen, dessen Summenwerth immer gleich Null ist, findet ihren geometrischen Ausdruck darin, dass das elliptische Doppelblatt, welches durch einen Kegelschnitt: $u_a^2 = 0$ erzeugt wird, wenn man bei demselben als einem Tangentengebilde die reellen Träger imaginärer Tangenten ins Auge fasst*), nach Ausscheidung eines Punktes: $u_y = 0$, welcher innerhalb des vom Kegelschnitt umschlossenen Raumes angenommen werden soll, zu einer Art der Ringflächen wird, auf denen sich ein überall endliches Integral erstrecken lässt, oder mit anderen Worten, dass die Riemann'sche Doppelfläche, welche den Verlauf des behandelten Integrales vom Geschlecht $p=0$ repräsentirend, *einfach* zusammenhängend ist, dadurch *dreifach* zusammenhängend wird, dass man durch beide Blätter eine Punktirung ausführt, vermittelst deren zwei übereinanderliegende Punkte ausgeschieden werden, und die beiden Blätter an diesem Punkte wieder zusammenheftet. Während also die Summe der Argumente, welche zweien Tangenten des Kegelschnittes zukommen, durchaus veränderlich ist, wird dieselbe sofort *constant*, sobald auch das Argument der dritten Linie hinzugefügt wird, welche vom Schnittpunkte der beiden Tangenten zum Punkte: u_y hinführt. Aus der zwischen diesen drei Argumenten bestehenden Relation können alsdann, und darin liegt die Verwerthbarkeit dieser Betrachtung, ebenso wie bei den überall endlichen Differentialen alle die mannigfaltigen geometrischen Sätze abgeleitet werden, die auf einer Theilung der Periode beruhen; *nur muss man hierbei die verschiedenen Argumente unterscheiden*, je nachdem das Differential innerhalb der verschiedenen Gebiete bewegt wird.

Zur Erläuterung dieser Bemerkung diene zunächst die Ableitung des Kegelschnittbüschels, welches die Integralcurven desjenigen Connexes darstellt, für welchen $\varrho = 1$ ($\sigma = 2$) wird. Die Betrachtung soll hierbei mit Zugrundelegung einer Curve 2^{ter} Classe geführt werden. Die auf den adjungirten Punkt bezüglichen Argumente seien durch Klammern bezeichnet und die Integrationswege so normirt, dass

*) Klein: Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen, Math. Annalen Bd. VII.

zwischen den Argumenten dreier Linien aus einem Punkte die Gleichung besteht:

$$v_1 + v_2 + (v) \equiv 0 \pmod{p = 2\pi i},$$

wenn $p = 2\pi i$ die logarithmische Periode bedeutet; die andere Periode des elliptischen Integrales ist unendlich gross geworden. Die beiden Argumente v_1 und v_2 sollen nun bis auf eine Constante einander gleich sein, und es entsteht die Frage, welche Curven durch den Schnitt zweier Tangenten, welche in dieser Relation zu einander stehen, erzeugt werden. Auf einer Linie (v) liegen zwei Punkte solch einer Curve; denn es ist:

$$2v + \varsigma + (v) \equiv 0, \text{ also } v = -\frac{(v)}{2} - \frac{c}{2} \text{ oder } -\frac{(v)}{2} - \frac{c}{2} + \frac{p}{2}.$$

Mithin sind die gesuchten Curven *Kegelschnitte*, und zwar berühren dieselben den Fundamentalkegelschnitt überall, wo sie denselben treffen. Diese Berührung muss aber in den Berührungspunkten der beiden vom Punkte y ausgehenden Tangenten stattfinden, da nur für diese Tangenten die Gleichung $u = u + c$ gelten kann. Die erhaltenen Kegelschnitte bilden also eine Schaar von der Form:

$$\lambda(\alpha\beta x)^2 - 2(\alpha y x)^2 = 0.$$

Auf dieselbe Weise findet man, dass die Integralcurven eines durch den Werth $\varrho = \frac{m}{n}$ oder $\frac{n}{m}\left(\sigma = \frac{m+n}{m} \text{ oder } \frac{m+n}{n}\right)$ charakterisirten Connexes, falls m und n rationale und ganze Zahlen sind, von der Ordnung $(m + n)$ und vom Geschlecht $p = 0$ sein müssen; bei der Berechnung dieser Ordnungszahl sind für m und n die absoluten Werthe zu nehmen.

Im Uebrigen aber sind alle diese Curven genau die entsprechenden zu denjenigen, welche für die durch eine Curve dritter Classe gebildete Ringfläche gefunden wurden. Was dort als *Meridiancurven* bezeichnet ist, wird hier durch die Gesammtheit aller durch den adjungirten Punkt gehenden Geraden vorgestellt, während die *Breitencurven* durch das behandelte Kegelschnittbüschel geliefert werden.

Will man das Bild dieses Curvennetzes völlig symmetrisch gestalten, so wähle man zum Fundamentalkegelschnitt einen Kreis und verlege den Unendlichkeitspunkt in den Mittelpunkt dieses Kreises. Fällt insbesondere dieser angenommene Kreis mit den beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkten selber zusammen, und nimmt man alsdann einen beliebigen Punkt der Ebene zum Unendlichkeitspunkte an, so erhält man Curvensysteme, welche sich auf einer Kugel als die Systeme der *Meridian-* und *Breitencurven* und der *Loxodromen* durch stereographische Projection abbilden lassen.

III.

Ueber die Aronhold'sche Integrationsmethode.

Die Ermittelung der allgemeinen zu einem Kegelschnitte gehörigen Integrale:

$$\int \frac{cx\,dx\;\alpha_x^{n-1}}{\beta_x^n a_x a_c},$$

von denen im Vorhergehenden nur das einfachste ($n = 1$) behandelt wurde, wird bei Aronhold*) auf die beiden Integrale:

$$\int \frac{|cx\,dx}{v_x a_x a_c} \quad \text{und} \quad \int \frac{|cx\,dx\;a_x}{\tau_x \varkappa_x a_x a_c} \qquad (a_x^2 = 0)$$

zurückgeführt. Diese Zurückführung erfolgt auf die Weise, dass statt der Curven β_x^n *ein Product von n Geraden* eintritt, welche auf dem Kegelschnitte das nämliche Schnittpunktsystem wie β_x^n ausschneiden. Bezeichnet man dieses Product mit: $p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdots p_x^{(n)}$, so kann, falls die Linien $p_x^{(i)}$ als von einander verschieden und nicht in linearer Weise von einander abhängig vorausgesetzt werden, der Quotient:

$$\frac{\alpha_x^{n-1}}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdots p_x^{(n)}}$$

in Partialbrüche zerlegt werden, deren Nenner die Grössen x entweder in der ersten oder in der zweiten Potenz enthält. Nach Multiplication dieser einzelnen Ausdrücke mit dem Differentialwerth: $\frac{|cx\,dx|}{a_x a_c}$ handelt es sich noch darum, eine geeignete Substitution für die willkührlichen Grössen c zu ermitteln.

Dieses Verfahren ist nicht mehr ausreichend, sobald eine Curve von höherer als der zweiten Ordnung dem Differentiale zu Grunde gelegt wird, also bei Lösung aller derjenigen Probleme, welche im vorhergehenden Abschnitt durchgeführt wurden. Dagegen erscheint es bei den vorliegenden Problemen unter den mannigfachen Zerlegungsweisen als die einfachste, weshalb ich hier auf diese specielle Methode in Kürze eingehen und nur hinsichtlich der Integration des zweiten Fundamentalintegrales eine geringfügige Abänderung treffen werde.

Die zweckmässigste Zerlegung des Ausdruckes: $\frac{\alpha_x^{n-1}}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdots p_x^{(n)}}$, in welchem der Nenner um *eine* Ordnung höher ist als der Zähler,

*) A. a. O. Bd. 61.

nach Partialbrüchen erster und zweiter Ordnung, wird durch die Gleichung geliefert*):

$$(1)\qquad \frac{\alpha_x^{n-1}}{p_x^{(1)}p_x^{(2)}\cdots p_x^{(n)}} = \sum_{i,k}\frac{a_{ik}a_x(ap^{(i)}p^{(k)})}{p_x^{(i)}p_x^{(k)}} + \sum_i \frac{b_i}{p_x^{(i)}}.$$

Die Möglichkeit und Bestimmtheit derselben folgt aus einer Abzählung der auf beiden Seiten stehenden Constanten unter Voraussetzung der Unabhängigkeit der linearen Functionen $p_x^{(i)}$. Für die rechts vorkommenden Constanten ergeben sich nach der früher gebrauchten Bezeichnung die Werthe:

$$(2)\quad a_{ik} = \frac{(ap^{(i)}p^{(k)})^{n-1}}{(ap^{(i)}p^{(k)})^2\Pi(pp^{(i)}p^{(k)})},\qquad b_i = \frac{\alpha_{y^{(i)}}^{n-1}}{\Pi(p_{y^{(i)}})} - \sum_k \frac{a_{ik}a_{y^{(i)}}(ap^{(i)}p^{(k)})}{p_{y^{(i)}}^{(k)}}.$$

In diesen Formeln bedeutet $\Pi(pp^{(i)}p^{(k)})$ das Product, welches entsteht, wenn p alle Werthe von $p^{(1)}$ bis $p^{(n)}$ annimmt, mit Ausnahme der Werthe $p^{(i)}$ und $p^{(k)}$. Für den im Uebrigen willkührlichen Punkt $y^{(i)}$ soll die Gleichung bestehen: $p_{y^{(i)}}^{(i)} = 0$ und der Ausdruck $\Pi(p_{y^{(i)}})$, sowie $\sum_k$ umfasst wiederum alle Werthe von p, mit Ausnahme des einen Werthes: $p^{(i)}$. In der That wird man durch diese Partialbrüche nur auf die beiden Integrale:

$$a_{ik}\int \frac{a_x(ap^{(i)}p^{(k)})\,|cx\,dx|}{p_x^{(i)}p_x^{(k)}a_x a_c} \quad\text{und}\quad b_i\int \frac{cx\,dx|}{p_x^{(i)}a_x a_c} = b_i\cdot\omega(p^{(i)})$$

geführt, von denen das zweite bereits früher ermittelt wurde, das erste dagegen durch Substitution des Werthes: $\widehat{p^{(i)}p^{(k)}} = c$ die einfache Integration zulässt:

$$\int \frac{a_x(ap^{(i)}p^{(k)})\,|cx\,dx|}{p_x^{(i)}p_x^{(k)}a_x a_c} = \int \frac{p_x^{(i)}p_{dx}^{(k)} - p_x^{(k)}p_{dx}^{(i)}}{p_x^{(i)}p_x^{(k)}} = \log\frac{p_x^{(k)}}{p_x^{(i)}}.$$

Mithin ist:

$$(3)\qquad \int \frac{\alpha_x^{n-1}\,|cx\,dx|}{\beta_x^n\cdot a_x a_c} = \sum_{i,k} a_{ik}\log\frac{p_x^{(k)}}{p_x^{(i)}} + \sum_i b_i\cdot\omega(p^{(i)}).$$

Auf diese Weise lässt sich bereits das Fundamentalintegral zweiter Art:

$$\int \frac{|cx\,dx|\,\alpha_x}{p_x^{(1)}p_x^{(2)}a_x a_c}$$

*) A. a. O. p. 126.

behandeln, für welches indessen folgende directe Auswerthung nicht minder einfach ist. Für die beiden auf der Geraden u_x gelegenen Punkte ist die Summe der Differentialwerthe:

$$(4)\quad \sum \frac{a_x\, c x\, dx}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} a_x a_x} = -2\left[\frac{a_x\, c x\, dx}{a_x^2 p_x^1 p_x^2} + \frac{a_x\, c x\, dx}{a_x^2 p_x^{(2)} p_x^{(1)}}\right]$$

$$= -2\left[\frac{(a p^{(2)} u)\, p^2 u\, du}{(a p^{(2)} u)^2 p^{(1)} p^{(2)} u} - \frac{(a p^{(1)} u)\, p^{(1)} u\, du}{a p^{(1)} u)^2 (p^{(1)} p^{(2)} u}\right].$$

$$p_x^{(2)} = 0, \qquad p_x^{(1)} = 0;$$

Setzt man nun:

$$p^{(1)} p^{(2)} = \eta, \quad p^{(2)} a = \xi, \quad a p^{(1)} = \vartheta$$

und berücksichtigt, dass aus der Gleichung:

$$(a p^{(1)} p^{(2)}) \cdot a_x a_x = a_\eta \{a_x a_\eta + p_x^{(1)} a_\xi + p_x^{(2)} a_\vartheta\}$$

die neuen Gleichungen fliessen:

$$(a p^{(1)} u) = \frac{(p^{(1)} p^{(2)} u)\, a_\vartheta a_\eta}{a_\eta^2} + \frac{(a p^{(1)} p^{(2)})\, (a p^{(1)} u) a_\eta}{a_\eta^2},$$

$$(a p^{(2)} u) = -\frac{(p^{(1)} p^{(2)} u)\, a_\xi a_\eta}{a_\eta^2} + \frac{(a p^{(1)} p^{(2)})\, (a p^{(2)} u) a_\eta}{a_\eta^2},$$

so ergiebt sich aus der Substitution dieser Werthe in die Formel (4) der Ausdruck:

$$(5)\quad \frac{2 a_\xi a_\eta}{a_\eta^2} \int \frac{(p^{(2)} u\, du)}{(a p^{(2)} u)^2} + \frac{2 a_\vartheta a_\eta}{a_\eta^2} \int \frac{(p^{(1)} u\, du)}{(a p^{(1)} u)^2}$$

$$- \frac{2 a_\eta}{a_\eta^2} \int \left[\frac{(a p^{(1)} p^{(2)})(a p^{(2)} u \cdot (p^{(2)} u\, du)}{(a p^{(2)} u)^2 (p^{(1)} p^{(2)} u)} - \frac{(a p^{(1)} p^{(2)})\, a p^{(1)} u)(p^{(1)} u\, du)}{(a p^{(1)} u)^2 (p^{(1)} p^{(2)} u)}\right].$$

Die unter dem dritten Integralzeichen stehende Differenz nimmt, wenn statt der Producte $(a p^{(1)} p^{(2)})\,(p^{(2)} u\, du)$ und $(a p^{(1)} p^{(2)})\,(p^{(1)} u\, du)$ die Werthe:

$$-(p^{(1)} p^{(2)} u)\,(a p^{(2)} du) + (a p^{(2)} u)\,(p^{(1)} p^{(2)} du)$$

und

$$-(p^{(1)} p^{(2)} u)\,(a p^{(1)} du) + (a p^{(1)} u)\,(p^{(1)} p^{(2)} du)$$

eingeführt werden, die direct integrirbare Form an:

$$-\frac{(a p^{(2)} u)\,(a p^{(2)} du)}{(a p^{(2)} u)^2} + \frac{(a p^{(1)} u)\,(a p^{(1)} du)}{(a p^{(1)} u)^2}.$$

[redacted] ist:

$$(6)\qquad \sum \int^{u} \frac{\alpha_x \,|\, c\,x\,dx\,|}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} a_x a_c} = -\frac{a_\vartheta a_\eta}{a_\eta^{\,2}}\,\omega(p^{(1)}) - \frac{a_\zeta a_\eta}{a_\eta^{\,2}}\,\omega(p^{(2)}) + \frac{\alpha_\eta}{a_\eta^{\,2}} \log \frac{(a p^{(2)} u)^2}{(a p^{(1)} u)^2}.$$

Um den Werth des Integrales für einen bestimmten Punkt x des Kegelschnittes zu erhalten, setze man wiederum $u = \widehat{kx}$ und betrachte k als festen Punkt der Curve; alsdann wird*):

$$(7)\qquad \int^{x} \frac{\alpha_x \,|\, c\,x\,dx\,|}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} a_x a_c} = -\frac{a_\vartheta a_\eta}{a_\eta^{\,2}}\,\omega(p^{(1)}) - \frac{a_\zeta a_\eta}{a_\eta^{\,2}}\,\omega(p^{(2)}) + \frac{\alpha_\eta}{a_\eta^{\,2}} \log \frac{p_x^{(2)}}{p_x^{(1)}},$$

wobei $\omega(p^{(1)})$ und $\omega(p^{(2)})$ die in § 7. I. (Gleichung (6)) definirten Werthe besitzen. In der vorhin bei Bildung der Gleichung (3) benutzten Formel ist: $\alpha_x = a_x a_\eta$, mithin auch $a_\vartheta a_\eta = 0$, $a_\zeta a_\eta = 0$ und $\alpha_\eta = a_\eta^{\,2}$.

Ein beachtenswerther specieller Fall tritt ferner noch ein, wenn $a_\eta^{\,2} = (a p^{(1)} p^{(2)})^2 = 0$ wird, also der Schnittpunkt der beiden Geraden auf dem Kegelschnitte liegt. Bezeichnet dann $\xi^{(1)}$ den zweiten Punkt, in welchem die Linie $p_x^{(1)}$ den Kegelschnitt trifft, ebenso $\xi^{(2)}$ den zweiten Punkt auf der Geraden $p_x^{(2)}$, so führe man in die Gleichung (4) die Werthe ein: $p_x^{(1)} = (\xi^{(1)} \eta x)$, $p_x^{(2)} = (\xi^{(2)} \eta x)$. Der letzte Ausdruck rechts zerlegt sich in vier direct integrirbare Differentiale, so dass man erhält: Es ist unter den Bedingungen:

$$a_\eta^{\,2} = 0, \quad a_{\xi^{(1)}}^{\,2} = 0, \quad a_{\xi^{(2)}}^{\,2} = 0$$

$$(8)\qquad \int^{x} \frac{|\, c\,x\,dx\,|\,\alpha_x}{(\xi^{(1)}\eta x)(\xi^{(2)}\eta x) a_x a_c} = \frac{1}{(\xi^{(1)}\xi^{(2)}\eta)} \left\{ -\frac{\alpha_\eta}{a_{\xi^{(1)}} a_\eta} \cdot \frac{(k x \xi^{(1)})}{(k x \eta)} + \frac{\alpha_\eta}{a_{\xi^{(2)}} a_\eta} \cdot \frac{(k x \xi^{(2)})}{(k x \eta)} + \frac{\alpha_{\xi^{(1)}}}{a_{\xi^{(1)}} a_\eta} \log \frac{(k x \xi^{(1)})}{(k x \eta)} - \frac{\alpha_{\xi^{(2)}}}{a_{\xi^{(2)}} a_\eta} \log \frac{(k x \xi^{(2)})}{(k x \eta)} \right\}.$$

Die Fälle endlich, in welchen die linearen Functionen $p_x^{(i)}$, welche in der allgemeinen Form das Schnittpunktsystem von β_x^n vertreten, nicht mehr als in linearer Weise von einander unabhängig betrachtet werden dürfen, lassen sich durch Formen ersetzen, in welchen diese Functionen zu verschiedenen Potenzen erhoben vorkommen, und werden mit Hülfe des δ-Processes erledigt. Diese Fälle treten dann ein, wenn entweder die im Zähler stehende Function β_x^n als irreducibele

*) A. a. O. p. 119.

Curve den Kegelschnitt in einigen Punkten mehrfach schneidet, oder aber selbst schon aus der Potenz einer Function niederer Ordnung besteht.

Der Einfluss des δ-Processes auf die sub (3) aufgestellte allgemeine Gleichung folgt aus der Formel:

$$(9)\quad \int \frac{\alpha_x \,|\, c x\, dx\,|}{(p_x)^2 a_x a_c} = \omega((p)^2) = -\delta\omega(p) = \frac{(abp)(ab\alpha)}{(abp)^2}\omega(p) - \frac{2}{p_x}\frac{(ap\alpha)a_x}{(abp)^2}.$$

Die Ableitung derselben kann entweder direct (wie bei Aronhold: p. 106) oder aus der am Schlusse des § 4. erörterten allgemeinen Form gewonnen werden.

§. 8.

Ueber ein Differential vom Geschlecht: $p = 3$.

I.

Das Fundamentalintegral: $\int \frac{\alpha_x \,|\, c x\, dx}{a_x^3 a_c}$.

Das algebraische Differential, welchem eine allgemeine *Curve vierter Ordnung* zu Grunde liegt, ist wie bekannt vom Geschlecht: $p = 3$. Soll dasselbe ein in allen Punkten der Curve *endliches* sein, so darf der Nenner ausser der ersten Polare eines beliebigen Punktes c_i in Bezug auf die Fundamentalcurve keine weitere Function enthalten und der Zähler des Differentiales muss für diejenigen Punkte, in denen gleichzeitig a_x^4 und $a_x^3 a_c$ gleich Null werden, ebenfalls verschwinden. Dem gemäss erhält das zu betrachtende homogene Differential die Form:

$$(1)\qquad D = \frac{|\, c x\, dx\,|\, \alpha_x}{a_x^3 a_c} = \frac{\alpha_x(v_x u_{dx} - u_x v_{dx})}{a_x^3 (auv)}, \quad (a_x^4 = 0).$$

Entsprechend den drei willkührlichen Constanten, welche in die lineare Function des Zählers eingehen, giebt es hier *drei* überall endliche Differentiale, d. h. die Werthe jedes anderen überall endlichen Differentiales lassen sich aus dreien linear zusammensetzen. (Unter dem Ausdrucke: „überall endliches Differential", welcher von der Bezeichnungsweise der Integrale entlehnt ist, wird ein solches Differential zu verstehen sein, dessen Werth in allen Punkten nicht von geringerer Ordnung unendlich klein ist, als der Zuwachs der im Differentiale enthaltenen veränderlichen Grösse x.)

Es sollen nun die symmetrischen Functionen entwickelt werden für diejenigen vier Werthe eines in der Form (1) *definirten Differentiales, welche dadurch zu Stande kommen, dass man die Curve vierter Ordnung durch eine gerade Linie schneidet und diese Linie um einen ihrer*

Punkte unendlich wenig dreht. Zur Bildung dieser Functionen gelangt man, indem man in der Gleichung (1) u_x gleich Null setzt und die Relation: $u_{dx} + du_x = 0$ berücksichtigt. Alsdann hat man nämlich die Grössen x aus den drei Gleichungen:

$$(2) \qquad a_x^4 = 0, \quad u_x = 0, \quad D = -\frac{\alpha_x v_x du_x}{a_x^3 (avu)}$$

zu eliminiren, und findet somit die biquadratische Gleichung, durch welche die Werthe von D als abhängig von den Coordinaten u_i und du_i erscheinen. Diese Eliminationsrechnung liesse sich noch auf die Weise vereinfachen, dass man nach Einführung einer zweiten Reihe von willkührlichen Coordinaten: w_i statt v_i die Gleichungen aufstellt:

$$(3) \qquad D = -\frac{\alpha_x v_x du_x}{a_x^3 (avu)}, \quad D = -\frac{\alpha_x w_x du_x}{a_x^3 (awu)}, \quad u_x = 0,$$

und aus diesen nach dem Bildungsgesetze der Resultante einer linearen und zweier cubischen ternären Formen die Grössen x entfernt. In beiden Fällen erhielte man indessen die gesuchte Gleichung noch mit überflüssigen Factoren multiplicirt. Denn bei dem ersten Eliminationsverfahren muss, damit die willkührlichen Grössen v_i herausgehen, der Factor $(avu)^4$ vor den gesammten Endausdruck treten; bei dem zweiten lässt sich um des gleichen Grundes willen der Factor (uvw) absondern. Es erscheinen demnach beide Arten als unzweckmässig, wie schon von vornherein daraus ersichtlich wird, dass unter den Bedingungen: $a_x^4 = 0$ und $u_x = 0$ bereits der Ausdruck: $a_x^3 (avu)$ durch v_x theilbar wird.

Ich werde daher im Folgenden einen Weg einschlagen, welcher die gesuchte Gleichung frei von überflüssigen Factoren darstellen lehrt, zugleich aber auch ein allgemeines Gesetz für die Ausführung desselben Problemes bei Differentialen von beliebiger Ordnung und beliebigem Geschlechte liefert.

Der ganzen Betrachtungsweise algebraischer Differentiale, welche im Vorliegenden zur Anwendung gekommen ist, liegt der Gedanke als wesentlicher zu Grunde, dass unter der Bedingung: $u_x = 0$ jede Curve beliebiger Ordnung durch ein Product von n geraden Linien dargestellt werden kann, dass also, bis auf Glieder mit dem Factor u_x, die Gleichung gilt:

$$a_x^n = p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdots p_x^{(n)}.$$

Die Grössen $p_x^{(i)}$ haben dabei nur die Bedingung zu erfüllen, dass jede der Geraden durch einen der Schnittpunkte von u_x mit a_x^n hindurchgeht, und werden dann erst in linearer Weise zu dreien von einander abhängig, wenn mehr als zwei dieser Schnittpunkte zusam-

menrücken. Der Beweis für die Giltigkeit dieses Ansatzes folgt, wie schon früher erwähnt wurde, aus der einfachen Ueberlegung, dass in dem Büschel von Curven n^{ter} Ordnung, welche durch die Schnittpunkte von $a_x^n = 0$ und $p_x^1 p_x^2 \cdots p_x^n = 0$ hindurchgehen, jedenfalls *eine* vorhanden ist, die von der Linie $u_x = 0$ in $n+1$ Punkten geschnitten wird, die mithin diese Linie als einen Theil ihres Bereiches enthält.

An diese Darstellung einer Curve durch das Product von geraden Linien knüpft sich zugleich eine neue und für gewisse Probleme sehr zweckmässige Art der Symbolik, indem man die Grössen p^n eben nur als eine symbolische Bezeichnung der Coefficienten der Grundform betrachtet*). In der Darstellungsweise, welche gegenwärtig üblich ist, wird die Curve als die n^{te} Potenz einer linearen Function behandelt. Sie als Product von n verschiedenen geraden Linien anzusehen, ist aber für die symbolische Berechnung algebraischer Formen nur dann von Vortheil, wenn man bei Bildung der covarianten Formen, welche die Coefficienten der Grundform zu höheren Graden enthalten, nicht genöthigt ist, ebensoviele neue Symbole einzuführen wie bei der gewöhnlichen symbolischen Rechnungsweise. Bei dieser wird, damit der Rückgang zur realen Bildung eindeutig bleibt, die Einführung verschiedener Symbolensysteme nothwendig, sobald die Coefficienten der Grundform zu höherer als der ersten Potenz vorkommen. Für die andere Art der Darstellung dagegen ist solch eine Unterscheidung zusammengehöriger Symbole nicht in allen Fällen geboten. Denn die Covarianten einer *ternären* Form werden zum Theil dadurch gewonnen, dass man in allen zu dem Systeme einer *binären* Form gehörigen Bildungen die aus symbolischen Coefficienten der Grundform zusammengesetzten Determinanten durch Hinzufügung einer Reihe von Liniencoordinaten: u_i zu dreigliedrigen Determinanten erweitert**). Man ge-

*) Ein Hinweis auf diese Art symbolischer Bezeichnung für Formen von *drei* oder *mehr* Dimensionen findet sich in dem Aufsatze von Aronhold: Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie (Journal Bd. 62, p. 343). In seiner Abhandlung: Sulle forme ternarie di grado qualunque (Giornale di matematiche Vol. IX, p. 152) hat Battaglini diese Symbolik zu einer Reihe von Formenbildungen benutzt, welche dem binären Systeme entstammen. Inzwischen erschliesst das ebenfalls dort gegebene Beispiel der Resultante dreier beliebigen Curven die Erkenntniss, dass die Giltigkeit des für die Anwendung dieser Bezeichnungsweise im Texte entwickelten einfachen Gesetzes nicht auf die Classe der aus dem binären Gebiete herübergenommenen Formen beschränkt ist. Es ist mir indessen bisher nicht gelungen, die Grenzen der Anwendbarkeit nur *eines* Symbolensystemes genau zu präcisiren; für die Form der allgemeinen Resultante lässt sich die Zulässigkeit dieser einfachen Darstellung dadurch begründen, dass man den Symbolen zugleich eine *reale* Bedeutung beilegt.

**) Clebsch: Ueber die symbolische Darstellung algebraischer Formen. Journal Bd. 59.

winnt auf diese Weise eine ganze Classe von ternären Bildungen und für diese ergiebt sich der Satz:

Bei allen aus einem binären Systeme herübergenommenen ternären Formen bedarf man in der symbolischen Darstellung: $a_x^n = p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdots p_x^{(n)}$ *nur einer Reihe von Symbolen* $p^{(i)}$, *welche je nach dem Grade, bis zu welchem die Coefficienten der Grundform in die dargestellte Form eingehen, zu beliebigen Potenzen erhoben vorkommen werden.*

Der Beweis dieses Satzes gründet sich einfach darauf, dass in den eben betrachteten Formen den Grössen $p_x^{(i)}$ auch die reale Bedeutung beigelegt werden kann, in Folge deren jede von ihnen eine gerade Linie repräsentirt. Für alle aus dem binären Systeme herübergenommenen Formen, zu welchen beispielsweise die Curvengleichung in Liniencoordinaten gehört, gewinnt man also durch diese Art der Symbolik eine in vielen Fällen zweckmässige Darstellung, die sich zugleich auch auf einige ternäre Bildungen im eigentlichen Sinne, wie z. B. auf die Resultantenbildung dreier Curven, durch ähnliche Betrachtungen, wie die soeben geführten, erweitern lässt. Es ist leicht einzusehen, dass das analoge Verfahren vermittelst des Productes von n verschiedenen linearen Functionen bei den *binären* Formen auf die Darstellung der Covarianten als der symmetrischen Functionen aus den n Wurzelwerthen führen muss, so dass hier bei keiner Bildung die Einführung neuer Symbole nothwendig wird. (Für *quaternäre* Formen gilt ein gleich einfaches Gesetz sicher für diejenigen Covarianten, welche durch zweimalige Anwendung der Ränderung binärer Determinanten mit den Ebenencoordinaten u_i und v_i aus dem binären Systeme ins quaternäre Gebiet erhoben sind.)

Führt man nun in die ursprüngliche Form des allgemeinen Differentiales:

$$D = \frac{|cx\,dx|\,a_x^{m+n-3}}{\beta_x^m \cdot a_x^{n-1} a_c}, \quad (a_x^n = 0,\ u_x = 0,\ u_{dx} + du_x = 0)$$

für a_x^n den Werth $p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdots p_x^{(n)}$ ein, so erhält man n verschiedene Differentiale, von denen jedes längs einer der Geraden $p_x^{(i)}$ erstreckt ist, und denen nunmehr nach der oft angewandten Substitution $x = \widehat{p^{(i)} u}$, $dx = \widehat{p^{(i)} du}$ die Form gegeben werden kann:

$$D_i = n \cdot \frac{(p^{(i)} u\, du)\,(\alpha p^{(i)} u)^{m+n-3}}{(\beta p^{(i)} u)^m \,\Pi(p p^{(i)} u)}.$$

Unter dem Ausdrucke: $\Pi(p p^{(i)} u)$ ist wiederum der Werth des Productes aus allen Determinanten zu verstehen, welche dadurch zu Stande

kommen, dass p alle Werthe von $p^{(1)}$ bis $p^{(n)}$ mit Ausnahme des Werthes $p^{(r)}$ durchläuft. Es folgt aus dieser Betrachtungsweise der Satz:

Die n Werthe eines auf die Curve a_x^n bezüglichen Differentiales, welche dadurch entstehen, dass man die Curve durch eine gerade Linie $u_x = 0$ schneidet und diese Linie um einen ihrer Punkte bis zur benachbarten Linie $u_x + du_x = 0$ bewegt, lassen sich durch n Differentiale ausdrücken, welche längs gerader Linien erstreckt sind, von denen jede bezüglich durch einen der n Schnittpunkte von $a_x^n = 0$ und $u_x = 0$ hindurchgeht; diese Differentiale sind gleichfalls von den Schnittpunkten mit u_x bis zu den Schnittpunkten mit $u_x + du_x = 0$ zu nehmen.

Der Zuwachs jedes algebraischen Differentiales bei der Bewegung einer schneidenden Geraden ist also durch den Zuwachs eines rationalen Differentiales darstellbar. Verwerthen wir nun insbesondere diesen Satz für das in der Gleichung (1) definirte Differential, so erhalten wir, wenn $a_x^4 = p_x^{(1)} p_x^{(2)} p_x^{(3)} p_x^{(4)}$, $u_x = 0$ gesetzt wird, die vier Differentialwerthe:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= 4 \cdot \frac{(\alpha p^{(1)} u)\,(p^{(1)} u\, du)}{(p^{(2)} p^{(1)} u)\,(p^{(3)} p^{(1)} u)\,(p^{(4)} p^{(1)} u)}, \\
D_2 &= 4 \cdot \frac{(\alpha p^{(2)} u)\,(p^{(2)} u\, du)}{(p^{(3)} p^{(2)} u)\,(p^{(4)} p^{(2)} u)\,(p^{(1)} p^{(2)} u)}, \\
D_3 &= 4 \cdot \frac{(\alpha p^{(3)} u)\,(p^{(3)} u\, du)}{(p^{(4)} p^{(3)} u)\,(p^{(1)} p^{(3)} u)\,(p^{(2)} p^{(3)} u)}, \\
D_4 &= 4 \cdot \frac{(\alpha p^{(4)} u)\,(p^{(4)} u\, du)}{(p^{(1)} p^{(4)} u)\,(p^{(2)} p^{(4)} u)\,(p^{(3)} p^{(4)} u)}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Der Kürze halber sei für den Punkt $u\widehat{du}$ der Werth ξ, für $\widehat{u\alpha}$ der Werth η eingeführt, so dass die Zähler der vorstehenden Differentiale die Formen:

$$4 p_\xi^{(1)} p_\eta^{(1)}, \quad 4 p_\xi^{(2)} p_\eta^{(2)}, \quad 4 p_\xi^{(3)} p_\eta^{(3)}, \quad 4 p_\xi^{(4)} p_\eta^{(4)}$$

annehmen. Da die Grössen ξ und η völlig gleichberechtigt auftreten, so gilt der immerhin bemerkenswerthe Satz, dass der Werth des Differentiales ungeändert bleibt, wenn auf der Linie u die Bedeutung des Drehpunktes ξ mit dem Punkte η vertauscht wird.

Um die gesuchte biquadratische Gleichung, deren Wurzeln durch die vorstehenden Differentiale gegeben sind, zu bilden, ist das Product $(D - D_1)(D - D_2)(D - D_3)(D - D_4)$ auszumultipliciren. Der Coefficient des mit dem Factor D^3 behafteten Gliedes muss, da wir es hier mit einem Differentiale zu thun haben, welches im Nenner keine andere Function als $a_x^3 a_c$ enthält, zufolge des Abel'schen Theoremes

verschwinden*), so dass nur noch die Coefficienten von D^4, D^2, D^1 und D^0 zu betrachten sind.

Der Coefficient von D^4 wird nach Multiplication mit dem Producte der in den Gleichungen (4) stehenden Nenner:

$$5) \quad \prod (p^{(i)}p^{(k)}u)^2 = (p^{(1)}p^{(2)}u)^2(p^{(1)}p^{(3)}u)^2(p^{(1)}p^{(4)}u)^2(p^{(2)}p^{(3)}u)^2(p^{(2)}p^{(4)}u)^2(p^{(3)}p^{(4)}u)^2.$$

Der Coefficient von D^2 lautet:

$$(6) \quad -16\sum p_\xi^{(1)}p_\eta^{(1)}p_\xi^{(2)}p_\eta^{(2)}(p^{(3)}p^{(4)}u)^2(p^{(1)}p^{(3)}u)(p^{(1)}p^{(4)}u)(p^{(2)}p^{(3)}u)(p^{(2)}p^{(4)}u),$$

wobei die fünf übrigen Glieder der Summe durch cyklische Vertauschung der Indices: 1, 2, 3, 4 aus dem hingeschriebenen Ausdruck folgen.

Ebenso wird *der Coefficient von D* durch cyklische Vertauschung aus einem seiner Glieder gebildet, demnach durch die Form dargestellt:

$$(7) \quad -64\sum p_\xi^{(1)}p_\eta^{(1)}p_\xi^{(2)}p_\eta^{(2)}p_\xi^{(3)}p_\eta^{(3)}(p^{(1)}p^{(4)}u)(p^{(2)}p^{(4)}u)(p^{(3)}p^{(4)}u).$$

Der *Coefficient des von D freien Gliedes* endlich hat die einfache Form:

$$(8) \quad 256\, p_\xi^{(1)}p_\xi^{(2)}p_\xi^{(3)}p_\xi^{(4)} \cdot p_\eta^{(1)}p_\eta^{(2)}p_\eta^{(3)}p_\eta^{(4)}.$$

Wenngleich durch diese Darstellung der einzelnen Coefficienten die Aufgabe der Elimination als gelöst anzusehen und die gesuchte biquadratische Gleichung gefunden ist, so ist es doch von Interesse, diese Coefficienten in der gewöhnlich üblichen Form der zu einer Curve 4^{ter} Ordnung gehörigen Covarianten zu bilden, weil diese, gegründet auf das System einer binären biquadratischen Form, in dieser Gestalt für eine Discussion der Gleichung geläufiger sind. Ein einfaches Verfahren, um von der einen Art der Symbolik zur anderen zu gelangen, beruht wesentlich auf der Kenntniss des vollständigen, zu einer binären Form gehörigen Systemes.

---

*) Der identisch verschwindende Coefficient von D^3 hat bei der hier gebrauchten symbolischen Darstellung die Form:

$$\sum p_\xi^{(1)}p_\eta^{(1)}(p^{(2)}p^{(3)}u)(p^{(2)}p^{(4)}u)(p^{(3)}p^{(4)}u)\prod(p^{(i)}p^{(k)}u),$$

wobei sich die vier Glieder dieser Summe durch cyklische Vertauschung der Werthe 1, 2, 3, 4 ableiten. Dieser Ausdruck lässt sich bei der gewöhnlichen Symbolik als Polare der gleichfalls verschwindenden Form:

$$a_x b_x (abu)(acu)^2(dbu)^2(deu)^2(ceu)^2$$

darstellen.

II.

Die Covarianten der binären biquadratischen Form dargestellt als symmetrische Functionen der Wurzelwerthe.

Die Covarianten der binären Formen dritter und vierter Ordnung sind als symmetrische Functionen der Wurzeln von Cayley*) vollständig entwickelt worden und finden sich in übersichtlicher Weise zusammengestellt in dem Lehrbuche von Fiedler: „Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen“ (p. 196). Ich werde mich daher nur darauf beschränken, die Zahlencoefficienten anzugeben, durch welche diese Formeln in Uebereinstimmung mit dem Systeme gebracht werden, welches Clebsch in seiner „Theorie der binären Formen“ aufgestellt hat. Diese Zahlencoefficienten lassen sich an einem einfach gewählten Beispiel einer biquadratischen Gleichung, deren Wurzeln als bekannt vorausgesetzt werden, berechnen**). Auf diese Weise ergeben sich *für die beiden Covarianten vierter und sechster Ordnung*, die gleich durch Ränderung der in ihnen vorkommenden Determinanten zu ternären Formen erhoben werden sollen, die Werthe:

---

*) Fifth Memoir upon Quantics; Phisos. Transact. 1858, Vol. 148, p. 452 ff.

**) Man findet, dem bisherigen Gange entsprechend, für das auf eine *Curve dritter Ordnung* bezügliche Differential die drei Werthe:

$$D_1 = \frac{3\,(p^{(1)}u\,du)}{(p^{(2)}p^{(1)}u)\,(p^{(3)}p^{(1)}u)},$$

$$D_2 = \frac{3\,(p^{(2)}u\,du)}{(p^{(3)}p^{(2)}u)\,(p^{(1)}p^{(2)}u)},$$

$$D_3 = \frac{3\,(p^{(3)}u\,du)}{(p^{(1)}p^{(3)}u)\,(p^{(2)}p^{(3)}u)},$$

aus deren Multiplication die cubische Gleichung:

$$-D^3\prod(p^{(i)}p^{(k)}u)^2 + 9D\sum(p^{(1)}u\,du)\,(p^{(2)}u\,du)\,(p^{(1)}p^{(3)}u)\,(p^{(2)}p^{(3)}u) - 27\,(p^{(1)}u\,du)\,(p^{(2)}u\,du)\,(p^{(3)}u\,du) = 0$$

hervorgeht. Der Coefficient des mit D^2 multiplicirten Gliedes führt auf die vermöge $u_x = 0$ verschwindende Form:

$$(abu)^2\,(acu)\,(bcu)\,c_x = [\Theta f],$$

während

$$F = \frac{2}{27}\prod(p^{(i)}p^{(k)}u)^2,$$

$$\Theta = -\frac{2}{9}\sum p_x^{(1)}p_x^{(2)}\,(p^{(1)}p^{(3)}u)\,(p^{(2)}p^{(3)}u)$$

wird.

$$(1)\quad H_x^4 = (abu)^2 a_x^2 b_x^2 = -\frac{1}{24}\sum (p_x^{(1)})^2 (p_x^{(2)})^2 (p^{(3)}p^{(4)}u)^2,$$

$$(2)\quad T_x^6 = (abu)^2 (cbu) a_x^2 b_x c_x^3 = \frac{1}{32}\sum (p_x^{(1)})^2 (p_x^{(2)})^2 (p_x^{(3)})^2 (p^{(1)}p^{(4)}u) \cdot (p^{(2)}p^{(4)}u)(p^{(3)}p^{(4)}u).$$

Ebenso findet man für die durch *Ränderung der beiden Invarianten* i und j entstehenden Formen, welche durch Σ und T bezeichnet werden sollen:

$$(3)\quad \Sigma = (abu)^4 = \frac{1}{12}\sum (p^{(1)}p^{(2)}u)^2 (p^{(3)}p^{(4)}u)^2,$$

$$(4)\quad T = (abu)^2 (acu)^2 (bcu)^2 = \frac{1}{72}\sum (p^{(3)}p^{(4)}u)^2 (p^{(1)}p^{(2)}u)^2 \cdot \{(p^{(3)}p^{(1)}u)(p^{(4)}p^{(2)}u) + (p^{(3)}p^{(2)}u)(p^{(4)}p^{(1)}u)\}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt die Gleichung der Curve $a_x^4 = p_x^{(1)} p_x^{(2)} p_x^{(3)} p_x^{(1)}$ in *Liniencoordinaten:*

$$(5)\qquad F = \Sigma^3 - 6T^2 = \frac{1}{32}\prod (p^{(i)}p^{(k)}u)^2.$$

Mit diesen Formeln ist das vollständige System aller von einer binären biquadratischen Form herübergenommenen Covarianten erschöpft; jedoch ist in der vorigen Gleichung (6) ein Ausdruck aufgestellt worden, welcher als Polare von:

$$\sum (p_x^{(1)})^2 (p_x^{(2)})^2 (p^{(3)}p^{(4)}u)^2 (p^{(1)}p^{(3)}u)(p^{(1)}p^{(4)}u)(p^{(2)}p^{(3)}u)(p^{(2)}p^{(4)}u)$$

erscheint, und der sich rational aus den bereits gebildeten Formen ableiten lassen muss. Als Covariante vierter Ordnung, welche in den Coefficienten der Grundform vom vierten Grade ist, kann dieser Ausdruck nur dem Büschel $\varkappa f + \lambda H$ angehören, wobei $\varkappa$ und λ die mit blossen Zahlencoefficienten behafteten Formen Σ und T repräsentiren. Die Zahlencoefficienten werden am besten wiederum durch die Berechnung eines speciellen Beispieles bestimmt; es ist:

$$(6)\quad T \cdot f_x^4 - \Sigma H_x^4 = \frac{1}{48}\sum (p_x^{(1)})^2 (p_x^{(2)})^2 (p^{(3)}p^{(4)}u)^2 (p^{(1)}p^{(3)}u)(p^{(1)}p^{(4)}u)(p^{(2)}p^{(3)}u)(p^{(2)}p^{(4)}u).$$

III.

Die symmetrischen Functionen der Differentialwerthe.

Werden die Werthe (5), (6) und (2) für die sub I. berechneten Coefficienten eingetragen, wobei noch von der Form (6) die quadratische, von der Form (2) die cubische Polare in Bezug auf die Punktcoordinaten als die variabelen Grössen zu bilden sind, so erhält man das Resultat:

Die symmetrischen Functionen des Differentiales:

$$D = \frac{|cx\,dx|\,\alpha_x}{a_x^3\,a_c}, \quad (a_x^4 = 0)$$

berechnet für die vier Schnittpunkte von $a_x^4 = 0$ *mit der Geraden:* $u_x = 0$ *und einer dieser benachbarten Geraden:* $u_x + du_x = 0$ *ergeben sich aus der biquadratischen Gleichung:*

$$\tfrac{1}{8} D^4 \cdot F + 3D^2 (\mathsf{T} \cdot f_{\xi^2} f_{\eta^2} - \Sigma \cdot H_{\xi^2} H_{\eta^2}) - 8D \cdot T_{\xi^3} T_{\eta^3} + a_\xi^4 \cdot a_\eta^4 = 0,$$

wenn $\xi = \widehat{u\,du}$, $\eta = \widehat{u\,\alpha}$ *gesetzt wird.*

Die Formen: $F = \Sigma^3 - 6\,\mathsf{T}^2$, H_x^4 etc. haben die sub II. definirten Bedeutungen, unter $f_{\xi^2} f_{\eta^2}$, $H_{\xi^2} H_{\eta^2}$ etc. sind die durch Polarenbildungen aus f_x^4, H_x^4 entstandenen Ausdrücke zu verstehen.

Aus dieser Gleichung geht wie erforderlich zunächst hervor, dass, falls die Linie u_x eine *Tangente* der Curve ist, die beiden Differentiale im Berührungspunkte von höherer Ordnung werden, als das Differential du der unabhängigen Veränderlichen u. Während also bei einem überall endlichen Differentiale der Werth in Bezug auf den Zuwachs dx niemals von niederer Ordnung unendlich klein wird, findet ein gleiches Gesetz in Bezug auf den Zuwachs du nicht statt; denn sobald u eine Tangente der Curve ist, muss für den Berührungspunkt das Increment dx als von der *ersten* Ordnung unendlich klein gelten, sobald du eine unendlich kleine Grösse der *zweiten* Ordnung vorstellt.

Für eine der 24 *Wendetangenten* ist gleichzeitig $\Sigma = 0$ und $\mathsf{T} = 0$, und es verschwindet in diesem Falle sowohl der Coefficient von D^4 als auch der von D^2, wodurch das Unendlichwerden von *drei* Differentialwerthen angezeigt ist. Bedeutet endlich u eine der 28 *Doppeltangenten* der Curve, so müssen sämmtliche vier Differentiale, welche paarweise zusammengehören, unendlich gross werden, die drei ersten Coefficienten unserer Gleichung mithin verschwinden, und zwar unabhängig von bestimmten Werthen der Grössen ξ_i und η_i. Dass dieses in der That eintritt, wird folgendermassen ersichtlich: Wenn ξ_i und η_i zwei beliebige Punkte einer Doppeltangente bezeichnen, so stellt der Ausdruck: $a^4_{(\xi + \lambda\eta)} = 0$ eine für λ biquadratische Form dar, für welche die Wurzeln paarweise zusammenfallen, deren Hesse'sche Form demnach bis auf einen constanten Factor mit der Fundamentalform selber übereinstimmt; das heisst, es ist:

$$\varrho \cdot a_\xi^4 = H_\xi^4, \quad \varrho \cdot a_\eta^4 = H_\eta^4, \quad \varrho \cdot a_\xi^3 a_\eta = H_\xi^3 H_\eta \text{ u. s. w. } (u = \widehat{\xi\eta}).$$

Aus der im binären Systeme geltenden Beziehung*):

$$4(xy)\,T_x^{\,3}T_y^{\,3} = a_x^{\,4}\cdot H_y^{\,4} - a_y^{\,4}\cdot H_x^{\,4}$$

geht nun für ternäre Formen, wenn $\xi = u\widehat{du}$, $\eta = \widehat{u\alpha}$, demnach $u_x = \frac{|\xi\eta x|}{|u\,du\,\alpha|}$ gesetzt wird, die Gleichung hervor:

$$(1)\qquad 4(u\,du\,\alpha)\,T_\xi^{\,3}T_\eta^{\,3} = a_\xi^{\,4}\cdot H_\eta^{\,4} - a_\eta^{\,4}\cdot H_\xi^{\,4}.$$

Setzt man in dieser Formel für η den Werth $\widehat{bu}$, wobei b Symbole der Grundform bedeuten, so erhält man:

$$(2)\qquad -4\,b_\xi\,T_\xi^{\,3}(Tbu)^3 = \mathsf{T}\cdot a_\xi^{\,4} - \Sigma\cdot H_\xi^{\,4}.$$

Weil nun die Form (1) verschwindet, sobald ξ und η beliebige Punkte einer Doppeltangente bedeuten, so gilt das Nämliche auch für die Form (3), wodurch für diesen Fall das Verschwinden der drei ersten Coefficienten der Gleichung (1) nachgewiesen ist, welche besondere Werthe man auch für die auf u gelegenen Punkte ξ und η wählen mag.

Bleibt man bei der Voraussetzung, dass u eine *Tangente* der Curve darstellt, so scheint es, als ob jetzt das Verschwinden des zweiten Coefficienten zu jedem Punkte η zwei Drehpunkte ξ liefert, für welche noch ein dritter Differentialwerth im Verhältniss zu den Grössen du unendlich gross wird. Indessen ergiebt sich leicht, dass unter der Bedingung: $\Sigma^3 - 6\,\mathsf{T}^2 = 0$ der Kegelschnitt, welcher bei variabelen Werthen von ξ durch das Verschwinden des zweiten Coefficienten der Linie u zugeordnet wird, diese Linie tangirt, und zwar in demjenigen Punkte, in welchem diese Linie von der Fundamentalcurve berührt wird. Denn es ist, wenn die Bedingung aufgestellt wird, dass die Linie $u_\xi = 0$ den Kegelschnitt:

$$\mathsf{T}\cdot f_\xi^{\,2}f_\eta^{\,2} - \Sigma\cdot H_\xi^{\,2}H_\eta^{\,2} = 0$$

tangirt:

$$\mathsf{T}^2\cdot a_\eta^{\,2}\,b_\eta^{\,2}(ab\,u)^2 - 2\,\Sigma\cdot\mathsf{T}\cdot a_\eta^{\,2}H_\eta^{\,2}(aHu)^2 + \Sigma^2\cdot H_\eta^{\,2}H_\eta'^{\,2}(HH'u)^2 = H_\eta^{\,4}(\mathsf{T}^2 - \tfrac{1}{6}\Sigma^3),$$

und diese Bedingung ist also erfüllt, sobald u eine Tangente der Fundamentalcurve wird. Die beiden vermeintlichen Punkte fallen mit dem Berührungspunkte zusammen, und da für diesen auch die beiden anderen Coefficienten verschwinden, so wird hierbei, wenn Drehpunkt und Berührungspunkt zusammenrücken, die ganze Gleichung illusorisch; die Wurzeln derselben sind unbestimmt, so lange man nicht auf die zweiten Differentiale: d^2u eingeht.

---

*) Clebsch: Theorie der binären Formen (p. 144).

Wird schliesslich der Coefficient des Gliedes, welches die erste Potenz von D enthält, gleich Null gesetzt:

$$T_\xi^3 T_\eta^3 = 0,$$

so gewinnt die biquadratische Gleichung eine durch Quadratwurzeln auflösbare Form. Mithin erhält man den Satz:

Auf jeder Geraden $u_x = 0$ sind bei gegebenen Werthen von α_x, d. h. sobald der Punkt $\eta = \widehat{u\alpha}$ auf der Geraden bestimmt ist, noch immer drei Punkte ξ_i vorhanden, welche als Drehpunkte für die Linie u die Eigenschaft besitzen, dass von den vier Differentialen je zwei einander entgegengesetzt gleich werden. Diese drei Punkte bilden die cubische Polare des Punktes $\eta = \widehat{u\alpha}$ in Bezug auf die zu den vier Schnittpunkten der Linie u_x mit der Fundamentalcurve gehörige Covariante sechster Ordnung.

Ueber eine mit den Bessel'schen Functionen verwandte Function.

Von E. Lommel in Erlangen.

1. C. Neumann hat in seiner „Theorie der Bessel'schen Functionen“*) unter der Bezeichnung $O^n_{(s)}$ eine rationale ganze Function von $\frac{1}{z}$ vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade eingeführt, welche im Falle eines geraden n der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 O^n}{\partial z^2} + \frac{3}{z} \cdot \frac{\partial O^n}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2-1}{z^2}\right) O^n = \frac{1}{z},$$

im Falle eines ungeraden n aber der Gleichung

$$\frac{\partial^2 O^n}{\partial z^2} + \frac{3}{z} \cdot \frac{\partial O^n}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2-1}{z^2}\right) O^n = \frac{n}{z^2}$$

als particuläres Integral genügt, und mit der Bessel'schen Function $J^n_{(s)}$ die in der Gleichung

$$2 \frac{\partial O^n_{(s)}}{\partial z} = O^{n-1}_{(s)} - O^{n+1}_{(s)}$$

ausgesprochene Eigenschaft theilt. Die nahe Verwandtschaft zwischen den Functionen J und O, welche sich in diesem Umstande offenbart, veranlasste Herrn Neumann, der Function J (der Bessel'schen Function erster Art) die Function O als „*Bessel'sche Function zweiter Art* an die Seite zu stellen. In einer bald darauf erschienenen Schrift**) habe ich es für zweckmässiger gehalten, den Namen „*Bessel'sche Function zweiter Art*“ auf die Function $Y^n_{(s)}$ zu übertragen, welche neben $J^n_{(s)}$ einer und derselben (der sog. Bessel'schen) Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) y = 0$$

als zweites particuläres Integral Genüge leistet. Seitdem ist diese Bezeichnungsweise, wie ich glaube, allgemein angenommen worden.

*) Leipzig, Teubner. 1867.

**) Studien über die Bessel'schen Functionen. Leipzig, Teubner. 1868.

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, den Zusammenhang der Neumann'schen Function O mit den beiden Arten der Bessel'schen Functionen J und Y genauer zu erforschen. Dieser Untersuchung, bei welcher sich die Function O als specieller Fall einer viel allgemeineren Function herausstellen wird, sind die folgenden Zeilen gewidmet.

2. Ausgehend von dem allgemeinen Integral*)

$$y = z^{-\frac{a-1}{2}} \left[A J^{\nu}_{(z)} + B J^{-\nu}_{(z)} \right]$$

der *reducirten* linearen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{a}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2}{z^2} \right) y = 0$$

finden wir leicht durch Variation der Constanten das Integral der *vollständigen* linearen Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{a}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2}{z^2} \right) y = k z^{\mu - \frac{a+1}{2}}.$$

Nach der erwähnten Methode erhalten wir zur Bestimmung der Functionen von z, welche jetzt statt der Constanten A und B gesetzt werden müssen, die beiden Gleichungen

$$J^{\nu} \frac{\partial A}{\partial z} + J^{-\nu} \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

und

$$\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z} \cdot \frac{\partial B}{\partial z} = k z^{\mu - 1},$$

aus welchen sich

$$\frac{\partial A}{\partial z} = - \frac{k z^{\mu-1} J^{-\nu}}{N}$$

und

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{k z^{\mu-1} J^{\nu}}{N}$$

ergiebt, wo zur Abkürzung

$$J^{\nu} \frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z} - J^{-\nu} \frac{\partial J^{\nu}}{\partial z} = N$$

gesetzt wurde. Nun ist aber**)

$$J^{\nu} \frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z} - J^{-\nu} \frac{\partial J^{\nu}}{\partial z} = - \frac{2}{\pi z} \sin \nu \pi .$$

Setzt man diesen Werth statt N oben ein und integrirt, so findet man

*) Math. Annalen. Bd. III, S. 481.

**) Math. Annalen. Bd. IV, S. 104.

$$A = \frac{k\pi}{2\sin\nu\pi}\int z^{\mu} J^{-\nu} dz + A_1$$

$$B = -\frac{k\pi}{2\sin\nu\pi}\int z^{\mu} J^{\nu} dz + B_1$$

wo A_1 und B_1 neue willkührliche Constante sind. Das vollständige Integral der Gleichung (1) gewinnt demnach folgende Gestalt:

$$(2) \qquad y = z^{-\frac{a-1}{2}}\left[A_1 J^{\nu} + B_1 J^{-\nu}\right]$$
$$+ \frac{k\pi z^{-\frac{a-1}{2}}}{2\sin\nu\pi}\left(J^{\nu}\int z^{\mu} J^{-\nu} dz - J^{-\nu}\int z^{\mu} J^{\nu} dz\right).$$

Diese Form des Integrals behält jedoch nur solange Geltung, als ν nicht positiv oder negativ ganz ($= \pm n$) ist. In diesem Falle nämlich genügt der entsprechenden reducirten Gleichung als allgemeines Integral der Ausdruck

$$y = z^{-\frac{a-1}{2}}\left[AJ^{n} + BY^{n}\right],$$

von welchem ausgehend die Rechnung genau so zu führen ist, wie vorhin, mit dem einzigen Unterschiede, dass jetzt überall für die Bessel'sche Function erster Art mit negativem Index die Bessel'sche Function zweiter Art Y eintritt; namentlich hat man jetzt an die Stelle von N den Ausdruck*)

$$J^{n}\frac{\partial Y^{n}}{\partial z} - Y^{n}\frac{\partial J^{n}}{\partial z} = \frac{1}{z}$$

zu setzen. Als vollständiges Integral ergiebt sich daher im gegenwärtigen Falle

$$(2^a) \qquad y = z^{-\frac{a-1}{2}}\left[A_1 J^{n} + B_1 Y^{n}\right]$$
$$+ kz^{-\frac{a-1}{2}}\left(Y^{n}\int z^{\mu} J^{n} dz - J^{n}\int z^{\mu} Y^{n} dz\right).$$

Führen wir nun die Bezeichnungen ein

$$(\mathrm{I}) \qquad S^{\mu,\nu}_{(z)} = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left(J^{\nu}_{(z)}\int z^{\mu} J^{-\nu}_{(z)} \cdot dz - J^{-\nu}_{(z)}\int z^{\mu} J^{\nu}_{(z)} dz\right)$$

und

$$(\mathrm{I}^a) \qquad S^{\mu,n}_{(z)} = Y^{n}_{(z)}\int z^{\mu} J^{n}_{(z)} \cdot dz - J^{n}_{(z)}\int z^{\mu} Y^{n}_{(z)} dz,$$

so wird entweder

$$y = z^{-\frac{a-1}{2}}\left[A_1 J^{n} + B_1 Y^{n} + kS^{\mu,n}\right]$$

oder

$$y = z^{-\frac{a-1}{2}}\left[A_1 J^{\nu} + B_1 J^{-\nu} + kS^{\mu,\nu}\right]$$

*) Math. Annalen Bd. IV, S. 106.

der Differentialgleichung (1) als vollständiges Integral genügen, je nachdem ν eine ganze Zahl ($= \pm n$) ist, oder nicht.

3. Die Function $S_{(z)}^{\mu,\nu}$ ist es nun, deren Eigenschaften hier etwas näher betrachtet werden sollen. Wir bedürfen hierzu neben den beiden Grundgleichungen der Bessel'scheu Functionen

$$\text{(A)} \qquad \frac{2\nu}{z} J_{(z)}^{\nu} = J_{(z)}^{\nu-1} + J_{(z)}^{\nu+1}$$

$$\text{(B)} \qquad 2\frac{\partial J_{(z)}^{\nu}}{\partial z} = J_{(z)}^{\nu-1} - J_{(z)}^{\nu+1}$$

noch einiger Reductionsformeln, welche aus diesen Grundgleichungen unmittelbar folgen. Multiplicirt man nämlich jede derselben mit z^{μ} und integrirt nach z, so ergiebt sich

$$2\nu \int z^{\mu-1} J^{\nu} dz = \int z^{\mu} J^{\nu-1} dz + \int z^{\mu} J^{\nu+1} dz$$

und

$$2z^{\mu} J^{\nu} - 2\mu \int z^{\mu-1} J^{\nu} dz = \int z^{\mu} J^{\nu-1} dz - \int z^{\mu} J^{\nu+1} dz .$$

Durch Addition und Subtraction erhält man hieraus

$$\int z^{\mu} J^{\nu-1} dz = z^{\mu} J^{\nu} - (\mu - \nu) \int z^{\mu-1} J^{\nu} dz$$

und

$$\int z^{\mu} J^{\nu+1} dz = -z^{\mu} J^{\nu} + (\mu + \nu) \int z^{\mu-1} J^{\nu} dz$$

oder, wenn man in der ersten $\nu + 1$, in der zweiten $\nu - 1$ an die Stelle von ν setzt:

$$\text{(C)} \qquad \int z^{\mu} J^{\nu} dz = z^{\mu} J^{\nu+1} - (\mu - \nu - 1) \int z^{\mu-1} J^{\nu+1} dz$$

$$\text{(D)} \qquad \int z^{\mu} J^{\nu} dz = -z^{\mu} J^{\nu-1} + (\mu + \nu - 1) \int z^{\mu-1} J^{\nu-1} dz .$$

Setzt man dagegen in dem vorletzten Gleichungspaare $\mu + 1$ statt μ, und löst jede derselben nach dem zur Rechten vorkommenden Integrale auf, so erhält man

$$\text{(E)} \qquad \int z^{\mu} J^{\nu} dz = \frac{z^{\mu+1}}{\mu - \nu + 1} J^{\nu} - \frac{1}{\mu - \nu + 1} \int z^{\mu+1} J^{\nu-1} dz$$

$$\text{(F)} \qquad \int z^{\mu} J^{\nu} dz = \frac{z^{\mu+1}}{\mu + \nu + 1} + \frac{1}{\mu + \nu + 1} \int z^{\mu+1} J^{\nu+1} dz .$$

Durch Combination der Gleichung (C) mit (D), nachdem in letzterer μ mit $\mu - 1$ und ν mit $\nu + 1$ vertauscht worden, ergiebt sich ferner

$$\text{(G)} \qquad \int z^{\mu} J^{\nu} dz = z^{\mu} J^{\nu+1} + (\mu - \nu - 1) z^{\mu-1} J^{\nu} - (\mu - \nu - 1)(\mu + \nu - 1) \int z^{\mu-2} J^{\nu} dz$$

und in gleicher Weise geht

(H) $$\int z^{\mu} J^{\nu} dz = \frac{z^{\mu+1}}{\mu-\nu+1} J^{\nu} - \frac{z^{\mu+2}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)} J^{\nu-1} - \frac{1}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)} \int z^{\mu+2} J^{\nu} dz$$

aus (E) und (F) hervor, nachdem in letzterer $\mu + 1$ statt μ und $\nu - 1$ statt ν gesetzt worden ist. Diese sämmtlichen Formeln (C bis H) gelten ebenso wie die Gleichungen (A) und (B), aus welchen sie fliessen, sowohl für die Bessel'schen Functionen erter Art J als für diejenigen zweiter Art Y.

4. Gehen wir zur Betrachtung der Function $S^{\mu,\nu}$ über, so ist vor Allem aus (I) ersichtlich, dass

(II) $$S^{\mu,-\nu} = S^{\mu,\nu}$$

ist. —

Nun werde in (I) $\mu + 2$ statt μ gesetzt, so dass

$$S^{\mu+2,\nu} = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} \left(J^{\nu} \int z^{\mu+2} J^{-\nu} dz - J^{-\nu} \int z^{\mu+2} J^{\nu} dz \right)$$

hervorgeht. Nach (G) aber ist

$$\int z^{\mu+2} J^{\nu} dz = z^{\mu+2} J^{\nu+1} + (\mu-\nu+1) z^{\mu+1} J^{\nu} - (\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1) \int z^{\mu} J^{\nu} dz,$$

und

$$\int z^{\mu+2} J^{-\nu} dz = z^{\mu+2} J^{-\nu+1} + (\mu+\nu+1) z^{\mu+1} J^{-\nu} - (\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1) \int z^{\mu} J^{-\nu} dz.$$

Nach Einsetzung dieser Ausdrücke nimmt die obige Gleichung folgende Gestalt an:

$$S^{\mu+2,\nu} = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} z^{\mu+2} \left(J^{\nu} J^{-\nu+1} - J^{\nu+1} J^{-\nu} + \frac{2\nu}{z} J^{\nu} J^{-\nu} \right) - (\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1) S^{\mu,\nu},$$

oder, wenn man aus Gleichung (A)

$$J^{\nu+1} = \frac{2\nu}{z} J^{\nu} - J^{\nu-1}$$

substituirt

$$S^{\mu+2,\nu} = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} z^{\mu+2} \left(J^{\nu} J^{-\nu+1} + J^{-\nu} J^{\nu-1} \right) - (\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1) S^{\mu,\nu}.$$

Da nun*)

(J) $$J^{\nu} J^{-\nu+1} + J^{-\nu} J^{\nu-1} = \frac{2}{\pi z} \sin \nu\pi$$

ist, so hat man

(III) $$S^{\mu+2,\nu} = z^{\mu+1} - (\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1) S^{\mu,\nu}.$$

5. Indem wir ferner in (I) μ durch $\mu-1$ und ν durch $\nu+1$ ersetzen, erhalten wir

*) Math. Annalen Bd. IX, S. 105.

$$S^{\mu-1,\,\nu+1} = -\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left(J^{\nu+1}\int z^{\mu-1}J^{-\nu-1}dz - J^{-\nu-1}\int z^{\mu-1}J^{\nu+1}dz\right).$$

Nach (E) und (F) aber ist

$$\int z^{\mu-1}J^{\nu+1}dz = \frac{z^{\mu}}{\mu-\nu-1}J^{\nu+1} - \frac{1}{\mu-\nu-1}\int z^{\mu}J^{\nu}dz,$$

$$\int z^{\mu-1}J^{-\nu-1}dz = \frac{z^{\mu}}{\mu-\nu-1}J^{-\nu-1} + \frac{1}{\mu-\nu-1}\int z^{\mu}J^{-\nu}dz;$$

setzen wir diese Werthe oben ein, indem wir abkürzend

$$\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\int z^{\mu}J^{\nu}dz \text{ mit } P$$

und

$$\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\int z^{\mu}J^{-\nu}dz \text{ mit } Q$$

bezeichnen, so erhalten wir

$$(\alpha) \qquad (\mu-\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu+1} = -(QJ^{\nu+1} + PJ^{-\nu-1}).$$

Setzt man in dieser Gleichung $-\nu$ statt ν, und berücksichtigt, dass nach (I)

$$S^{\mu-1,\,-\nu+1} = S^{\mu-1,\,\nu-1}$$

ist, und dass gleichzeitig P in $-Q$ und Q in $-P$ übergeht, so gelangt man zu der Gleichung

$$(\beta) \qquad (\mu+\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu-1} = QJ^{\nu-1} + PJ^{-\nu+1}.$$

Wird von dieser die Gleichung (α) abgezogen, so erhält man unter Rücksichtnahme auf Gleichung (A):

$$(\mu+\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu-1} - (\mu-\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu+1} = \frac{2\nu}{z}(QJ^{\nu} - PJ^{-\nu})$$

oder, weil ja

$$S^{\mu,\,\nu} = QJ^{\nu} - PJ^{-\nu}$$

ist:

$$\text{(IV)} \quad \frac{2\nu}{z}S^{\mu,\,\nu} = (\mu+\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu-1} - (\mu-\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu+1}.$$

Addirt man dagegen die Gleichungen (α) und (β), so ergiebt sich im Hinblick auf die Gleichung (B):

$$(\mu+\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu-1} + (\mu-\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu+1} = 2\left(Q\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z} - P\frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z}\right),$$

oder, da

$$\frac{\partial S^{\mu,\,\nu}}{\partial z} = Q\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z} - P\frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z}$$

ist,

$$\text{(V.)} \quad 2\frac{\partial S^{\mu,\,\nu}}{\partial z} = (\mu+\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu-1} + (\mu-\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu+1}.$$

6. Aus der Gleichung (III) folgt

$$(\mu+\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu-1} = \frac{z^{\mu} - S^{\mu+1,\,\nu-1}}{\mu-\nu+1}$$

und

$$(\mu-\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu+1}=\frac{z^{\mu}-S^{\mu+1,\,\nu+1}}{\mu+\nu+1}.$$

Setzt man diese Werthe in (IV) und (V) ein, so erhält man noch:

$$\text{(VI)}\qquad \frac{2\nu}{z}S^{\mu,\,\nu}=\frac{z^{\mu}-S^{\mu+1,\,\nu-1}}{\mu-\nu+1}-\frac{z^{\mu}-S^{\mu+1,\,\nu+1}}{\mu+\nu+1},$$

$$\text{(VII)}\qquad 2\frac{\partial S^{\mu,\,\nu}}{\partial z}=\frac{z^{\mu}-S^{\mu+1,\,\nu-1}}{\mu-\nu+1}+\frac{z^{\mu}-S^{\mu+1,\,\nu+1}}{\mu+\nu+1}.$$

Indem man die Gleichungen (IV) und (V) zu einander addirt und dann ebenso mit den Gleichungen (VI) und (VII) verfährt, gelangt man ferner zu folgenden Formeln:

$$\text{(VIII)}\qquad \frac{\partial S^{\mu,\,\nu}}{\partial x}+\frac{\nu}{z}S^{\mu,\,\nu}=(\mu+\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu-1},$$

$$\text{(IX)}\qquad \frac{\partial S^{\mu,\,\nu}}{\partial z}+\frac{\nu}{z}S^{\mu,\,\nu}=\frac{z^{\mu}-S^{\mu+1,\,\nu-1}}{\mu-\nu+1}.$$

Die analogen Formeln, welche sich durch Subtraction derselben Gleichungspaare ergeben, unterlassen wir anzuschreiben, weil sie durch Umkehrung des Vorzeichens von ν und unter Berücksichtigung der Relation $S^{\mu,-\nu}=S^{\mu,\nu}$ unmittelbar aus den vorstehenden Gleichungen hervorgehen. Diese letztere Bemerkung gilt in gleicher Weise auch von den folgenden Gleichungen, welche sich den vorhergehenden aufs engste anschliessen.

Die Gleichungen (VIII) und (IX) können nämlich offenbar auch in folgender Weise dargestellt werden:

$$\text{(VIII}^{a}\text{)}\qquad \frac{\partial(z^{\nu}S^{\mu,\,\nu})}{\partial z}=(\mu+\nu-1)z^{\nu}S^{\mu-1,\,\nu-1},$$

$$\text{(IX}^{a}\text{)}\qquad \frac{\partial(z^{\nu}S^{\mu,\,\nu})}{\partial z}=\frac{z^{\mu+\nu}-z^{\nu}S^{\mu+1,\,\nu-1}}{\mu-\nu+1};$$

sie nehmen eine besonders übersichtliche Gestalt an, wenn man $\sqrt{z}$ an die Stelle von z setzt; denn nach Ausführung dieser Substitution lauten sie:

$$\text{(VIII}^{b}\text{)}\qquad \frac{\partial\left(z^{\frac{\nu}{2}}S^{\mu,\,\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z}=\tfrac{1}{2}(\mu+\nu-1)z^{\frac{\nu-1}{2}}S^{\mu-1,\,\nu-1}_{(\sqrt{z})},$$

$$\text{(IX}^{b}\text{)}\qquad \frac{\partial\left(z^{\frac{\nu}{2}}S^{\mu,\,\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z}=\frac{z^{\frac{\mu+\nu-1}{2}}-z^{\frac{\nu-1}{2}}S^{\mu+1,\,\nu-1}_{(\sqrt{z})}}{2(\mu-\nu+1)},$$

von denen sich z. B. die erstere folgendermassen aussprechen lässt:

Die Function $z^{\frac{\nu}{2}}S^{\mu,\,\nu}_{(\sqrt{z})}$ *wird nach* z *differentiirt, indem man sowohl* μ

als ν je um 1 vermindert, und noch den Factor $\frac{1}{2}(\mu+\nu-1)$ hinzufügt. In ähnlicher wenn auch etwas umständlicherer Weise lässt sich die Gleichung (IX^b) in Worte fassen.

Wiederholt man diese Operation $n$mal hintereinander, so findet man:

$$\text{(X)}\quad \frac{\partial^n\left(z^{\frac{\nu}{2}}S^{\mu,\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n(\mu+\nu-1)^{n|-2}\,z^{\frac{\nu-n}{2}}S^{\mu-n,\nu-n}_{(\sqrt{z})},$$

$$\text{(XI)}\quad \frac{\partial^n\left(z^{\frac{\nu}{2}}S^{\mu,\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^n}=\frac{(\mu+\nu-1)^{n-1|-2}}{2^n(\mu-\nu+1)}\,z^{\frac{\mu+\nu-2n+1}{2}}-\frac{z^{\frac{\nu-n}{2}}S^{\mu+n,\nu-n}_{(\sqrt{z})}}{2^n(\mu-\nu+1)^{n|2}}.$$

Das Gleichungspaar (VIII) und (IX) im Vereine mit der Relation (II), oder auch jedes der Paare (IV) und (V) und (VI) und (VII), zusammen mit (II) und (III) sind der Differentialgleichung (1) äquivalent; jede dieser Gruppen genügt, um die Function $S^{\mu,\nu}$ zu charakterisiren, und die übrigen hier aufgeführten Gleichungen abzuleiten.

7. Alle diese Gleichungen gelten auch noch, wenn ν eine ganze Zahl ist. Man könnte sich hiervon überzeugen, indem man von der Definition von $S^{\mu,n}$ (Gleichung (I^a)) ausgehend, die nämliche Reihe von Operationen wiederholt, und nur statt der Gleichung (J) die Gleichung*)

$$\text{(Y)}\qquad Y^n J^{n+1}-J^n Y^{n+1}=\frac{1}{z}$$

in Anwendung bringt. Diese Wiederholung ist aber unnöthig, weil $S^{\mu,n}$ in der That in $S^{\mu,\nu}$ bereits enthalten, und nur unter der Form $\frac{0}{0}$, welche $S^{\mu,\nu}$ für ein ganzes ν annimmt, verborgen ist. Um dies nachzuweisen, zeigen wir, dass $S^{\mu,n}$ die Grenze ist, welcher sich $S^{\mu,\nu}$ nähert, wenn ν in die ganze Zahl n übergeht, d. h. dass

$$S^{\mu,n}=\lim\frac{\pi}{2\sin(n+\varepsilon)\pi}\left(J^{n+\varepsilon}\int z^\mu J^{-n-\varepsilon}dz-J^{-n-\varepsilon}\int z^\mu J^{n+\varepsilon}dz\right)$$

ist, wo unter n eine beliebige positive ganze Zahl und unter ε eine zum Verschwinden bestimmte Grösse zu verstehen ist.

Vermittelst der Gleichung**)

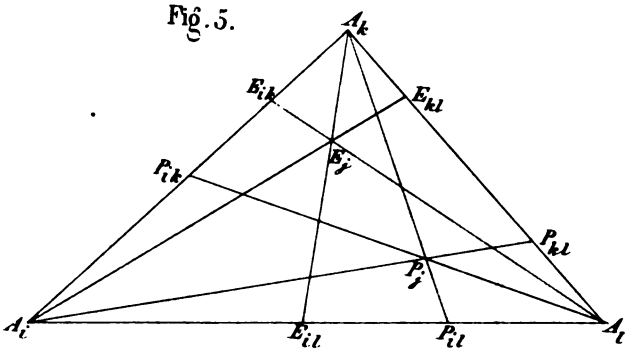
$$J^\nu=(-1)^n\sum_{p=0}^{p=n}(-2)^p\,\frac{n^{p|-1}(n+\nu)^{p|-1}}{p!}\cdot\frac{J^{2n+\nu-p}}{z^p}$$

drücken wir zuerst $J^{-n-\varepsilon}$ durch eine endliche Reihe aus, die nur noch Bessel'sche Functionen mit positiven Indices enthält. Es wird nämlich

*) Math. Annalen Bd. IV, S. 108.

**) Studien über die Bessel'schen Functionen, S. 9.

Fig. 5.



$$J^{-n-\varepsilon} = (-1)^n \sum (-2)^p \frac{n^{p|-1}(-\varepsilon)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{J^{n-\varepsilon-p}}{z^p}$$

$$= (-1)^n \sum 2^p \cdot \frac{n^{p|-1}\varepsilon^{p|1}}{p!} \cdot \frac{J^{n-\varepsilon-p}}{z^p}$$

$$= (-1)^n \left[J^{n-\varepsilon} + \varepsilon \sum 2^{p+1} \frac{n^{p+1|-1}(1+\varepsilon)^{p|1}}{(p+1)!} \cdot \frac{J^{n-\varepsilon-p-1}}{z^{p+1}} \right].$$

Bezeichnet man diese letzte Summe einstweilen mit Σ und berücksichtigt, dass

$$J^{n-\varepsilon} = J^n - \varepsilon \frac{\partial J^n}{\partial n} + k,$$

wo k nur Glieder enthält, die mit der zweiten und höheren Potenzen von ε behaftet sind, so erhält man

$$J^{-n-\varepsilon} = (-1)^n \left[J^n + \varepsilon \left(\sum - \frac{\partial J^n}{\partial n} \right) + k \right].$$

Führt man diesen Ausdruck nebst

$$J^{n+\varepsilon} = J^n + \varepsilon \frac{\partial J^n}{\partial n} + k'$$

oben ein, und lässt bei der Entwickelung jedes Glied bei Seite, welches mit einer höheren als der ersten Potenz von ε multiplicirt ist, so findet man

$$J^{n+\varepsilon} \int z^\mu J^{-n-\varepsilon} dz - J^{-n-\varepsilon} \int z^\mu J^{n+\varepsilon} dz$$

$$= (-1)^n \varepsilon \left\{ J^n \int z^\mu \left(\sum - 2 \frac{\partial J^n}{\partial n} \right) dz - \left(\sum - 2 \frac{\partial J^n}{\partial n} \right) \int z^\mu J^n dz \right\}.$$

Diesem Ausdruck muss nun noch der Factor

$$\frac{\pi}{2 \sin (n+\varepsilon)\pi},$$

d. i.

$$\frac{\pi}{2 \cos n\pi \sin \varepsilon\pi} = \frac{1}{2(-1)^n \varepsilon}$$

beigefügt und dann $\varepsilon = 0$ gesetzt werden, um $S^{\mu,n}$ zu erhalten. Es ist daher

$$S^{\mu,n} = J^n \int z^\mu \left(\tfrac{1}{2} \sum\nolimits_0 - \frac{\partial J^n}{\partial n} \right) dz - \left(\tfrac{1}{2} \sum\nolimits_0 - \frac{\partial J^n}{\partial n} \right) \int z^\mu J^n dz,$$

worin $\sum_0$ obige Summe bedeutet, nachdem in ihr $\varepsilon = 0$ gesetzt worden ist. In der bereits citirten Schrift über die Bessel'schen Functionen ist nun aber (S. 82) eine Function $L^n_{(s)}$ definirt worden durch die Gleichung

$$L^n_{(s)} = \log z \cdot J^n_{(s)} - \tfrac{1}{2} \sum 2^{p+1} \cdot \frac{n^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J^{n-p-1}_{(s)}}{z^{p+1}},$$

d. i.

$$L^n = \log z \cdot J^n - \tfrac{1}{2} \sum\nolimits_0 ,$$

so dass

$$\tfrac{1}{2} \sum\nolimits_0 = \log z \cdot J^n - L^n$$

gesetzt werden kann. Andrerseits wurde ebendaselbst (S. 77) eine Function $\mathfrak{J}^n_{(z)}$ eingeführt durch die Gleichung

$$\frac{\partial \left(z^{-n} J^n_{(z)} \right)}{\partial n} = z^{-n} \mathfrak{J}^n_{(z)} ,$$

aus welcher

$$\frac{\partial J^n}{\partial n} = \log z J^n + \mathfrak{J}^n$$

folgt. Hiernach ist

$$\tfrac{1}{2} \sum\nolimits_0 - \frac{\partial J^n}{\partial n} = - \mathfrak{J}^n - L^n .$$

Nach der Math. Annalen Bd. IV, S. 107 gegebenen Definition der Bessel'schen Function zweiter Art aber ist

$$Y^n = \mathfrak{J}^n + L^n .$$

Wir finden also

$$S^{\mu, n} = Y^n \int z^\mu J^n dz - J^n \int z^\mu Y^n dz ,$$

denselben Ausdruck, welcher oben (I^a) für $S^{\mu, n}$ bereits angenommen wurde.

8. Zur Entwickelung von $S^{\mu, \nu}$ nach Potenzen von z bedienen wir uns der Recursionsformel (III).

Ihre fortgesetzte Anwendung im Sinne der Erniedrigung des Index μ liefert eine Entwickelung nach fallenden Potenzen von z, nämlich

$$\text{(XII)} \quad S^{\mu, \nu} = z^{\mu-1} \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p (\mu - \nu - 1)^{p|-2} (\mu + \nu - 1)^{p|-2} z^{-2p} + (-1)^{m+1} (\mu - \nu - 1)^{m+1|-2} (\mu + \nu - 1)^{m+1|-2} S^{\mu-2m-2, \nu} .$$

Das Restglied verschwindet und die Reihe bricht ab, so oft entweder $\mu - \nu$ oder $\mu + \nu$ einer positiven ungeraden Zahl $2m+1$ gleich ist. In diesen beiden Fällen, welche wir hiermit besonders zum Ausdruck bringen:

$$\text{(XIII}^a\text{)} \quad S^{2m+1+\nu, \nu} = z^{2m+\nu} \sum (-1)^p m^{p|-1} (m+\nu)^{p|-1} \left(\frac{2}{z} \right)^{2p} ,$$

$$\text{(XIII}^b\text{)} \quad S^{2m+1-\nu, \nu} = z^{2m-\nu} \sum (-1)^p m^{p|-1} (m-\nu)^{p|-1} \left(\frac{2}{z} \right)^{2p} ,$$

erscheint also $S^{\mu, \nu}$, abgesehen von dem Factor z^ν oder $z^{-\nu}$, als eine rationale Function von z.

9. Um die Function $S^{\mu,\nu}$ nach steigenden Potenzen von z zu entwickeln, schreiben wir die Gleichung (III) in folgender Gestalt:

$$(\text{III}^a) \qquad S^{\mu,\nu} = \frac{z^{\mu+1} - S^{\mu+2,\nu}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)},$$

und erhalten durch ihre wiederholte Anwendung

$$(\text{XIV}) \quad S^{\mu,\nu} = \sum_{p=0}^{p=m-1} \frac{(-1)^p z^{\mu+2p+1}}{(\mu-\nu+1)^{p+1|2}(\mu+\nu+1)^{p+1|2}} + \frac{(-1)^m}{(\mu-\nu+1)^{m|2}(\mu+\nu+1)^{m|2}} \cdot S^{\mu+2m,\nu}.$$

Auch diese Entwickelung bricht ab, sobald μ entweder $= \nu + 1$ oder $= -\nu + 1$ ist. Alsdann hat man nämlich nach (III)

$$S^{\nu+1,\nu} = z^{\nu}, \qquad S^{-\nu+1,\nu} = z^{-\nu},$$

und es ergeben sich die folgenden beiden endlichen Reihen:

$$(\text{XIII}^\alpha) \quad S^{2m+1+\nu,\nu} = (-1)^m 2^{m|2}(2\nu+2)^{m|2} \sum_{p=0}^{p=m} \frac{(-1)^p z^{\nu+2p}}{2^{p|2}(2\nu+2)^{p|2}},$$

$$(\text{XIII}^\beta) \quad S^{2m+1-\nu,\nu} = (-1)^m 2^{m|2}(2-2\nu)^{m|2} \sum_{p=0}^{p=m} \frac{(-1)^p z^{-\nu+2p}}{2^{p|2}(2-2\nu)^{p|2}},$$

welche sich von denen unter (XIII^a) und (XIII^b) nur durch die umgekehrte Anordnung der Glieder unterscheiden.

10. Setzt man die Entwickelung (XIV) ins Unendliche fort, so gelangt man zu der unendlichen Reihe:

$$S^{\mu,\nu} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{\mu+2p+1}}{(\mu-\nu+1)^{p+1|2}(\mu+\nu+1)^{p+1|2}},$$

welche, wenn weder $\mu-\nu$ noch $\mu+\nu$ negativ ungerade ist, für jeden Werth von z convergirt. Diese Reihe genügt sowohl der Differentialgleichung (1) (für $a=1$ und $k=1$) als auch den Relationen (II) bis (XI) und könnte daher als Ausdruck der Function $S^{\mu,\nu}$ angenommen werden, wenn nicht in den beiden vorhergehenden Paragraphen über die specielle Form, welche wir der Function $S^{\mu,\nu}$ geben wollen, bereits stillschweigend Entscheidung getroffen wäre.

Ist nämlich $s^{\mu,\nu}$ irgend ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = z^{\mu-1},$$

welches zugleich den Gleichungen (II) bis (XI) genügt, so wird auch

$$s^{\mu,\nu} + AJ^{\nu} + BJ^{-\nu}$$

diesen sämmtlichen Bedingungen Genüge leisten, sobald man A und B als Functionen von μ und ν den Gleichungen (II) bis (XI) gemäss auswählt. Diese Bedingungen, welche sich übrigens auf *drei* reduci-

ren, reichen aber zur vollständigen Bestimmung der Functionen A und B nicht hin; es giebt daher unzählig viele besondere Ausdrücke, welche den durch die genannten Gleichungen der Function $S^{\mu,\nu}$ auferlegten Forderungen entsprechen, von denen jeder zur Darstellung von $S^{\mu,\nu}$ gebraucht werden könnte. Durch die Form aber, welche wir in den Paragraphen 8. und 9. für die Function $S^{\mu,\nu}$ in den daselbst behandelten speciellen Fällen angenommen haben, kommt zu den obigen Bedingungen noch eine neue hinzu, nämlich die, dass

$$S^{\nu+1,\nu} = z^{\nu}$$

sei; dadurch werden die Functionen A und B völlig bestimmt, und wir erhalten für $S^{\mu,\nu}$ folgenden Ausdruck:

$$\text{(XV)}\quad S^{\mu,\nu} = \sum \frac{(-1)^p z^{\mu+2p+1}}{(\mu-\nu+1)^{p+1|2}(\mu+\nu+1)^{p+1|2}} + \frac{2^{\mu-1}}{\sin \nu\pi}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\left[\sin\frac{\mu+\nu-1}{2}\pi\cdot J^{\nu} - \sin\frac{\mu-\nu-1}{2}\pi\cdot J^{-\nu}\right],$$

welcher, obgleich im Allgemeinen als unendliche Reihe sich darstellend, die in den Formeln (XIII) gegebenen endlichen Entwickelungen als specielle Fälle in sich schliesst.

Der Ausdruck (XV) ist nicht unmittelbar zu gebrauchen, sobald ν einer ganzen Zahl n gleich wird, weil alsdann sein zweites Glied die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Bestimmt man diesen $\frac{0}{0}$-Werth, indem man in ähnlicher Weise verfährt wie in § 7., so erhält man:

$$\text{(XV}^{a}\text{)}\quad S^{\mu,n} = \sum \frac{(-1)^p z^{\mu+2p+1}}{(\mu-n+1)^{p+1|2}(\mu+n+1)^{p+1|2}} + 2^{\mu-1}\cdot\Gamma\left(\frac{\mu-n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu+n+1}{2}\right)\left[\cos\frac{\mu-n-1}{2}\pi\cdot J^{n} + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\mu-n-1}{2}\pi\cdot I^{n}\right].$$

11. Die Formel (XV) wird unbrauchbar, sobald $\mu - \nu$, oder $\mu + \nu$, oder beide zugleich negativ ungerade sind.

Wenn nur $\mu - \nu$ negativ ungerade und zwar $= -2m - 1$ ist, so kann man zunächst die Formel (XIV) benutzen, um $S^{\mu,\nu}$ auf $S^{\nu-1,\nu}$ zu reduciren; dieselbe liefert nämlich, wenn man $\mu = \nu - 2m - 1$ setzt:

$$\text{(XVI)}\quad S^{\nu-2m-1,\nu} = -\sum_{p=0}^{p=m-1} \frac{z^{\nu-2m+2p}}{2^{2p+2}m^{p+1|-1}(\nu-m)^{p+1|1}} + \frac{1}{2^{2m}m^{m|-1}(\nu-m)^{m|1}}\cdot S^{\nu-1,\nu}.$$

Für $\mu = \nu - 1$ aber nimmt $S^{\mu,\nu}$, wie ein Blick auf die Gleichung (III^{a}) zeigt, die Form $\frac{0}{0}$ an, deren Bedeutung man findet, wenn man zur Rechten der Gleichung (III^{a}) Zähler und Nenner nach μ differentiirt und nachher $\mu = \nu - 1$ substituirt; d. h. es ist

$$S^{\nu-1,\nu} = \left[\frac{z^{\mu+1}\log z - \frac{\partial S^{\mu+2,\nu}}{\partial \mu}}{2\mu+2}\right]_{\mu=\nu-1}.$$

Aus (XV) aber findet man

$$\frac{\partial S^{\mu+2,\nu}}{\partial \mu} = \frac{\partial s^{\mu+2,\nu}}{\partial \mu} + J^{\nu}\frac{\partial A}{\partial \mu} + J^{-\nu}\frac{\partial B}{\partial \mu},$$

wo

$$s^{\mu+2,\nu} = \sum \frac{(-1)^p z^{\mu+2p+3}}{(\mu-\nu+3)^{p+1|2}(\mu+\nu+3)^{p+1|2}},$$

$$A = -\frac{2^{\mu+1}}{\sin \nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}+1\right)\cdot\sin\frac{\mu+\nu-1}{2}\pi,$$

$$B = \frac{2^{\mu+1}}{\sin \nu\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}+1\right)\cdot\sin\frac{\mu-\nu-1}{2}\pi$$

ist. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial s^{\mu+2,\nu}}{\partial \mu} = \sum \frac{(-1)^p z^{\mu+2p+3}}{(\mu-\nu+3)^{p+1|2}(\mu+\nu+3)^{p+1|2}}\left\{\log z - \frac{\partial \log(\mu-\nu+3)^{p+1|2}}{\partial \mu} - \frac{\partial \log(\mu+\nu+3)^{p+1|2}}{\partial \mu}\right\},$$

oder, wenn man die Gauss'sche Bezeichnung

$$\frac{\partial \log \Gamma(1+z)}{\partial z} = \psi(z)$$

einführt:

$$\frac{\partial s^{\mu+2,\nu}}{\partial \mu} = \tfrac{1}{2}\sum \frac{(-1)^p z^{\mu+2p+3}}{(\mu-\nu+3)^{p+1|2}(\mu+\nu+3)^{p+1|2}}\left\{2\log z - \psi\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}+p+1\right) + \psi\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}+p+1\right) + \psi\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\right\}.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\frac{\partial A}{\partial \mu} = -\frac{2^{\mu+1}}{\sin \nu\pi}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}+1\right)\left[\left(\log 2 + \tfrac{1}{2}\psi\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\psi\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\right)\cdot\sin\frac{\mu+\nu-1}{2}\pi + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\mu+\nu-1}{2}\pi\right],$$

und

$$\frac{\partial B}{\partial \mu} = \frac{2^{\mu+1}}{\sin \nu\pi}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}+1\right)\left[\left(\log 2 + \tfrac{1}{2}\psi\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\psi\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\right)\cdot\sin\frac{\mu-\nu-1}{2}\pi + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\mu-\nu-1}{2}\pi\right].$$

Für $\mu = \nu - 1$ gestalten sich diese Ausdrücke folgendermassen:

$$\left[\frac{\partial s^{\mu+2,\nu}}{\partial \mu}\right]_{\mu=\nu-1} = \tfrac{1}{2}\sum \frac{(-1)^p z^{\nu+2p+2}}{2^{p+1|2}(2\nu+2)^{p+1|2}}\left\{2\log z - \psi(\nu+p+1) + \psi(\nu) - \psi(p+1) + \psi(0)\right\};$$

$$\left[\frac{\partial A}{\partial \mu}\right]_{\mu=\nu-1} = \left(\log 2 + \tfrac{1}{2}\psi(\nu) + \tfrac{1}{2}\psi(0) + \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\nu\pi\right)2^{\nu}\Gamma(\nu+1);$$

$$\left[\frac{\partial B}{\partial \mu}\right]_{\mu=\nu-1} = -\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\cdot 2^{\nu}\Gamma(\nu+1).$$

Nach Einsetzung dieser Werthe ergiebt sich $S^{\nu-1,\nu}$ in folgender Gestalt:

$$S^{\nu-1,\nu} = \frac{z^{\nu}}{2\nu}\log z - \frac{1}{4\nu}\sum \frac{(-1)^p z^{\nu+2p+2}}{2^{p+1|2}(2\nu+2)^{p+1|2}}\{2\log z - \psi(\nu+p+1)+\psi(\nu) - \psi(p+1)+\psi(0)\}$$
$$-\left(\log 2 + \tfrac{1}{2}\psi(\nu) + \tfrac{1}{2}\psi(0) + \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\nu\pi\right)\frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{2\nu}\cdot J^{\nu}$$
$$+\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\cdot\frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{2\nu}J^{-\nu},$$

oder auch, mit Rücksicht darauf, dass

$$\sum \frac{(-1)^p z^{\nu+2p+1}}{2^{p|2}(2\nu+2)^{p.2}} = z^{\nu} - \sum \frac{(-1)^p z^{\nu+2p+2}}{2^{p+1|2}(2\nu+2)^{p+1|2}} = 2^{\nu}\Gamma(\nu+1)J^{\nu}$$

ist:

(XVII) $$S^{\nu-1,\nu} = \frac{1}{4\nu}\sum \frac{(-1)^p z^{\nu+2p+2}}{2^{p+1|2}(2\nu+2)^{p+1|2}}\{\psi(\nu+p+1) - \psi(\nu) + \psi(p+1) - \psi(0$$
$$+\left(\log\frac{z}{2} - \tfrac{1}{2}\psi(\nu) - \tfrac{1}{2}\psi(0) - \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\nu\pi\right)\frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{2\nu}\cdot J^{\nu}$$
$$+\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\cdot\frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{2\nu}\cdot J^{-\nu},$$

worin

$$\psi(\nu+p+1) - \psi(\nu) = \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \frac{1}{\nu+3} + \cdots + \frac{1}{\nu+p+1} = \sum_{q=0}^{q=p}\frac{1}{\nu+q+1}$$

und

$$\psi(p+1) - \psi(0) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p+1} = \sum_{q=0}^{q=p}\frac{1}{q+1}$$

zu nehmen ist.

Vermöge der Gleichungen (XVI) und (XVII) ist also $S^{\mu,\nu}$, falls $\mu-\nu$, nicht aber gleichzeitig $\mu+\nu$, negativ ungerade ist, durch eine für jedes z convergirende Reihe ausgedrückt. Für den andern Fall, dass $\mu+\nu$, nicht aber zugleich $\mu-\nu$ negativ ungerade ist, gelten die nämlichen Gleichungen (XVI) und (XVII), nachdem in ihnen ν durch $-\nu$ ersetzt ist.

Die Formel (XVII) wird jedoch unbrauchbar, sobald ν positiv oder negativ ganz ist. Dieser Fall aber ist durch die Voraussetzungen, welche ihr zu Grunde liegen, von vorneherein ausgeschlossen. Würde nämlich, während die eine der beiden Summen $\mu+\nu$ und $\mu-\nu$ negativ ungerade ist, ν als ganze Zahl angenommen, so müsste die andere Summe entweder positiv ungerade sein, ein Fall, welcher durch die Formeln (XIII) bereits erledigt ist; oder sie wäre ebenfalls negativ

ungerade, welcher Fall noch einer besonderen Erörterung vorbehalten wurde, die im folgenden Paragraphen durchgeführt werden soll.

12. Wenn $\mu - \nu$ und $\mu + \nu$ gleichzeitig negativ ungerade sind, so kann $S^{\mu,\nu}$ stets auf die Form $S^{-n-2m-1,n}$ gebracht werden, wo unter m sowohl als n eine beliebige positive ganze Zahl oder Null zu verstehen ist.

Durch die Gleichung (XVI), welche im gegenwärtigen Falle folgendermassen lautet:

$$\text{(XVIII)} \quad S^{-n-2m-1,n} = \sum_{p=0}^{p=m-1} \frac{(-1)^p z^{-n-2m+2p}}{(2m)^{p+1|-2}(2m+2n)^{p+1|-2}} + \frac{(-1)^m}{(2m)^{m|-2}(2m+2n)^{m|-2}} S^{-n-1,n},$$

wird zunächst $S^{-n-2m-1,n}$ auf $S^{-n-1,n}$ reducirt, während $S^{-n-1,n}$ leicht auf $S^{-1,0}$ zurückgeführt werden kann. Setzen wir nämlich in Gleichung (X) $\nu = 0$ und $\mu = -1$, so erhalten wir

$$\frac{\partial^n S^{-1,0}_{(\sqrt{z})}}{\partial z^n} = (-1)^n \cdot n!\, z^{-\frac{n}{2}} S^{-n-1,n}_{(\sqrt{z})}$$

oder

$$\text{(XIX)} \quad S^{-n-1,n}_{(\sqrt{z})} = \frac{(-1)^n z^{\frac{n}{2}}}{n!} \cdot \frac{\partial^n S^{-1,0}_{(\sqrt{z})}}{\partial z^n},$$

so dass es sich jetzt nur noch darum handelt, $S^{-1,0}$ in eine convergente Reihe zu entwickeln.

Nach (III^a) erhalten wir

$$S^{\mu,0} = \frac{z^{\mu+1} - S^{\mu+2,0}}{(\mu+1)^2};$$

für $\mu = -1$ nimmt nicht nur dieser Ausdruck, sondern auch

$$\frac{z^{\mu+1}\log z - \frac{\partial S^{\mu+2,0}}{\partial \mu}}{2\mu+2}$$

die Form $\frac{0}{0}$ an; durch nochmalige Differentiation des Zählers und Nenners aber erhalten wir

$$S^{-1,0} = \tfrac{1}{2}\left[z^{\mu+1}(\log z)^2 - \frac{\partial^2 S^{\mu+2,0}}{\partial \mu^2}\right]_{\mu=-1}.$$

Nach (XV^a) aber ist

$$S^{\mu+2,0} = \sum \frac{(-1)^p z^{\mu+2p+3}}{((\mu+3)^{p+1|2})^2} + 2^{\mu+1}\left(\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}+1\right)\right)^2\left(\cos\frac{\mu+1}{2}\pi \cdot J^0 + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\mu+1}{2}\pi \cdot Y^0\right)$$
$$= s^{\mu+2,0} + AJ^0 + BY^0.$$

Hiernach ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 s^{\mu+2,0}}{\partial \mu^2} = \sum \frac{(-1)^p z^{\mu+2p+3}}{((\mu+3)^{p+1|2})^2} \left\{ \left(\log z - \psi\left(\frac{\mu+1}{2}+p+1\right) + \psi\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\right)^2 - \tfrac{1}{2}\psi'\left(\frac{\mu+1}{2}+p+1\right) + \tfrac{1}{2}\psi'\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\right\},$$

wo $\psi'(z)$ statt $\frac{\partial \psi(z)}{\partial z}$ gesetzt wurde. Für $\mu = -1$ hat man daher:

$$\left[\frac{\partial^2 s^{\mu+2,0}}{\partial \mu^2}\right]_{\mu=-1} = \sum \frac{(-1)^p z^{2p+2}}{(2^{p+1|2})^2} \left\{ (\log z - \psi(p+1) + \psi(0))^2 - \tfrac{1}{2}\psi'(p+1) + \tfrac{1}{2}\psi'(0)\right\}.$$

Ferner ergiebt sich

$$\left[\frac{\partial^2 A}{\partial \mu^2}\right]_{\mu=-1} = \left(\log 2 + \psi(0)\right)^2 + \tfrac{1}{2}\psi'(0) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2,$$

oder, da

$$\tfrac{1}{2}\psi'(0) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{12},$$

ist:

$$\left[\frac{\partial^2 A}{\partial \mu^2}\right]_{\mu=-1} = \left(\log 2 + \psi(0)\right)^2 - \frac{\pi^2}{6};$$

und endlich:

$$\left[\frac{\partial^2 B}{\partial \mu^2}\right]_{\mu=-1} = 2\left(\log 2 + \psi(0)\right).$$

Wir erhalten demnach für $S^{-1,0}$ die folgende Entwickelung:

$$\text{(XX)} \quad S^{-1,0} = \tfrac{1}{2}(\log z)^2 - \tfrac{1}{2}\sum \frac{(-1)^p z^{2p+2^0}}{(2^{p+1|2})^2}\left\{(\log z - \sigma)^2 + \sigma'\right\} + \left(\frac{\pi^2}{12} - \tfrac{1}{2}\left(\log 2 + \psi(0)\right)^2\right) J^0 - \left(\log 2 + \psi(0)\right) Y^0,$$

worin

$$\sigma = \psi(p+1) - \psi(0) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p+1} = \sum_{q=0}^{q=p} \frac{1}{q+1}$$

und

$$\sigma' = \tfrac{1}{2}\left(\psi'(0) - \psi'(p+1)\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(p+1)^2}\right) = \tfrac{1}{2}\sum_{q=0}^{q=p} \frac{1}{(q+1)^2}$$

zu nehmen ist.

13. Mit unendlich wachsendem z nähert sich $S^{\mu,\nu}$ dem asymptotischen Werthe $z^{\mu-1}$. Man überzeugt sich hiervon, indem man $y = z^{\mu-1}$ in die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = z^{\mu-1}$$

substituirt. Sie verwandelt sich dadurch in

$$\frac{(\mu-1)^2-\nu^2}{z^2}=0,$$

und wird erfüllt 1) für jedes z, wenn $\mu-1=\nu$ ist, was bereits bekannt ist; 2) für jedes μ und ν, wenn z unendlich gross ist.

Das nämliche Resultat ergiebt sich auch aus der in § 8. gegebenen Entwickelung von $S^{\mu,\nu}$ nach fallenden Potenzen von z, nämlich

$$\text{(XII)}\quad S^{\mu,\nu}=z^{\mu-1}\sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p(\mu-\nu-1)^{p|-2}(\mu+\nu-1)^{p|-2}z^{-2p}$$
$$+(-1)^{m+1}(\mu-\nu-1)^{m+1|-2}(\mu+\nu-1)^{m+1|-2}S^{\mu-2m-2,\nu},$$

wenn wir uns dieselbe ins Unendliche fortgesetzt denken. Diese Reihe ist nun zwar divergent; man bemerkt jedoch leicht, dass (wenigstens für reelle Werthe von z, μ und ν) die Vorzeichen ihrer Glieder von einem bestimmten Gliede ab rein alternirend sind, und dass der Rest (für einen hinlänglich grossen Werth von z) stets von entgegengesetztem Zeichen ist als das letzte Glied. Nach einer Bemerkung von Hankel*) sind aber diese Kennzeichen hinreichend, um darzuthun, dass die Reihe *„halbconvergent"* ist. Dieselbe kann daher, für grössere Werthe von z, zur numerischen Berechnung von $S^{\mu,\nu}$ gebraucht werden.

14. Mit Hülfe der Function $S^{\mu,\nu}$ ist nicht nur die Differentialgleichung (1) in *allen* Fällen erschöpfend integrirt, sondern es können nun auch sämmtliche Integrale von der Form $\int z^\mu J^\nu dz$ und $\int z^\mu Y^n dz$ berechnet werden. Setzen wir nämlich, wie oben in § 5. bereits geschehen ist,

$$\int z^\mu J^\nu dz = \frac{2\sin\nu\pi}{\pi}\cdot P$$

und

$$\int z^\mu J^{-\nu} dz = \frac{2\sin\nu\pi}{\pi}\cdot Q,$$

so ist

$$QJ^\nu - PJ^{-\nu} = S^{\mu,\nu}$$

und

$$Q\frac{\partial J^\nu}{\partial z} - P\frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z} = \frac{\partial S^{\mu,\nu}}{\partial z}.$$

Daraus ergiebt sich durch Auflösung nach P

$$P\left(J^{-\nu}\frac{\partial J^\nu}{\partial z} - J^\nu\frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z}\right) = J^\nu\frac{\partial S^{\mu,\nu}}{\partial z} - S^{\mu,\nu}\cdot\frac{\partial J^\nu}{\partial z},$$

oder, da

*) Math. Annalen Bd. I, S. 498.

$$J^{-\nu}\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z} - J^{\nu}\frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z} = \frac{2}{\pi z}\sin\nu\pi$$

ist:

$$\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}\cdot P = zJ^{\nu}\frac{\partial S^{\mu,\nu}}{\partial z} - zS^{\mu,\nu}\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z}.$$

Da nun ferner

$$\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z} = -\frac{\nu}{z}J^{\nu} + J^{\nu-1}$$

und nach (VIII)

$$\frac{\partial S^{\mu,\nu}}{\partial z} = -\frac{\nu}{z}S^{\mu,\nu} + (\mu+\nu-1)S^{\mu-1,\nu-1},$$

so ergiebt sich schliesslich

$$\text{(XXI)}\qquad \int z^{\mu}J^{\nu}dz = (\mu+\nu-1)zJ^{\nu}S^{\mu-1,\nu-1} - zJ^{\nu-1}S^{\mu,\nu}.$$

Ebenso findet man

$$\text{(XXI}^{a}\text{)}\qquad \int z^{\mu}Y^{n}dz = (\mu+n-1)zY^{n}S^{\mu-1,n-1} - zY^{n-1}S^{\mu,n}.$$

15. Kehren wir nun zu der am Anfange erwähnten Neumann'schen Function O zurück, so lehrt die Vergleichung der zugehörigen Differentialgleichungen mit der Gleichung (1), dass

(a) $$O^{2m}_{(z)} = \frac{1}{z}\cdot S^{1,2m}_{(z)}$$

und

(b) $$O^{2m+1}_{(z)} = \frac{2m+1}{z}S^{0,2m+1}_{(z)}$$

ist. Der Zusammenhang der Function O mit den Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art findet demnach seinen Ausdruck in den Gleichungen:

(c) $$O^{2m} = \frac{1}{z}\left(Y^{2m}\int zJ^{2m}dz - J^{2m}\int zY^{2m}dz\right),$$

(d) $$O^{2m+1} = \frac{2m+1}{z}\left(Y^{2m+1}\int J^{2m+1}dz - J^{2m+1}\int Y^{2m+1}dz\right).$$

Die rationalen ganzen Functionen von $\frac{1}{z}$, durch welche Neumann die Function definirt hat, sind in unserer Formel (XIII^{b}) als specielle Fälle enthalten. Für $\nu = 2m$ geht nämlich (mit Rücksicht auf (a) und (b))

(e) $$O^{2m} = \frac{1}{z}\sum m^{p|-1}m^{p|1}\left(\frac{2}{z}\right)^{2\mu}$$

daraus hervor, und für $\nu = 2m+1$:

(f) $$O^{2m+1} = \frac{2m+1}{z^2} \sum m^{p|-1}(m+1)^{p|1}\left(\frac{2}{z}\right)^{2p}.$$

Die recurrenten Eigenschaften, welche wir für die Function $S^{\mu,\nu}$ nachgewiesen haben, specialisiren sich für die Function O in folgender Weise. Aus den Gleichungen (IV) und (V) folgt zunächst für $\mu = 1$ und $\nu = 2m$

$$\frac{2}{z} S^{1,2m} = S^{0,2m-1} + S^{0,2m+1}$$

und

$$2\frac{\partial S^{1,2m}}{\partial z} = 2m(S^{0,2m-1} - S^{0,2m+1}),$$

woraus sodann im Hinblick auf (a) und (b)

(g) $$2O^{2m} = \frac{zO^{2m-1}}{2m-1} + \frac{zO^{2m+1}}{2m+1}$$

und

$$2\frac{\partial(zO^{2m})}{\partial z} = 2m\left(\frac{zO^{2m-1}}{2m-1} - \frac{zO^{2m+1}}{2m+1}\right)$$

hervorgeht. Zieht man von der letzteren Gleichung, nämlich von

$$2O^{2m} + 2z\frac{\partial O^{2m}}{\partial z} = 2m\left(\frac{zO^{2m-1}}{2m-1} - \frac{zO^{2m+1}}{2m+1}\right),$$

die erstere ab, so bleibt

(h) $$2\frac{\partial O^{2m}}{\partial z} = O^{2m-1} - O^{2m+1}.$$

In analoger Weise erhält man aus den Gleichungen (VI) und (VII) für $\mu = 0$ und $\nu = 2m+1$

$$\frac{2(2m+1)}{z} S^{0,2m+1} = \frac{S^{1,2m}-1}{2m} + \frac{S^{1,2m+2}-1}{2m+2}$$

und

$$2\frac{\partial S^{0,2m+1}}{\partial z} = \frac{S^{1,2m}-1}{2m} - \frac{S^{1,2m+2}-1}{2m+2};$$

daraus folgt:

(i) $$2O^{2m+1} = \frac{zO^{2m}-1}{2m} + \frac{zO^{2m+2}-1}{2m+2}$$

und

$$2\frac{\partial(zO^{2m+1})}{\partial z} = (2m+1)\left(\frac{zO^{2m}-1}{2m} - \frac{zO^{2m+2}-1}{2m+2}\right).$$

Wird von letzterer Gleichung die vorhergehende subtrahirt, so ergiebt sich:

(k) $$2\frac{\partial O^{2m+1}}{\partial z} = O^{2m} - O^{2m+2}.$$

Die Gleichungspaare (g), (h) und (i), (k) kann man je in eine Gleichung zusammenfassen, indem man schreibt:

$$(l) \qquad 2O^n = \frac{zO^{n-1} - \sin^2 \frac{n\pi}{2}}{n-1} + \frac{zO^{n+1} - \sin^2 \frac{n\pi}{2}}{n+1},$$

$$(m) \qquad 2\frac{\partial O^n}{\partial z} = O^{n-1} - O^{n+1}.$$

Von diesen beiden Relationen wurde die erstere zuerst von Schläfli*) angegeben, die letztere findet sich bereits in der Eingangs erwähnten Neumann'schen Schrift.

Erlangen, im August 1875.

*) Math. Annalen Bd. III, S. 137.

Zur Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

Von Alfred Pringsheim in Berlin.

Die Theorie der Transformation zweiten Grades für die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung ist von meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Königsberger im 67ten Bande des Crelle'schen Journals für Mathematik in ihren Grundzügen entwickelt worden. Ich fasse im Folgenden wesentlich diejenige Classe von Transformationsgleichungen in's Auge, welche die transformirte Thetafunction als Summe von vier mit Constanten multiplicirten Thetaquadraten des ursprünglichen Systems darstellen, werde aus dieser besonderen Form der Transformationsgleichungen einen Beweis eines für alle Transformationen paaren Grades gültigen Fundamentalsatzes, sowie die Entwicklung der zwischen gewissen Combinationen von vier Thetaquadraten stattfindenden homogenen Linear-Relationen herleiten, und werde schliesslich den speciellen Fall der Transformation zweiten Grades eingehender betrachten, für welchen die transformirten hyperelliptischen Thetafunctionen in Producte von je zwei elliptischen Theta's zerfallen, und welcher demnach die von Jacobi (in Crelle's Journal, Bd. 8.) auf rein algebraischem Wege hergestellte Reduction gewisser hyperelliptischer Integrale auf elliptische liefert. Zum besseren Verständnisse des Folgenden fasse ich zunächst die von Herrn Königsberger a. a. O. gegebenen Bezeichnungen und Hauptresultate nochmals kurz zusammen.

Es seien die beiden hyperelliptischen Systeme vorgelegt

$$(1)\quad \begin{cases} \int_{\lambda^2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_{1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u_1 = 2K_{11}v_1 + 2K_{12}v_2, \\ \int_{\lambda^2}^{x_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_{1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u_2 = 2K_{21}v_1 + 2K_{22}v_2, \text{ wo:} \\ \qquad\qquad R(x) = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x) \end{cases}$$

und

$$(2)\quad \begin{cases} \int_{l^2}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{R'(y)}} + \int_{1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{R'(y)}} = u_1' = 2C_{11}v_1' + 2C_{12}v_2', \\ \int_{l^2}^{y_1} \frac{y\,dy}{\sqrt{R'(y)}} + \int_{1}^{y_2} \frac{y\,dy}{\sqrt{R'(y)}} = u_2' = 2C_{21}v_1' + 2C_{22}v_2', \text{ wo:} \end{cases}$$

$$R'(y) = y(1-y)(1-k^2y)(1-l^2y)(1-m^2y),$$

so sagt man: das System (1) werde durch eine rationale Transformation zweiten Grades in das System (2) transformirt, wenn sich in der Gleichung

$$(3)\quad \begin{cases} u_1 = \alpha u_1' + \beta u_2' \\ u_2 = \gamma u_1' + \delta u_2' \end{cases}$$

die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, sowie die Moduln k, l, m dergestalt durch $\varkappa$, λ, μ bestimmen lassen, dass sich die Abel'schen Functionen des transformirten Systems, also des Systems (2), als rationale Functionen zweiten Grades durch die Abel'schen Functionen des Systems (1) darstellen, dass also Relationen von der folgenden Form stattfinden:

$$\varphi'_\alpha(y_1, y_2) = \frac{\Sigma A_{\varkappa\lambda}\varphi_\varkappa(x_1x_2)\varphi_\lambda(x_1x_2)}{\Sigma B_{\mu\nu}\varphi_\mu(x_1x_2)\varphi_\nu(x_1x_2)}$$

(wenn wir mit $\varphi_\varkappa(x_1x_2)$, $\varphi'_\alpha(y_1, y_2)$ etc. die bekannten symmetrischen Functionen der oberen Grenzen bezeichnen),

oder

$$al_\alpha(u_1', u_2') = \frac{\Sigma C_{\varkappa\lambda}al_\mu(u_1u_2)al_\lambda(u_1u_2)}{\Sigma D_{\mu\nu}al_\mu(u_1u_2)al_\nu(u_1u_2)}$$

oder endlich:

$$\vartheta_\alpha(v_1', v_2') = \frac{\Sigma E_{\varkappa\lambda}\vartheta_\varkappa(v_1v_2)\vartheta_\lambda(v_1v_2)}{\Sigma F_{\mu\nu}\vartheta_\mu(v_1v_2)\vartheta_\mu(v_1v_2)}.$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Transformation zweiten Grades ist nun die, dass die Argumente und Moduln der transformirten Thetafunctionen sich in folgender Form durch die Argumente und Moduln der ursprünglichen darstellen lassen:

$$(4)\quad \begin{cases} v_1' = \frac{2(\omega_{22}v_1 - \omega_{12}v_2)}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, & v'_2 = \frac{2(\omega_{11}v_2 - \omega_{21}v_1)}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, \\ \tau_{11}' = \frac{\omega_{11}'\omega_{22} - \omega_{21}'\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{21}\omega_{21}}, & \tau'_{21} = \frac{\omega_{12}'\omega_{22} - \omega_{22}'\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, \\ \tau_{12}' = \frac{\omega_{21}'\omega_{11} - \omega_{11}'\omega_{21}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, & \tau'_{22} = \frac{\omega_{22}'\omega_{11} - \omega_{12}'\omega_{21}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, \end{cases}$$

wo die Grössen ω, ω' durch folgende Gleichungen definirt sind:

$$(5)\quad \begin{cases} \omega_{11} = \varrho_{11} + \sigma_{11}\tau_{11} + \sigma_{21}\tau_{12}, & \omega_{21} = \varrho_{21} + \sigma_{11}\tau_{21} + \sigma_{21}\tau_{22}, \\ \omega_{12} = \varrho_{12} + \sigma_{12}\tau_{11} + \sigma_{22}\tau_{12}, & \omega_{22} = \varrho_{22} + \sigma_{12}\tau_{21} + \sigma_{22}\tau_{22}, \\ \omega_{11}' = \varrho_{11}' + \sigma_{11}'\tau_{11} + \sigma_{21}'\tau_{12}, & \omega_{21}' = \varrho_{21}' + \sigma_{11}'\tau_{21} + \sigma_{21}'\tau_{22}, \\ \omega_{12}' = \varrho_{12}' + \sigma_{12}'\tau_{11} + \sigma_{22}'\tau_{22}, & \omega_{22}' = \varrho_{22}' + \sigma_{12}'\tau_{21} + \sigma_{22}'\tau_{22}, \end{cases}$$

während die ϱ, σ, ϱ', σ' ganze Zahlen bedeuten, welche lediglich den folgenden sechs Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} \sum_{1,2}\sum_{\alpha}(\varrho_{1\alpha}\varrho'_{2\alpha} - \varrho_{2\alpha}\varrho'_{1\alpha}) = 0\,, & \sum_{1,2}\sum_{\alpha}(\varrho_{2\alpha}\sigma'_{1\alpha} - \sigma_{1\alpha}\varrho'_{2\alpha}) = 0\,, \\ \sum_{1,2}\sum_{\alpha}(\sigma_{1\alpha}\sigma'_{2\alpha} - \sigma_{2\alpha}\sigma'_{1\alpha}) = 0\,, & \sum_{1,2}\sum_{\alpha}(\varrho_{1\alpha}\sigma'_{1\alpha} - \sigma_{1\alpha}\varrho'_{1\alpha}) = 2\,, \\ \sum_{1,2}\sum_{\alpha}(\varrho_{1\alpha}\sigma'_{2\alpha} - \sigma_{2\alpha}\varrho'_{1\alpha}) = 0\,, & \sum_{1,2}\sum_{\alpha}(\varrho_{2\alpha}\sigma'_{2\alpha} - \sigma_{2\alpha}\varrho'_{2\alpha}) = 2\,, \end{cases}$$

oder auch den diesen letzteren äquivalenten:

$$(7)\quad \begin{cases} \sum_{1,2}\sum_{\alpha}(\varrho_{\alpha1}\sigma_{\alpha2} - \varrho_{\alpha2}\sigma_{\alpha1}) = 0\,, & \sum_{1,2}\sum_{\alpha}(\varrho_{\alpha2}\sigma'_{\alpha1} - \sigma_{\alpha2}\varrho'_{\alpha1}) = 0\,, \\ \sum_{1,2}\sum_{\alpha}(\varrho'_{\alpha1}\sigma'_{\alpha2} - \varrho'_{\alpha2}\sigma'_{\alpha1}) = 0\,, & \sum_{1,2}\sum_{\alpha}(\varrho_{\alpha1}\sigma'_{\alpha1} - \sigma_{\alpha1}\varrho'_{\alpha1}) = 2\,, \\ \sum_{1,2}\sum_{\alpha}(\varrho_{\alpha1}\sigma'_{\alpha2} - \sigma_{\alpha1}\varrho'_{\alpha2}) = 0\,, & \sum_{1,2}\sum_{\alpha}(\varrho_{\alpha2}\sigma'_{\alpha2} - \sigma_{\alpha2}\varrho'_{\alpha2}) = 2 \end{cases}$$

zu genügen haben, im Uebrigen aber beliebig sind.

Setzt man dann nach Hermite

$$(8)\qquad e^{f(v_1,v_2)\cdot\pi i}\cdot\vartheta_\lambda(v_1',v_2'\tau_{11}',\tau_{12}',\tau_{22}') = \Pi_\lambda(v_1v_2)\,,$$

wo $f(v_1v_2)$ — was zu beachten ist — eine *homogene* und *vom Index λ unabhängige* ganze Function von v_1, v_2 ist, nämlich:

$$\begin{aligned}(9)\quad f(v_1v_2) = &-(\sigma_{11}'v_1+\sigma_{21}'v_2)(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)\\ &-(\sigma_{12}'v_1+\sigma_{22}'v_2)(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2)+\tau_{11}'(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)^2\\ &+2\tau_{12}'(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2)+\tau_{22}'(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2)^2,\end{aligned}$$

so genügt die so definirte Π-Function den folgenden vier charakteristischen Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{cases} \Pi(v_1+1, v_2)_\lambda = (-1)^{\mathfrak{m}}\,\Pi(v_1,v_2)_\lambda\,, \\ \Pi(v_1, v_2+1)_\lambda = (-1)^{\mathfrak{n}}\,\Pi(v_1,v_2)_\lambda\,, \\ \Pi(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22})_\lambda = (-1)^{\mathfrak{p}}\,\Pi(v_1,v_2)_\lambda\cdot e^{-2\pi i(2v_2+\tau_{22})}\,, \\ \Pi(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{21})_\lambda = (-1)^{\mathfrak{q}}\,\Pi(v_1,v_2)_\lambda\cdot e^{-2\pi i(2v_1+\tau_{11})}\,, \end{cases}$$

wenn $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, folgendermassen zusammengesetzte ganze Zahlen bedeuten:

$$(11)\quad \begin{cases} \mathfrak{m} = n_1^\lambda\sigma_{11}' + n_2^\lambda\sigma_{12}' - m_2^\lambda\sigma_{12} - m_1^\lambda\sigma_{11} - \sigma_{11}\sigma_{11}' - \sigma_{12}\sigma_{12}'\,, \\ \mathfrak{n} = n_1^\lambda\sigma_{21}' + n_2^\lambda\sigma_{22}' - m_2^\lambda\sigma_{22} - m_1^\lambda\sigma_{21} - \sigma_{21}\sigma_{21}' - \sigma_{22}\sigma_{22}'\,, \\ \mathfrak{p} = -n_1^\lambda\varrho_{21}' - n_2^\lambda\varrho_{22}' + m_2^\lambda\varrho_{22} + m_1^\lambda\varrho_{21} - \varrho_{21}\varrho_{21}' - \varrho_{22}\varrho_{22}'\,, \\ \mathfrak{q} = -n_1^\lambda\varrho_{11}' - n_2^\lambda\varrho_{12}' + m_2^\lambda\varrho_{12} + m_1^\lambda\varrho_{11} - \varrho_{11}\varrho_{11}' - \varrho_{12}\varrho_{12}'\,, \end{cases}$$

worin wiederum m_1^λ, m_2^λ, n_1^λ, n_2^λ die den Index λ bestimmenden Parameter, 0 oder ± 1, bezeichnen.

Wird hierauf die Π-Function, welche den Charakter einer ganzen Function hat, als eine Fourier'sche Reihe von folgender Form dargestellt:

$$(12)\quad \Pi_\lambda(v_1 v_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu_2} A_{\nu_1,\nu_2}\, e^{\pi i\left\{(2\nu_1+\mathfrak{m})v_1+(2\nu_2+\mathfrak{n})v_2\right\}+\frac{\pi i}{8}\left\{(2\nu_1+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2\nu_1+\mathfrak{m})(2\nu_2+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2\nu_2+\mathfrak{n})^2\tau_{22}\right\}},$$

so reduciren sich vermöge der Bedingungsgleichungen (10) die verschiedenen Coefficienten $A_{\mu\nu}$ auf *vier*, wenn $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ *sämmtlich* gerade, auf *zwei*, wenn eine oder mehrere dieser Zahlen ungerade, während sich die mit diesen Coefficienten multiplicirten unendlichen Reihen durch die Bemerkung ergeben, dass

im ersten Falle das Quadrat einer ϑ-Function
im zweiten Falle das Product zweier ϑ-Functionen

mit den Argumenten v_1, v_2 und den Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$

den Bedingungsgleichungen (10) Genüge leisten.

Man erhält demnach die Function $\Pi_\lambda(v_1 v_2)$ d. h. die transformirte Thetafunction $\vartheta_\lambda(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$ als ein Aggregat von vier ϑ-Quadraten, wenn

$$\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{n} \equiv \mathfrak{p} \equiv \mathfrak{q} \equiv 0 \pmod 2;$$

hingegen als ein Aggregat von zwei ϑ-Producten, wenn wenigstens eine der Grössen $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ungerade ist.

Schliesslich bestimmen sich die Coefficienten in den Gleichungen:

$$(13)\quad \Pi_\lambda(v_1 v_2) = (\alpha)\vartheta_\alpha^2(v_1 v_2) + (\beta)\vartheta_\beta^2(v_1 v_2) + (\gamma)\vartheta_\gamma^2(v_1 v_2) + (\delta)\vartheta_\delta^2(v_1 v_2),$$

$$(14)\quad \Pi_\lambda(v_1 v_2) = (1)\,\vartheta_\alpha(v_1 v_2)\vartheta_\beta(v_1 v_2) + (2)\,\vartheta_{\alpha\gamma}(v_1 v_2)\vartheta_{\beta\gamma}(v_1 v_2),$$

indem man von den Substitutionen

$$\tfrac{1}{2}\omega_{11}, \tfrac{1}{2}\omega_{21};\quad \tfrac{1}{2}\omega_{12}, \tfrac{1}{2}\omega_{22};\quad \tfrac{1}{2}\omega_{11}', \tfrac{1}{2}\omega_{12}';\quad \tfrac{1}{2}\omega_{21}', \tfrac{1}{2}\omega_{22}';$$

resp. deren Summen oder Differenzen — welche sämmtlich den Index der linken Seite nicht ändern, solche auswählt, welche die Indices der rechten Seite ändern und alsdann durch Nullsetzen der Argumente die nothwendige Anzahl von Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten herstellt. —

Ich will nun untersuchen, ob überhaupt resp. wie viel transformirte ϑ-Functionen sich für eine ganz beliebige Transformation zweiten Grades in der Form von vier ϑ-Quadraten darstellen, d. h. ich will finden, für wie viele Combinationen der Grössen $m_1^\lambda, m_2^\lambda, n_1^\lambda, n_2^\lambda$ die Zahlen $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ sämmtlich gerade sind.

Hierzu fasse ich zunächst die 15 Hermite'schen Repräsentanten der nicht äquivalenten Classen in's Auge. Ordnet man die Transformationszahlen nach dem Schema:

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} \sigma_{11}' & \sigma_{12}' & -\sigma_{12} & -\sigma_{11} \\ \sigma_{21}' & \sigma_{22}' & -\sigma_{22} & -\sigma_{21} \\ -\varrho_{21}' & -\varrho_{22}' & \varrho_{22} & \varrho_{21} \\ -\varrho_{11}' & -\varrho_{12}' & \varrho_{12} & \varrho_{11} \end{vmatrix}$$

so lassen sich jene in folgende vier Hauptformen zusammenfassen

$$(16)\qquad \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \begin{vmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&2i&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2i&0&i''&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&2\text{-}i'' \\ 0&0&0&1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2&0&i&i'' \\ 0&2&i''&i \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{vmatrix} \end{array}$$

wo i, i'', i' alle Combinationen von 0 und 1 bedeuten — und es nehmen hierfür die Zahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ die folgenden Werthe an:

$$(16^a)\qquad \left\{ \begin{array}{lll} A & B & C \\ \mathfrak{m}=n_1^\lambda, & \mathfrak{m}=n_1^\lambda & \mathfrak{m}=2n_1^\lambda+in_2^\lambda+i'm_1^\lambda-2i'', \\ \mathfrak{n}=n_2^\lambda, & \mathfrak{n}=n_2^\lambda+im_2^\lambda+2i, & \mathfrak{n}=n_2^\lambda, \\ \mathfrak{p}=2m_2^\lambda, & \mathfrak{p}=m_2^\lambda, & \mathfrak{p}=2m_2^\lambda-im_1^\lambda, \\ \mathfrak{q}=2m_1^\lambda, & \mathfrak{q}=2m_1^\lambda, & \mathfrak{q}=m_1^\lambda, \end{array} \right.$$

$$D$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= 2n_1^\lambda + im_2^\lambda + i'm_1^\lambda + 2i'' \\ \mathfrak{n} &= 2n_2^\lambda + i''m_2^\lambda + im_1^\lambda + 2i'', \\ \mathfrak{p} &= m_2^\lambda, \\ \mathfrak{q} &= m_1^\lambda. \end{aligned}$$

Sollen nun für A) $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sämmtlich gerade sein, so muss zunächst jedenfalls

$$n_1^\lambda = 0, \qquad n_2^\lambda = 0$$

sein; dagegen sind m_1^λ und m_2^λ beliebig und man erhält daher folgende Combinationen:

$m_1^\lambda = 0$, $m_2^\lambda = 0$, $n_1^\lambda = 0$, $n_2^\lambda = 0$, — also Index $\lambda = 5$,
$m_1^\lambda = -1$, $m_2^\lambda = 0$, $n_1^\lambda = 0$, $n_2^\lambda = 0$, — „ „ $\lambda = 12$,
$m_1^\lambda = 0$, $m_2^\lambda = -1$, $n_1^\lambda = 0$, $n_2^\lambda = 0$, — „ „ $\lambda = 34$,
$m_1^\lambda = -1$, $m_2^\lambda = -1$, $n_1^\lambda = 0$, $n_2^\lambda = 0$, — „ „ $\lambda = 0$.

Sollen ferner für B) $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sämmtlich gerade sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass

$$m_2^\lambda = 0, \qquad n_1^\lambda = 0.$$

Verbinden wir diese Werthe wieder mit allen möglichen Combinationen $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 1)$ für die Grössen m_1^λ, n_2^λ, so erhalten wir die vier Indices:

$$5,\ 12,\ 4,\ 03.$$

Für C) ergeben sich durch die Zusammenstellung von:

$$m_1^{\lambda} = 0\,, \qquad n_2^{\lambda} = 0$$

mit allen möglichen Werthepaaren von m_2^{λ}, n_1^{λ} die Indices:

$$5,\ 34,\ 01,\ 2$$

und endlich für D) durch die Verbindung von:

$$m_1^{\lambda} = 0\,, \qquad m_2^{\lambda} = 0$$

mit allen möglichen Combinationen von n_1^{λ}, n_2^{λ} die Indices:

$$5,\ 01,\ 4,\ 23,$$

d. h.: Es giebt für jede der vier Repräsentantenformen vier und *nur* vier transformirte ϑ-Functionen, nämlich:

$$(17)\quad \begin{cases} \text{für } (A): & \Pi_5(v_1,v_2), & \Pi_0(v_1,v_2), & \Pi_{12}(v_1,v_2), & \Pi_{34}(v_1,v_2), \\ \text{für } (B): & \Pi_5(v_1,v_2), & \Pi_4(v_1,v_2), & \Pi_{03}(v_1,v_2), & \Pi_{12}(v_1,v_2), \\ \text{für } (C): & \Pi_5(v_1,v_2), & \Pi_2(v_1,v_2), & \Pi_{01}(v_1,v_2), & \Pi_{34}(v_1,v_2), \\ \text{für } (D): & \Pi_5(v_1,v_2), & \Pi_4(v_1,v_2), & \Pi_{01}(v_1,v_2), & \Pi_{23}(v_1,v_2), \end{cases}$$

(worunter also jedesmal die ϑ-Function ohne Parameter, $\vartheta_5(v_1', v_2')$—), welche sich in der Form von vier ϑ-Quadraten des ursprünglichen Systems darstellen.

Nun lässt sich eine jede beliebige Transformation zweiten Grades zusammensetzen aus einer der 15 Repräsentanten-Transformationen und einer Lineartransformation. Da aber bei der letzteren das transformirte Theta gleich ist irgend einer der ursprünglichen ϑ-Functionen — nur multiplicirt mit einer Constanten und einem Exponential-Factor — so folgt unmittelbar, dass auch für eine ganz beliebige Transformation zweiten Grades vier und *nur* vier transformirte ϑ-Functionen existiren müssen, welche gleich sind einem Aggregate von vier primären ϑ-Quadraten.

Sei jetzt $\vartheta_\lambda(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$ eine transformirte ϑ-Function, welche sich für irgend eine beliebige Transformation zweiten Grades in der Form von vier ϑ-Quadraten ergiebt, also

$$(18)\quad e^{f(v_1,v_2)\pi i}\vartheta_\lambda(v_1', v_2') = \Pi_\lambda(v_1, v_2) = (\alpha)\vartheta_\alpha^2(v_1, v_2) + (\beta)\vartheta_\beta^2(v_1, v_2) + (\gamma)\vartheta_\gamma^2(v_1, v_2) + (\delta)\vartheta_\delta^2(v_1, v_2)\,,$$

so lassen sich, weil vermöge der Gleichungen

$$(19)\quad \begin{cases} v_1' = \sigma_{11}'v_1 + \sigma_{21}'v_2 - \tau_{11}'(\sigma_{11}v_1 + \sigma_{21}v_2) - \tau_{12}'(\sigma_{12}v_1 + \sigma_{22}v_2), \\ v_2' = \sigma_{12}'v_1 + \sigma_{22}'v_2 - \tau_{21}'(\sigma_{11}v_1 + \sigma_{21}v_2) - \tau_{22}'(\sigma_{12}v_1 + \sigma_{22}v_2), \end{cases}$$

(welche aus den in (4) gegebenen Ausdrücken hervorgehen, wenn

man die Grössen $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ der rechten Seite durch $\tau_{11}', \tau_{12}' \tau_{22}'$ ausdrückt) jede Vermehrung der Argumente v_1, v_2 um halbe Perioden nur eine Vermehrung der Argumente v_1', v_2' um halbe oder ganze Perioden zur Folge hat, durch Substitutionen von der Form

$$(20) \quad v_1 + \frac{m_1}{2} + \frac{n_1}{2}\tau_{11} + \frac{n_2}{2}\tau_{12}, \quad v_2 + \frac{m_2}{2} + \frac{n_1}{2}\tau_{21} + \frac{n_2}{2}\tau_{22},$$

$$(m_1, m_2, n_1, n_2 = 0 \text{ od. } \pm 1)$$

aus $\vartheta_\lambda(v_1', v_2')$ noch weitere transformirte ϑ-Functionen mit anderen Indices ableiten. Da es aber nach dem Obigen überhaupt nur vier transformirte ϑ-Functionen giebt, welche als Summe von vier ϑ-Quadraten darstellbar sind, so folgt, dass alle möglichen für v_1, v_2 gemachten Substitutionen von der Form (20) auf den Index λ nur drei Veränderungen hervorbringen können, mithin für die Argumente v_1', v_2' nur noch drei von einander und von den ursprünglichen Werthen um *halbe* Perioden verschiedene Ausdrücke liefern können. Da diese letztere Eigenschaft aber offenbar unabhängig vom Index λ ist und lediglich auf der Beziehung der Argumente v_1', v_2' zu v_1, v_2 beruht, so muss sie für jedes beliebige transformirte Theta gelten, also auch für diejenigen transformirten ϑ-Functionen, welche sich in der Form von zwei ϑ-Producten darstellen lassen.

Andererseits lässt sich auch zeigen, dass die Substitutionen (20) *nicht weniger* als drei Veränderungen auf den Index λ hervorbringen können. Angenommen sie brächten nur zwei hervor, so würden sich aus dem transformirten $\vartheta_5(v_1', v_2')$ durch Anwendung der betreffenden Substitutionen zwei weitere transformirte Functionen $\vartheta_\mu(v_1', v_2')$ und $\vartheta_\nu(v_1', v_2')$ herleiten lassen. Dann giebt aber die Addition dieser beiden Substitutionen offenbar eine dritte Function $\vartheta_{\mu\nu}(v_1', v_2')$, und zwar kann nicht etwa $\mu\nu = 5$ sein, da ja μ und ν verschieden sein sollten.

Brächten ferner die fünfzehn möglichen Substitutionen (20) auf den Index λ nur *eine* Veränderung hervor, so müssten offenbar mindestens *acht* solcher Substitutionen den Index λ in sich selbst oder in einen und denselben anderen Index überführen. Unter acht Substitutionen müssen sich aber immer *vier* unabhängige befinden — d. h. solche, welche sich nicht durch Addition aus einander zusammensetzen lassen — da man aus *drei* unabhängigen Substitutionen

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ *)}$$

im Ganzen nur sieben Substitutionen bilden kann, nämlich ausser jenen selbst noch:

*) Ich bezeichne durch α diejenige Substitution, welche $\vartheta_5(v_1, v_2)$ in $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$ überführt, also die Substitution:

$$v_1 + \tfrac{1}{2}m_1^\alpha + \tfrac{1}{2}n_1^\alpha\tau_{11} + \tfrac{1}{2}n_2^\alpha\tau_{12}, \qquad v_2 + \tfrac{1}{2}m_2^\alpha + \tfrac{1}{2}n_2^\alpha\tau_{21} + \tfrac{1}{2}n_2^\alpha\tau_{22}.$$

$$\alpha\beta,\ \alpha\gamma,\ \beta\gamma,\ \alpha\beta\gamma.$$

Aus *vier* unabhängigen Substitutionen kann man jedoch die sämmtlichen fünfzehn verschiedenen Substitutionen durch Combination zu je 1, 2, 3, 4 erhalten, es folgt somit, dass in diesem Falle alle fünfzehn Substitutionen den Index λ in sich selbst oder in einen einzigen Index μ überführen würden. Da es aber unter diesen Substitutionen sicherlich solche giebt, welche den Index λ unverändert lassen (worauf ja lediglich die Coefficientenbestimmung bei der Transformation zweiten Grades beruht), so müssten alle fünfzehn den Index λ *in sich selbst* überführen, d. h. v_1', v_2', nur um *ganze* Perioden verändern. Betrachtet man nun die einfachsten jener Substitutionen:

$$(21^a)\quad \begin{cases} v_1 - \frac{1}{2}, & v_1, & v_1 + \frac{1}{2}\tau_{11}, & v_1 + \frac{1}{2}\tau_{12}, \\ v_2, & v_2 - \frac{1}{2}, & v_2 + \frac{1}{2}\tau_{21}, & v_2 + \frac{1}{2}\tau_{22}, \end{cases}$$

welchen vermöge der Gleichungen (19) die folgenden Werthe der Argumente v_1', v_2', entsprechen:

$$(21^b)\quad \begin{cases} v_1' - \frac{1}{2}\sigma_{11}' + \frac{1}{2}\sigma_{11}\tau_{11}' + \frac{1}{2}\sigma_{12}\tau_{12}', \\ v_1' - \frac{1}{2}\sigma_{21}' + \frac{1}{2}\sigma_{21}\tau_{11}' + \frac{1}{2}\sigma_{22}\tau_{12}', \\ v_1' - \frac{1}{2}\varrho_{11}' + \frac{1}{2}\varrho_{11}\tau_{11}' + \frac{1}{2}\varrho_{12}\tau_{12}', \\ v_1' - \frac{1}{2}\varrho_{21}' + \frac{1}{2}\varrho_{21}\tau_{11}' + \frac{1}{2}\varrho_{22}\tau_{12}', \\ v_2' - \frac{1}{2}\sigma_{12}' + \frac{1}{2}\sigma_{11}\tau_{21}' + \frac{1}{2}\sigma_{12}\tau_{22}', \\ v_2' - \frac{1}{2}\sigma_{22}' + \frac{1}{2}\sigma_{21}\tau_{21}' + \frac{1}{2}\sigma_{22}\tau_{22}', \\ v_2' - \frac{1}{2}\varrho_{12}' + \frac{1}{2}\varrho_{11}\tau_{21}' + \frac{1}{2}\varrho_{12}\tau_{22}', \\ v_2' - \frac{1}{2}\varrho_{22}' + \frac{1}{2}\varrho_{12}\tau_{21}' + \frac{1}{2}\varrho_{22}\tau_{22}', \end{cases}$$

so ist klar, dass die Incremente von v_1', v_2' nur dann sämmtlich *ganze* Perioden sein könnten, wenn die Transformationszahlen ϱ, σ, ϱ', σ' durchgängig *gerade* Zahlen wären. Dies ist aber unmöglich, da die linke Seite der Bedingungsgleichung

$$\sum_{1,2}\nolimits_{\alpha}(\varrho_{1\alpha}\sigma_{1\alpha}' - \sigma_{1\alpha}\varrho_{1\alpha}') = 2$$

nicht durch 4 theilbar sein kann. Es führt somit auch die Annahme, dass die Substitutionen (20) nur *eine* oder gar keine Veränderung auf den Index λ der transformirten ϑ-Function hervorbringen könnten, auf einen Widerspruch.

Daraus ergiebt sich aber der Satz:

> Bei jeder Transformation zweiten Grades für die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung lassen sich aus dem Ausdrucke für *eine* transformirte ϑ-Function *drei und immer nur drei* weitere transformirte ϑ-Functionen durch Substitution von halben Perioden ableiten.

Erwägt man noch, dass sich eine Transformation von beliebigem

paaren Grade $2n$ zusammensetzen lässt aus einer Transformation n^{ten} und einer zweiten Grades, so folgt die Giltigkeit dieses Satzes auch für jeden beliebigen geradzahligen Transformationsgrad in der beschränkteren Form, dass *höchstens drei* Veränderungen des transformirten $\vartheta_\lambda(v_1', v_2')$ durch Substitutionen von halben Perioden möglich sind, während andrerseits hier auch noch der Fall eintreten kann, dass alle möglichen Substitutionen (20) *gar keine* Veränderung des Index λ hervorbringen — insofern für einen Transformationsgrad von der Form $4m$ die Möglichkeit, dass sämmtliche Transformationszahlen $\equiv 0$ mod. 2 seien, durch die Bedingungsgleichung

$$\sum_{1,2}{}_\alpha (\varrho_{1\alpha}\sigma'_{1\alpha} - \sigma_{1\alpha}\varrho'_{1\alpha}) = 4m$$

nicht ausgeschlossen ist. Da man indessen solche Transformationen, bei denen sämmtliche Transformationszahlen einen gemeinsamen Theiler (hier 2) haben, bei der Betrachtung des allgemeinen rationalen Transformationsproblems von vornherein auszuschliessen pflegt — sie führen nämlich auf Transformationen niederer Grade in Verbindung mit sogenannten Multiplicationen der hyperelliptischen Functionen — so können wir unter dieser Voraussetzung den obigen Satz auch für Transformationen von beliebigem paaren Grade ohne Weiteres als giltig betrachten.

Sei λ der Index einer transformirten ϑ-Function, welche sich für irgend eine Transformation zweiten Grades als Summe von 4 ϑ-Quadraten darstellen lässt, also:

$$\Pi_\lambda(v_1, v_2) = (\alpha)\vartheta_\alpha^2(v_1, v_2) + (\beta)\vartheta_\beta^2(v_1, v_2) + (\gamma)\vartheta_\gamma^2(v_1, v_2) + (\delta)\vartheta_\delta^2(v_1, v_2),$$

dann ist die Wahl der vier Indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durchaus unabhängig von λ und nur durch die einzige Bedingung beschränkt, dass zwischen den vier gewählten ϑ-Quadraten keine lineare Relation bestehe. Ist diese Bedingung erfüllt, so ergeben sich die Coefficienten (α), (β), (γ), (δ) durch geeignete Substitutionen in halben Perioden als endliche bestimmte Constanten. Man kann hieraus umgekehrt schliessen, dass, wenn (α), (β), (γ), (δ) sich nicht in dieser Weise bestimmen lassen und ausserdem τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} von einander unabhängig sind, zwischen $\vartheta_\alpha^2(v_1, v_2)$, $\vartheta_\beta^2(v_1, v_2)$, $\vartheta_\gamma^2(v_1, v_2)$, $\vartheta_\delta^2(v_1, v_2)$ eine lineare Relation bestehen muss. Dieser Fall tritt aber ein, sobald man für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier Indices ungerader ϑ-Functionen wählt — woraus folgt, dass zwischen je vieren der sechs ϑ-Quadrate mit den Indices:

$$1,\ 3,\ 13,\ 02,\ 04,\ 24$$

eine lineare Relation stattfindet. Solche Relationen gäbe es im Ganzen 15, da sich jene 6 Grössen fünfzehnmal zu je 4 combiniren lassen. Von diesen 15 möglichen Relationen braucht man indess nur

6 zu betrachten, da alle übrigen sich durch Elimination aus *je zweien* von diesen 6*) ergeben müssen, wobei es am bequemsten sein wird 6 solche Relationen zu wählen, bei welchen die Indices cyclisch vorrücken, sodass also jede Relation von der nächstfolgenden sich nur in einem einzigen Index unterscheidet. Denkt man sich nun auf diese 6 Relationen die 15 möglichen Substitutionen in halben Perioden angewendet — wobei die Indices nach dem folgenden Schema variiren:

(22)

1,	3,	13,	02,	04,	24,
01,	03,	24,	2,	4,	13,
5,	13,	3,	34,	23,	03,
12,	23,	04,	0,	13,	4,
13,	5,	1,	14,	12,	01,
14,	34,	02,	13,	0,	2,
0,	24,	03,	12,	14,	3,
34,	14,	4,	5,	24,	04,
24,	0,	01,	23,	34,	1,
23,	12,	2,	24,	5,	02,
2,	04,	23,	02,	3,	14,
3,	1,	5,	4,	2,	0,
4,	02,	34,	3,	01,	12,
04,	2,	12,	03,	1,	34,
03,	01,	0,	04,	02,	5,
02,	4,	14,	1,	03,	23,

so erhält man — mit Einschluss der ersten 6 — im Ganzen 96 solcher Relationen. Beachtet man hierbei den Umstand, dass jede Horizontalreihe des Schemas (22) mit der ersten oder mit einer beliebigen anderen immer nur 2 Elemente gemein hat, so folgt, dass die Relationen, welche aus *zwei verschiedenen* Horizontalreihen hervorgehen, sich um mindestens 2 Indices von einander unterscheiden müssen. Da andrerseits die 6 Relationen, deren Indices aus *einer und derselben* Horizontalreihe hervorgehen, wegen der Wahl der primären Relationen sich nur in je *einem* Index von einander unterscheiden, so ergiebt sich, dass die sämmtlichen 96 Relationen von einander verschieden sein müssen, und dass man auch nicht irgend eine von ihnen durch Elimination aus *zweien* der übrigen herstellen kann. Nun giebt es aber nach Rosenhain (cf. Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, etc. par M. George Rosenhain, page 425) im Ganzen 96 solcher linearer Beziehungen zwischen je vier ϑ-Quadraten. Wir können somit schliessen, dass die auf dem soeben angegebenen Wege resultirenden 96 Relationen mit dem Rosenhain'schen identisch oder ihnen äquivalent sind.

*) von denen auch nur 3 wirklich unabhängig sind.

Es kommt jetzt lediglich darauf an sechs Relationen für je vier Quadrate ungerader ϑ-Functionen zu entwickeln. Man kann sich hierzu der betrachteten Classe von Transformationen zweiten Grades bedienen. Da nämlich die ungeraden ϑ-Functionen in der ersten Horizontalreihe des Systems (22) *sämmtlich*, in jeder anderen stets nur *zu zweien* auftreten, so folgt, dass eine Relation zwischen *drei* ungeraden und *einem* geraden ϑ-Quadrate nicht vorkommen kann (es würden sonst, falls man die Argumente $v_1, v_2 = 0$ setzt, die drei Glieder mit den ungeraden Functionen verschwinden, und es müsste dann also eine gerade ϑ-Function für die Nullwerthe ihrer Argumente $= 0$ sein, was nicht der Fall ist, solange nicht die Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ speciellen Bedingungen unterworfen werden). Bezeichnet man daher mit μ den Index irgend einer geraden ϑ-Function, so wird man setzen können:

$$(23)\quad \begin{cases} \Pi(v_1, v_2)_\lambda = (\mu)\vartheta_\mu^2(v_1, v_2) + (1)\vartheta_1^2(v_1, v_2) + (3)\vartheta_3^2(v_1, v_2) \\ \qquad\qquad + (13)\vartheta_{13}^2(v_1, v_2), \\ \Pi(v_1, v_2)_\lambda = (\mu)\vartheta_\mu^2(v_1, v_2) + (3')\vartheta_3^2(v_1, v_2) + (13')\vartheta_{13}^2(v_1, v_2) \\ \qquad\qquad + (02)\vartheta_{02}^2(v_1, v_2) \end{cases}$$

u. s. f. im Ganzen sechs verschiedene Ausdrücke.

Bestimmt man alsdann die Coefficienten (μ), (1), (3) etc., so zeigt sich, dass derjenige von $\vartheta_\mu^2(v_1 v_2)$ in allen Gleichungen derselbe, nämlich $= \frac{\Pi_\lambda(0,0)}{\vartheta_\mu^2(0,0)}$ ist, während alle übrigen Coefficienten rationale Functionen von ϑ-Quadraten für die Nullwerthe der Argumente, multiplicirt mit $\Pi_\lambda(0, 0)$ sind. Setzt man daher jeden der Ausdrücke (23) dem nächstfolgenden und den letzten wieder dem ersten gleich, so ergeben sich die sechs gesuchten Relationen zwischen je vier Quadraten ungerader ϑ-Functionen.

Es ist indessen bequemer die Methode der Coefficientenbestimmung, welche man zur Berechnung der Ausdrücke (23) anwenden würde, ganz unmittelbar zur Entwicklung der gesuchten Relationen zu benutzen, insofern man alsdann in der Wahl der anzuwendenden Substitutionen völlig unbeschränkt ist und demgemäss stets solche Substitutionen anwenden kann, welche eine möglichst einfache Coefficientenbestimmung ergeben. Nachdem nämlich überhaupt erst festgestellt ist, dass zwischen vier Quadraten ungerader ϑ-Functionen eine lineare Relation bestehen muss, so kann man offenbar ohne Weiteres setzen:

$$(\alpha)\vartheta_\alpha^2(v_1, v_2) + (\beta)\vartheta_\beta^2(v_1, v_2) + (\gamma)\vartheta_\gamma^2(v_1, v_2) + (\delta)\vartheta_\delta^2(v_1, v_2) = 0,$$

oder:

$$(24)\quad A\ \vartheta_\alpha^2(v_1, v_2) + B\vartheta_\beta^2(v_1, v_2) + C\vartheta_\gamma^2(v_1, v_2) = \vartheta_\delta^2(v_1, v_2),$$

wenn α, β, γ, δ Indices ungerader ϑ-Functionen bezeichnen).

Beachtet man nun, dass zwei ϑ-Functionen

$$\vartheta_\mu(v_1, v_2), \quad \vartheta_\nu(v_1, v_2)$$

durch eine Substitution, deren Index aus μ und ν zusammengesetzt ist, übergehen in

$$C_1 \cdot \vartheta_\nu(v_1, v_2), \quad C_2 \cdot \vartheta_\mu(v_1, v_2),$$

so ergiebt sich, dass durch Anwendung der drei Substitutionen $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, auf Gleichung (24) jede der resultirenden Gleichungen immer wieder zwei ungerade ϑ-Functionen enthalten muss, so dass man für $v_1 = v_2 = 0$ die folgenden einfachen Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten erhält:

$$C\vartheta^2_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon \cdot \vartheta^2_{\alpha\beta\delta}, \quad \text{also:} \quad C = \varepsilon \cdot \frac{\vartheta^2_{\alpha\beta\delta}}{\vartheta^2_{\alpha\beta\gamma}},$$

$$B\vartheta^2_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon' \cdot \vartheta^2_{\alpha\gamma\delta}, \quad \text{,,} \quad B = \varepsilon' \cdot \frac{\vartheta^2_{\alpha\gamma\delta}}{\vartheta^2_{\alpha\beta\gamma}},$$

$$A\vartheta^2_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon'' \cdot \vartheta^2_{\beta\gamma\delta}, \quad \text{,,} \quad A = \varepsilon'' \cdot \frac{\vartheta^2_{\beta\gamma\delta}}{\vartheta^2_{\alpha\beta\gamma}},$$

(wenn ε, ε', ε'' den Factor ± 1 bezeichnen), und die gesuchte Relation somit folgendermassen lautet:

$$(25)\ \varepsilon''\vartheta^2_{\beta\gamma\delta}\vartheta^2_\alpha(v_1,v_2) + \varepsilon'\vartheta^2_{\alpha\gamma\delta}\vartheta^2_\beta(v_1',v_2) + \varepsilon\vartheta^2_{\alpha\beta\delta}\vartheta^2_\gamma(v_1,v_2) - \vartheta^2_{\alpha\beta\gamma}\vartheta^2_\delta(v_1,v_2) = 0.$$

Wir ordnen nun die 6 Indices der ungeraden ϑ-Functionen folgendermassen zu vieren:

1, 3, 13, 04,
3, 13, 04, 02,
13, 04, 02, 24,
04, 02, 24, 1,
02, 24, 1, 3,
24, 1, 3, 13,

(Diese Anordnung wurde gewählt der späteren Vergleichung halber mit den Rosenhain'schen Relationen.)

so bestimmen sich nach der soeben entwickelten Methode die Coefficienten mit Hülfe der Substitutionen:

13, 3, 1,
1, 2, 12,
2, 4, 24,
24, 02, 04,
04, 34, 03,
03, 01, 3

in folgender Weise:

$$(26)\quad \begin{cases} \vartheta_{23}^2\vartheta_1^2(v_1,v_2)+\vartheta_{12}^2\vartheta_3^2(v_1,v_2)-\vartheta_2^2\vartheta_{13}^2(v_1,v_2) \\ \qquad -\vartheta_5^2\vartheta_{04}^2(v_1,v_2)=0, \\ \vartheta_0^2\vartheta_3^2(v_1,v_2)-\vartheta_{01}^2\vartheta_5^2(v_1,v_2)+\vartheta_{23}^2\vartheta_{02}^2(v_1,v_2) \\ \qquad -\vartheta_{34}^2\vartheta_{04}^2(v_1,v_2)=0, \\ \vartheta_5^2\vartheta_{13}^2(v_1,v_2)+\vartheta_2^2\vartheta_{04}^2(v_1,v_2)-\vartheta_4^2\vartheta_{02}^2(v_1,v_2) \\ \qquad -\vartheta_0^2\vartheta_{24}^2(v_1,v_2)=0, \\ \vartheta_{23}^2\vartheta_{04}^2(v_1,v_2)+\vartheta_{34}^2\vartheta_{02}^2(v_1,v_2)-\vartheta_{03}^2\vartheta_{24}^2(v_1,v_2) \\ \qquad -\vartheta_5^2\vartheta_1^2(v_1,v_2)=0, \\ \vartheta_0^2\vartheta_{02}^2(v_1,v_2)-\vartheta_4^2\vartheta_{24}^2(v_1,v_2)-\vartheta_{12}^2\vartheta_1^2(v_1,v_2) \\ \qquad +\vartheta_{23}^2\vartheta_3^2(v_1,v_2)=0, \\ \vartheta_5^2\vartheta_{24}^2(v_1,v_1)+\vartheta_{03}^2\vartheta_1^2(v_1,v_2)-\vartheta_{01}^2\vartheta_3^2(v_1,v_2) \\ \qquad -\vartheta_0^2\vartheta_{13}^2(v_1,v_2)=0. \end{cases}$$

Von den 90 weiteren Relationen, welche sich aus den oben gefundenen durch die 15 Substitutionen in halben Perioden herleiten lassen, will ich nur diejenigen mittheilen, welche die sechs ϑ-Functionen mit den einfachen Indices 0, 1, 2, 3, 4, 5 enthalten und somit aus den obigen durch die Substitutionen (13) hervorgehen. Sie lauten:

$$(26^a)\quad \begin{cases} \vartheta_{23}^2\vartheta_3^2(v_1,v_2)-\vartheta_{12}^2\vartheta_1^2(v_1,v_2)+\vartheta_2^2\vartheta_5^2(v_1,v_2) \\ \qquad -\vartheta_5^2\vartheta_2^2(v_1,v_2)=0, \\ \vartheta_0^2\vartheta_1^2(v_1,v_2)-\vartheta_{01}^2\vartheta_5^2(v_1,v_2)+\vartheta_{23}^2\vartheta_4^2(v_1,v_2) \\ \qquad +\vartheta_{34}^2\vartheta_2^2(v_1,v_2)=0, \\ \vartheta_5^2\vartheta_5^2(v_1,v_2)-\vartheta_2^2\vartheta_2^2(v_1,v_2)-\vartheta_4^2\vartheta_4^2(v_1,v_2) \\ \qquad -\vartheta_0^2\vartheta_0^2(v_1,v_2)=0, \\ \vartheta_{23}^2\vartheta_2^2(v_1,v_2)-\vartheta_{34}^2\vartheta_4^2(v_1,v_2)+\vartheta_{03}^2\vartheta_0^2(v_1,v_2) \\ \qquad +\vartheta_5^2\vartheta_3^2(v_1,v_2)=0, \\ \vartheta_0^2\vartheta_4^2(v_1,v_2)-\vartheta_4^2\vartheta_0^2(v_1,v_2)+\vartheta_{12}^2\vartheta_3^2(v_1,v_2) \\ \qquad -\vartheta_{23}^2\vartheta_1^2(v_1,v_2)=0, \\ \vartheta_5^2\vartheta_0^2(v_1,v_2)-\vartheta_{03}^2\vartheta_3^2(v_1,v_2)-\vartheta_{01}^2\vartheta_1^2(v_1,v_2) \\ \qquad -\vartheta_0^2\vartheta_5^2(v_1,v_2)=0. \end{cases}$$

Um diese letzteren Relationen mit den entsprechenden Gleichungen Rosenhain's vergleichen zu können, müssen wir erst die Beziehung zwischen den Rosenhain'schen φ-Functionen und den von uns gebrauchten Königsberger'schen ϑ-Functionen angeben. Ich gehe auf diesen Punkt hier etwas ausführlicher ein, weil ich hierüber in verschiedenen Arbeiten von einander abweichende und theilweise unrichtige oder ungenaue Angaben gefunden habe. So scheint mir z. B. die Behauptung des Herrn Ernst Kossak in seiner Abhand-

lung über das Additionstheorem der hyperelliptischen Functionen, dass den Rosenhain'schen Indices

33, 10, 20, 31, 32, 00, 23, 13, 02, 01, 30, 21, 22, 11, 12, 03,

der Reihe nach die folgenden Königsberger'schen entsprechen:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 01, 02, 03, 04, 12, 13, 14, 23, 24, 34,

hinsichtlich aller der von mir unterstrichenen Indices nicht richtig zu sein.

Rosenhain definirt die vier elliptischen ϑ-Functionen durch die folgenden Gleichungen:

$$\Theta_0(v, q) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n q^{n^2} e^{2nv},$$

$$\Theta_1(v, q) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)v},$$

$$\Theta_2(v, q) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)v},$$

$$\Theta_3(v_1, q) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n q^{n^2} e^{2nv},$$

(S. Mémoire S. 368. Wir haben zur Unterscheidung von unsern ϑ-Functionen zur Bezeichnung der Rosenhain'schen grosse Θ gewählt, sodass also darunter nicht etwa die von Rosenhain in anderer Bedeutung gebrauchten grossen Θ zu verstehen sind, sondern die a. a. O. mit ϑ bezeichneten.)

während nach der von uns gebrauchten Definition:

$$\vartheta_0(u,\tau) = \vartheta_3(u-\tfrac{1}{2},\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu (-1)^\nu e^{\nu^2\tau\pi i} e^{2\nu u\pi i},$$

$$\vartheta_1(u,\tau) = e^{\frac{\pi i}{2}(2u-1+\frac{1}{2}\tau)}\vartheta_3(u-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau,\tau) = -i\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu (-1)^\nu e^{\frac{(2\nu+1)^2}{4}\tau\pi i} e^{(2\nu+1)u\pi i},$$

$$\vartheta_2(u,\tau) = e^{\frac{\pi i}{2}(2u+\frac{1}{2}\tau)}\vartheta_3(u+\tfrac{1}{2}\tau,\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu e^{\frac{(2\nu+1)^2}{4}\tau\pi i} e^{(2\nu+1)u\pi i},$$

$$\vartheta_3(u,\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu e^{\nu^2\tau\pi i} e^{2\nu u\pi i}.$$

*) „Das Additionstheorem der ultraelliptischen Functionen erster Ordnung von Ernst Kossak" (Berlin, 1871 Nicolai'sche Verlagsbuchhandlung.) — s. S. 12. —

Hieraus folgt, dass, wenn gesetzt wird

$$u\pi i = v\,, \qquad e^{\pi i \tau} = q \;-\; \text{also } \underset{\cdot}{u} = \frac{v}{\pi i}\,, \qquad \tau = \frac{\lg q}{\pi i}\,,$$

die Beziehung stattfindet

$$\Theta_r(v, q) = \varepsilon \cdot \vartheta_r(u, \tau)\,, \tag{27}$$

wo $\varepsilon = +1$ für $r = 0, 2, 3$ und $\varepsilon = +i$ für $= 1$.

Rosenhain definirt nun ferner seine hyperelliptischen ϑ-Functionen folgendermassen:

$$\left\{\begin{aligned}
\varphi_{3,r}(v, w, p, q, A) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, p^{m^2} e^{2mv}\, \Theta_r(w + 2mA, q), \quad \text{(S. Mémoire S. 409.)}\\
\varphi_{0,r}(v, w, p, q, A) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m p^{m^2} e^{2mv}\, \Theta_r(w + 2mA, q)\,,\\
\varphi_{2,r}(v, w, p, q, A) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, p^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{(2m+1)v}\, \Theta_r(v + \overline{2m+1}\,A, q)\,,\\
\varphi_{1,r}(v, w, p, q, A) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m p^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{(2m+1)v}\, \Theta_r(v + \overline{2m+1}\,A, q)\,.
\end{aligned}\right.$$

Hingegen sind die von uns gebrauchten ϑ-Functionen allgemein definirt durch die Gleichung:

$$\begin{aligned}
\vartheta(v_1, v_2) &= \vartheta(v_1 + \tfrac{1}{2}m_1^{\lambda}, v_2 + \tfrac{1}{2}m_2^{\lambda};\ \tfrac{1}{2}n_1^{\lambda}, \tfrac{1}{2}n_2^{\lambda})\\
&= e^{\frac{\pi i}{2} n_1^{\lambda}(2v_1 + m_1^{\lambda} + \frac{1}{2}n_1^{\lambda}\tau_{11} + \frac{1}{2}n_2^{\lambda}\tau_{12}) + \frac{\pi i}{2} n_2^{\lambda}(2v_2 + m_2^{\lambda} + \frac{1}{2}n_1^{\lambda}\tau_{21} + \frac{1}{2}n_2^{\lambda}\tau_{22})}\\
&\qquad \vartheta(v_1 + \tfrac{1}{2}m_1^{\lambda} + \tfrac{1}{2}n_1^{\lambda}\tau_{11} + \tfrac{1}{2}n_2^{\lambda}\tau_{12},\ v_2 + \tfrac{1}{2}m_2^{\lambda} + \tfrac{1}{2}n_1^{\lambda}\tau_{21} + \tfrac{1}{2}n_2^{\lambda}\tau_{22})\\
&= i^{m_1^{\lambda} n_1^{\lambda} + m_2^{\lambda} n_2^{\lambda}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu_1, \nu_2} (-1)^{m_1^{\lambda}\nu_1 + m_2^{\lambda}\nu_2}\\
&\qquad e^{\pi i\left\{(2\nu_1 + n_1^{\lambda})v_1 + (2\nu_2 + n_2^{\lambda})v_2\right\} + \frac{\pi i}{4}\left\{(2\nu_1 + n_1^{\lambda})^2\tau_{11} + 2(2\nu_1 + n_1^{\lambda})(2\nu_2 + n_2^{\lambda})\tau_{12} + (2\nu_2 + n_2^{\lambda})^2\tau_{22}\right\}},
\end{aligned}$$

und da sich hieraus unsere elliptische ϑ-Function allgemein in der Form ergiebt:

$$\vartheta_{\lambda}(v, \tau) = i^{m_{\lambda} n^{\lambda}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} (-1)^{m_{\lambda}\nu_{\lambda}} e^{\pi i\left\{2\nu + n_{\lambda}\right\}v_1 + \frac{\pi i}{4}\left\{2\nu + n_{\lambda}\right\}\tau},$$

so können wir offenbar setzen:

$$\vartheta_{\lambda}(v_1, v_2) = i^{m_1^{\lambda} n_1^{\lambda}} \sum_{\nu_1} (-1)^{m_1^{\lambda}\nu_1} e^{\pi i(2\nu_1 + n_1^{\lambda})v_1 + \frac{\pi i}{4}(2\nu_1 + n_1^{\lambda})^2\tau_{11}}\, \vartheta_{\lambda_2}(v_2 + \tfrac{1}{2}[2\nu_1 + n_1^{\lambda}]\tau_{12}, \tau_{22}),$$

wenn wir mit λ_2 den Index derjenigen elliptischen ϑ-Function bezeichnen, deren Charakter durch die Grössen m_2^{λ}, n_2^{λ} bestimmt wird. Die analoge Bedeutung soll auch dem Index λ_1 beigelegt werden.

Führen wir alsdann statt des bisher von uns für die hyperelliptischen ϑ-Functionen gebrauchten Index λ einen zusammengesetzten (λ_1, λ_2) ein, wodurch unsere bisherigen Indices

0, 1, 2, 3, 4, 5, 01, 02, 03, 04, 12, 13, 14, 23, 24, 34,

der Reihe nach in die folgenden übergehen:

0,0, 1,0, 2,0, 3,1, 3,2, 3,3, 2,3, 1,3, 0,2, 0,1, 0,3, 1,2, 1,1, 2,2, 2,1, 3,0,

so gehen aus Gleichung (29), indem wir λ_1 die Werthe 3, 0, 2, 1 — d. h. m_1^{λ}, n_1^{λ} die Werthcombinationen (0,0), (1,0), (0,1), (1,1) geben, die folgenden vier hervor:

$$(30)\quad \begin{cases} \vartheta_{3,\lambda_2}(v_1, v_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu_1} e^{2\nu_1 v_1 \pi i} e^{\nu_1^2 \tau_{11} \pi i} \vartheta_{\lambda_2}(v_2 + \nu_1 \tau_{12}, \tau_{22}), \\ \vartheta_{2,\lambda_2}(v_1, v_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu_1} (-1)^{\nu_1} e^{2\nu_1 v_1 \pi i} e^{\nu_1^2 \tau_{11} \pi i} \vartheta_{\lambda_2}(v_2 + \nu_1 \tau_{12}, \tau_{22}), \\ \vartheta_{0,\lambda_2}(v_1, v_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu_1} e^{(2\nu_1+1) v_1 \pi i} e^{\frac{1}{4}(2\nu_1+1)^2 \tau_{11} \pi i} \vartheta_{\lambda_2}(v_2 + \tfrac{1}{2}[2\nu+1]\tau_{12}, \tau_{22}), \\ \vartheta_{1,\lambda_2}(v_1, v_2) = -i \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu_1} (-1)^{\nu_1} e^{(2\nu_1+1) v_1 \pi i} e^{\frac{1}{4}(2\nu_1+1)^2 \tau_{11} \pi i} \vartheta_{\lambda_2}(v_2 + \tfrac{1}{2}[2\nu_1+1]\tau_{12}, \tau_{22} \end{cases}$$

Verbindet man diese Relationen mit den Rosenhain'schen Definitionen (28) unter Berücksichtigung der Gleichung (27), so ergiebt, dass

$$(31)\quad \begin{cases} \varphi_{3,r}(v, w, p, q, A) = \varepsilon \cdot \vartheta_{3,r}(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}), \\ \varphi_{0,r}(v, w, p, q, A) = \varepsilon \cdot \vartheta_{0,r}(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}), \\ \varphi_{2,r}(v, w, p, q, A) = \varepsilon \cdot \vartheta_{2,r}(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}), \\ \varphi_{1,r}(v, w, p, q, A) = \varepsilon \cdot \vartheta_{1,r}(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}), \end{cases}$$

wenn gesetzt wird:

$$v_1 = \frac{v}{\pi i}, \quad v_2 = \frac{w}{\pi i}, \quad \tau_{11} = \frac{\lg p}{\pi i}, \quad \tau_{12} = \frac{2A}{\pi i}, \quad \tau_{22} = \frac{\lg q}{\pi i},$$

und ausserdem der Factor:

$$\varepsilon = +1 \quad \text{für} \quad r = 0, 2, 3,$$
$$\varepsilon = +i \quad \text{für} \quad r = 1$$

gewählt wird.

Führen wir jetzt wieder für unsere ϑ-Functionen die sonst von uns gebrauchten Indices ein, so folgt, dass den Rosenhain'schen Functionen:

$\varphi_{0,0}, \varphi_{0,1}, \varphi_{0,2}, \varphi_{0,3}, \varphi_{1,0}, \varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \varphi_{1,3}, \varphi_{2,0}, \varphi_{2,1}, \varphi_{2,2}, \varphi_{2,3}, \varphi_{3,0}, \varphi_{3,1}, \varphi_{3,2}, \varphi_{3,3}$

unsere ϑ-Functionen in folgender Anordnung entsprechen:

$\vartheta_0, i\vartheta_{01}, \vartheta_{03}, \vartheta_{12}, i\vartheta_1, -\vartheta_{14}, i\vartheta_{13}, i\vartheta_{02}, \vartheta_2, i\vartheta_{24}, \vartheta_{23}, \vartheta_{01}, \vartheta_{34}, i\vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_5.$

Hält man diese Beziehungen fest, so gehen die von Rosenhain auf S. 424 seines Mémoire's gegebenen 9 Doppelgleichungen genau in die folgenden über*):

$$\text{I.} \quad -\vartheta_{14}^2\vartheta_{04}^2(v_1,v_2) - \vartheta_2^2\,\vartheta_{34}^2(v_1,v_2) = -\vartheta_0^2\,\vartheta_1^2(v_1,v_2) - \vartheta_{34}^2\vartheta_2^2\,(v_1,v_2)$$
$$= \vartheta_{23}^2\vartheta_4^2(v_1,v_2) - \vartheta_{01}^2\vartheta_5^2\,(v_1,v_2),$$

$$\text{II.} \quad +\vartheta_{14}^2\vartheta_{03}^2(v_1,v_2) - \vartheta_{01}^2\vartheta_{34}^2(v_1,v_2) = -\vartheta_{12}^2\vartheta_1^2(v_1,v_2) - \vartheta_5^2\,\vartheta_2^2\,(v_1,v_2)$$
$$= -\vartheta_{23}^2\vartheta_3^2(v_1,v_2) - \vartheta_2^2\,\vartheta_5^2\,(v_1,v_2),$$

$$\text{III.} \quad +\vartheta_{14}^2\vartheta_{12}^2(v_1,v_2) - \vartheta_{23}^2\vartheta_{34}^2(v_1,v_2) = -\vartheta_{03}^2\vartheta_1^2(v_1,v_2) - \vartheta_4^2\,\vartheta_2^2\,(v_1,v_2)$$
$$= -\vartheta_{01}^2\vartheta_3^2(v_1,v_2) - \vartheta_2^2\,\vartheta_4^2\,(v_1,v_2),$$

$$\text{IV.} \quad +\vartheta_{14}^2\vartheta_{13}^2(v_1,v_2) - \vartheta_{34}^2\vartheta_{34}^2(v_1,v_2) = \vartheta_2^2\,\vartheta_2^2(v_1,v_2) + \vartheta_0^2\,\vartheta_0^2\,(v_1,v_2)$$
$$= \vartheta_5^2\,\vartheta_5^2(v_1,v_2) + \vartheta_4^2\,\vartheta_4^2\,(v_1,v_2),$$

$$\text{V.} \quad -\vartheta_{14}^2\vartheta_{13}^2(v_1,v_2) + \vartheta_5^2\,\vartheta_{34}^2(v_1,v_2) = \vartheta_{01}^2\vartheta_2^2(v_1,v_2) + \vartheta_{12}^2\vartheta_0^2\,(v_1,v_2)$$
$$= \vartheta_{34}^2\vartheta_5^2(v_1,v_2) + \vartheta_5^2\,\vartheta_{34}^2(v_1,v_2),$$

$$\text{VI.} \quad -\vartheta_{14}^2\vartheta_{02}^2(v_1,v_2) + \vartheta_4^2\,\vartheta_{34}^2(v_1,v_2) = \vartheta_{23}^2\vartheta_2^2(v_1,v_2) + \vartheta_{03}^2\vartheta_0^2\,(v_1,v_2)$$
$$= \vartheta_{34}^2\vartheta_4^2(v_1,v_2) + \vartheta_5^2\,\vartheta_3^2\,(v_1,v_2),$$

$$\text{VII.} \quad -\vartheta_{14}^2\vartheta_{24}^2(v_1,v_2) + \vartheta_0^2\,\vartheta_{34}^2(v_1,v_2) = -\vartheta_2^2\,\vartheta_1^2(v_1,v_2) - \vartheta_{34}^2\vartheta_0^2\,(v_1,v_2)$$
$$= \vartheta_{12}^2\vartheta_5^2(v_1,v_2) - \vartheta_{03}^2\vartheta_4^2\,(v_1,v_2),$$

$$\text{VIII.} \quad +\vartheta_{14}^2\vartheta_{23}^2(v_1,v_2) + \vartheta_{12}^2\vartheta_{34}^2(v_1,v_2) = -\vartheta_{01}^2\vartheta_1^2(v_1,v_2) + \vartheta_5^2\,\vartheta_0^2\,(v_1,v_2)$$
$$= \vartheta_0^2\,\vartheta_5^2(v_1,v_2) + \vartheta_{03}^2\vartheta_3^2\,(v_1,v_2),$$

$$\text{IX.} \quad +\vartheta_{14}^2\vartheta_{01}^2(v_1,v_2) + \vartheta_{03}^2\vartheta_{34}^2(v_1,v_2) = -\vartheta_{23}^2\vartheta_1^2(v_1,v_2) + \vartheta_4^2\,\vartheta_0^2\,(v_1,v_2)$$
$$= \vartheta_0^2\,\vartheta_4^2(v_1,v_2) + \vartheta_{12}^2\vartheta_3^2\,(v_1,v_2).$$

Die Vergleichung dieser Relationen mit den von uns unter Nr. (26ª) zusammengestellten lehrt, dass die Rosenhain'schen Gleichungen II., I., IV., VI., IX., VIII. in ihren beiden rechten Seiten der Reihe nach mit unseren Gleichungen (26ª) identisch sind. — Ich bemerke noch beiläufig, dass man in ganz ähnlicher Weise auch die linearen Relationen zwischen je drei ϑ-Producten (es giebt deren nach Rosenhain 120) herleiten kann.

Ich wende mich jetzt wiederum zur Transformation zweiten Grades, und zwar zu dem speciellen Falle, welcher die transformirte hyperelliptische ϑ-Function als ein Product zweier elliptischer ϑ-Functionen liefert, so dass also — wenn wir uns wieder der bereits oben (in Gleichung (30)) angewendeten Bezeichnungen bedienen:

---

*) In der zweiten dieser Gleichungen findet sich bei Rosenhain ein Druckfehler, indem, wie man sich leicht überzeugt, der erste Coefficient der rechten Seite *nicht* $\varphi_{0,0}$, sondern $\varphi_{0,3}$ heissen muss.

$$(32) \qquad \vartheta_\lambda(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \vartheta_{\lambda_1}(v_1', \tau_{11}') \cdot \vartheta_{\lambda_2}(v_2', \tau_{22}').$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen dieser Gleichung ist die, dass τ_{12}' verschwindet, was für die Moduln der zu transformirenden ϑ-Functionen die Bedingung ergiebt:

$$(33^a) \qquad \begin{aligned}&(\varrho_{12}' + \sigma_{12}'\tau_{11} + \sigma_{22}'\tau_{12})(\varrho_{22} + \sigma_{12}\tau_{12} + \sigma_{22}\tau_{22}) \\ &- (\varrho_{22}' + \sigma_{12}'\tau_{21} + \sigma_{22}'\tau_{22})(\varrho_{12} + \sigma_{12}\tau_{11} + \sigma_{22}\tau_{12}) = 0,\end{aligned}$$

oder:

$$(33^b) \qquad \begin{aligned}&(\varrho_{21}' + \sigma_{11}'\tau_{21} + \sigma_{21}'\tau_{22})(\varrho_{11} + \sigma_{11}\tau_{11} + \sigma_{21}\tau_{12}) \\ &- (\varrho_{11}' + \sigma_{11}'\tau_{11} + \sigma_{21}'\tau_{12})(\varrho_{21} + \sigma_{11}\tau_{21} + \sigma_{21}\tau_{22}) = 0\end{aligned}$$

(S. die erwähnte Königsberger'sche Abhandlung, Crelle's Journal Bd. 67, S. 73 Anm.)

Alsdann muss aber

$$\vartheta_{14}'(0, 0, \tau_{11}', 0, \tau_{22}') = 0$$

sein, weil diese Function in die beiden ungeraden elliptischen ϑ-Functionen mit dem Index 1 zerfällt. Nun kann, wie Herr Königsberger gezeigt hat (a. a. O. S. 75), eine gerade transformirte ϑ-Function für die Nullwerthe der Argumente nur dann verschwinden, wenn sie sich als eine Summe von vier ϑ-Quadraten des ursprünglichen Systems darstellen lässt. Folglich können nur solche Transformationen zweiten Grades die transformirten ϑ-Functionen als Producte elliptischer ϑ-Functionen liefern, für welche

$$\Pi_{14}(v_1, v_2) \text{ oder } e^{f(v_1, v_2)\pi i}\vartheta_{11}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$

als Summe von vier ϑ-Quadraten erscheint, welche also der Bedingung genügen, dass für

$$-m_1^\lambda = -m_2^\lambda = n_1^\lambda = n_2^\lambda = 1$$

die aus den Transformationszahlen ϱ, σ, ϱ', σ' zusammengesetzten Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sämmtlich gerade sind. Da dies, wie aus den Gleichungen (16^a) hervorgeht, für keine der unter (16) zusammengestellten Repräsentanten-Transformationen der Fall ist, müssen wir, um Transformationen von der eben erwähnten Eigenschaft zu erhalten, jene Repräsentanten-Transformationen mit Linear-Transformationen von der Beschaffenheit combiniren, dass irgend eine derjenigen ϑ-Functionen, welche sonst als Summe von vier ϑ-Quadraten erscheinen, durch die betreffende Lineartransformation in ϑ_{14} übergeht.

Als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$\vartheta_\lambda(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{21}')$$

sich in der Form von vier ϑ-Quadraten darstellen liess, fanden wir (s. S. 449)

$$(34)\quad \begin{cases} \text{a) für die Repräsentanten } A\text{:} & n_1^{\lambda} = 0,\ n_2^{\lambda} = 0, \\ \text{b) } \quad " \quad " \quad " & B\text{:}\ m_2^{\lambda} = 0,\ n_1^{\lambda} = 0, \\ \text{c) } \quad " \quad " \quad " & C\text{:}\ m_1^{\lambda} = 0,\ n_2^{\lambda} = 0, \\ \text{d) } \quad " \quad " \quad " & D\text{:}\ m_1^{\lambda} = 0,\ m_2^{\lambda} = 0. \end{cases}$$

Denken wir uns jetzt, dass durch irgend eine Lineartransformation die Argumente und Moduln:

$$v_1',\ v_2',\ \tau_{11}',\ \tau_{12}',\ \tau_{22}'$$

übergeführt würden in:

$$w_1',\ w_2',\ t_{11}',\ t_{12}',\ t_{22}',$$

so stellen sich die linear transformirten ϑ-Functionen in der Form dar:

$$(35)\quad \begin{aligned} & e^{-f(v_1', v_2')\pi i}\,\vartheta\,(w_1', w_2', t_{11}', t_{12}', t_{22}')_{m_1^{\nu} m_2^{\nu} n_1^{\nu} n_2} \\ & \quad = C \cdot \vartheta\,(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')_{\mathfrak{q}'\,\mathfrak{p}'\,\mathfrak{m}'\,\mathfrak{n}'}, \end{aligned}$$

wenn wir mit

$$\vartheta_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

für den Augenblick die Function $\vartheta_{\varkappa}$ bezeichnen, falls $\alpha \equiv m_1^{\varkappa}$, $\beta \equiv m_2^{\varkappa}$, $\gamma \equiv n_1^{\varkappa}$, $\delta \equiv n_2^{\varkappa}$ mod 2, und wenn ausserdem $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ gewisse ganze Zahlen bezeichnen, welche aus den Transformationszahlen des Linearsystems und den Indices m_1^{ν}, m_2^{ν}, n_1^{ν}, n_2^{ν} gerade so zusammengesetzt sind, wie die in Nr. (11) definirten Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ aus ϱ, ϱ', σ, σ' und m_1^{λ}, m_2^{λ}, n_1^{λ}, n_2^{λ}.

Wollen wir nun eine Lineartransformation finden, welche eine ϑ-Function, die den Bedingungen (34) a) genügt, in ϑ_{14} überführt, so muss diese nach Gleichung (35) so beschaffen sein, dass für

$$-m_1^{\nu} = -m_2^{\nu} = n_1^{\nu} = n_2^{\nu} = 1$$

$\mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{n}'$ gerade Zahlen sind, also

$$\mathfrak{m}' \equiv 0, \quad \mathfrak{n}' \equiv 0 \bmod 2.$$

Ebenso müssen für die linearen Ergänzungstransformationen zu den Repräsentantentransformationen

$$\left.\begin{aligned} B \cdot \cdots\cdots\ \mathfrak{p}' &\equiv 0,\ \mathfrak{m}' \equiv 0 \\ C \cdot \cdots\cdots\ \mathfrak{q}' &\equiv 0,\ \mathfrak{n}' \equiv 0 \\ D \cdot \cdots\cdots\ \mathfrak{q}' &\equiv 0,\ \mathfrak{p}' \equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod 2$$

sein.

Ich will nun zeigen, wie man sich leicht Linear-Transformationen, welche diesen Bedingungen genügen, verschaffen kann.

Es ist klar, dass durch Vertauschung der charakteristischen Zahl 2 mit der Zahl 1 in irgend einer unserer 15 Repräsentanten-Transformationen die für ϱ, ϱ', σ, σ' geltenden Bedingungsgleichungen (6) oder (7) mit der rechten Seite 0 *gar nicht*, diejenigen mit der rechten Seite 2 nur insofern geändert werden, dass diese rechte Seite den

Werth 1 annimmt, d. h. das System der Transformationszahlen geht auf diese Weise in ein lineares über.

Führen wir dieses Verfahren an den Repräsentanten C und D aus, indem wir gleichzeitig $i = 1$, $i' = 0$, $i'' = 0$ setzen, so ergeben sich die beiden Linearsysteme:

$$\left|\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \quad \text{für welches} \quad \begin{cases} \mathfrak{m}' = n_1^{\nu} + n_2^{\nu} \\ \mathfrak{n}' = n_2^{\nu} \\ \mathfrak{p}' = m_2^{\nu} - m_1^{\nu} \\ \mathfrak{q}' = m_1^{\nu} \end{cases}$$

und

$$\left|\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \quad \text{für welches} \quad \begin{cases} \mathfrak{m}' = n_1^{\nu} + m_2^{\nu}, \\ \mathfrak{n}' = n_2^{\nu} + m_1^{\nu}, \\ \mathfrak{p}' = m_2^{\nu}, \\ \mathfrak{q}' = m_1^{\nu}. \end{cases}$$

Das erste von diesen liefert für

$$\nu = 14 \text{ oder } -m_1^{\nu} = -m_2^{\nu} = n_1^{\nu} = n_2^{\nu} = 1$$

die Beziehung

$$\mathfrak{m}' \equiv \mathfrak{p}' \equiv 0 \pmod 2,$$

ist somit von derjenigen Beschaffenheit, wie sie für die Combination mit den Repräsentanten B geeignet ist; das zweite giebt

$$\mathfrak{m}' \equiv \mathfrak{n}' \equiv 0 \pmod 2,$$

ist somit das gesuchte Linearsystem für den Repräsentanten A.

Beachtet man ferner, dass in Folge der symmetrischen Form der für die Transformationszahlen geltenden Bedingungsgleichungen deren Gültigkeit nicht alterirt wird, wenn man

$$\left.\begin{array}{l} \varrho_{\alpha\beta} \text{ mit } \sigma'_{\alpha\beta} \\ \varrho'_{\alpha\beta} \text{ mit } \sigma_{\alpha\beta} \end{array}\right\} \text{ und umgekehrt}$$

vertauscht, dass aber ausserdem durch eine solche Transposition die Grössen

$$\mathfrak{m}', \mathfrak{n}', \mathfrak{p}', \mathfrak{q}' \text{ für } -m_1^{\nu} = -m_2^{\nu} = n_1^{\nu} = n_2^{\nu} = 1$$

der Reihe nach übergehen in

$$\mathfrak{q}', \mathfrak{p}', \mathfrak{m}', \mathfrak{n}',$$

so folgt, dass die beiden Systeme:

$$\left|\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right| \quad \text{und} \quad \left|\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right|,$$

welche durch die erwähnte Transposition aus den obigen linearen Transformationssystemen entstehen, ebenfalls lineare Transformationen liefern müssen, und dass sie ausserdem die Bedingungen erfüllen:

$$\mathfrak{q}' \equiv \mathfrak{m}' \equiv 0 \pmod 2 \text{ und } \mathfrak{q}' \equiv \mathfrak{p}' \equiv 0 \pmod 2 \quad (\text{für } \nu = 14),$$

d. h. es sind dies die zu C und D gehörigen linearen Transformationen.

Combinirt man jetzt die eben gefundenen vier Linearsysteme

$$(36) \quad \left|\begin{matrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} 1&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&0&1 \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} 1&0&0&0\\ -1&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&1&1 \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&1&0\\ 0&1&0&1 \end{matrix}\right|$$

der Reihe nach mit den 15 Repräsentanten:

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \left|\begin{matrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&2&0\\ 0&0&0&2 \end{matrix}\right| & \left|\begin{matrix} 1&0&0&0\\ 0&2&i&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&2 \end{matrix}\right| & \left|\begin{matrix} 2i&0&i'\\ 0&1&0\\ 0&0&2\\ 0&0&0 \end{matrix}\right. & \left|\begin{matrix} 2&0&i&i'\\ 0&2&i''&i\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{matrix}\right| \end{array},$$

so ergeben sich die folgenden 15 Transformationssysteme zweiten Grades:

$$(37) \quad \begin{array}{cccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\ \left|\begin{matrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&2&0\\ 0&0&0&2 \end{matrix}\right| & \left|\begin{matrix} 1&1&0&0\\ 0&2&i&-i\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&0&2 \end{matrix}\right| & \left|\begin{matrix} 2-i&i&i'&i'\\ -1&1&0&0\\ 0&0&2-i&-i\\ 0&0&1&1 \end{matrix}\right| & \left|\begin{matrix} 2+i&i'&i&i'\\ i''&2+i&i''&i\\ 1&0&1&0\\ 0&1&0&1 \end{matrix}\right| \end{array}$$

für welche die Zahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ die folgenden Werthe haben:

I.

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= n_1^{\lambda} + m_2^{\lambda}, \\ \mathfrak{n} &= n_2^{\lambda} + m_1^{\lambda}, \\ \mathfrak{p} &= 2m_2^{\lambda}, \\ \mathfrak{q} &= 2m_1^{\lambda}, \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= n_1^{\lambda} + n_2^{\lambda}, \\ \mathfrak{n} &= 2n_2^{\lambda} + i\,(m_2^{\lambda} - m_1^{\lambda}), \\ \mathfrak{p} &= m_2^{\lambda} - m_1^{\lambda}, \\ \mathfrak{q} &= 2m_1^{\lambda}, \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m} &= 2n_1^{\lambda} + i(n_2^{\lambda} - n_1^{\lambda}) + i'(m_2^{\lambda} + m_1^{\lambda} + 2),\\
\mathfrak{n} &= -n_1^{\lambda} + n_2^{\lambda},\\
\mathfrak{p} &= 2m_2^{\lambda} - i(m_2^{\lambda} + m_1^{\lambda}),\\
\mathfrak{q} &= m_2^{\lambda} + m_1^{\lambda},
\end{aligned}$$

IV.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m} &= 2n_1^{\lambda} + i(n_1^{\lambda} + m_2^{\lambda} + 2i') + i'(n_2^{\lambda} + m_1^{\lambda} + 2),\\
\mathfrak{n} &= 2n_2^{\lambda} + i''(n_1^{\lambda} + m_2^{\lambda} + 2) + i(n_2^{\lambda} + m_1^{\lambda} + i''),\\
\mathfrak{p} &= n_1^{\lambda} + m_2^{\lambda},\\
\mathfrak{q} &= n_2^{\lambda} + m_1^{\lambda},
\end{aligned}$$

so dass für

$$-m_1^{\lambda} = -m_2^{\lambda} = n_1^{\lambda} = n_2^{\lambda} = 1$$

$\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sämmtlich gerade Zahlen (gleichgültig ob i, i', i'' die Werthe 0 oder 1 haben) und mithin $\Pi_{14}(v_1, v_2)$ sich als Summe von vier ϑ-Quadraten darstellen lässt.

Von diesen 15 Transformationen zweiten Grades sind nicht irgend zwei durch lineare Transformation aus einander herzuleiten, da ja jede von ihnen aus einem anderen Repräsentanten durch lineare Transformation hervorgegangen ist, und somit jede einer anderen von den 15 nicht äquivalenten Classen angehört.

Sollen nun die ϑ-Functionen eines gegebenen hyperelliptischen Systems durch eine der obigen 15 Transformationen in Producte elliptischer ϑ-Functionen sich transformiren lassen, so müssen, vermöge der Bedingungsgleichung

$$\tau_{12}' = 0$$

und der hieraus resultirenden

$$\Pi_{14}(0,0) = 0 = (\alpha)\,\vartheta_\alpha^2 + (\beta)\,\vartheta_\beta^2 + (\gamma)\,\vartheta_\gamma^2 + (\delta)\,\vartheta_\delta^2$$

(nebst ähnlichen durch Substitutionen hergeleiteten), sowohl zwischen den ϑ-Moduln als auch zwischen den Integralmoduln jenes Systems bestimmte Beziehungen stattfinden. Es sind dies für die einzelnen Transformationen die folgenden:

I.

$$2\tau_{12} + \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 = 0 \qquad \varkappa^2 = \lambda^2\mu^2$$

II.

a) $i = 0$ $\qquad \tau_{11} + 2\tau_{12} = 0 \qquad \varkappa^2 - \lambda^2 = \mu^2(1 - \lambda^2)$

b) $i = 1$ $\qquad \tau_{11} + 2\tau_{12} - (\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2) = 0 \qquad \varkappa^2(1 - \mu^2) = \lambda^2(\varkappa^2 - \mu^2)$

III.

a) $i=0$ $i'=0$	$2\tau_{12}-\tau_{22}=0$	$\mu^2=\varkappa^2\lambda^2$
b) $i=0$ $i'=1$	$2\tau_{12}-\tau_{22}+\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2=0$	$\lambda^2=\varkappa^2\mu^2$
c) $i=1$ $i'=0$	$\tau_{11}-\tau_{22}=0$	$\varkappa^2-\lambda^2=\lambda^2(\varkappa^2-\mu^2)$
d) $i=1$ $i'=1$	$\tau_{11}-\tau_{22}+\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2=0$	$\varkappa^2-\mu^2=\mu^2(\varkappa^2-\lambda^2)$

IV.

a) $i=0$ $i'=0$ $i''=0$	$2\tau_{12}=1$	$\lambda^2-\mu^2=-\varkappa^2(1-\lambda^2)$
b) $i=0$ $i'=0$ $i''=1$	$2\tau_{12}+\tau_{22}=1$	$\mu^2(1-\lambda^2)=-\varkappa^2(\lambda^2-\mu^2)$
c) $i=0$ $i'=1$ $i''=0$	$\tau_{11}+2\tau_{12}=1$	$\lambda^2-\mu^2=\mu^2(1-\varkappa^2)$
d) $i=0$ $i'=1$ $i''=1$	$\tau_{11}+2\tau_{12}+\tau_{22}-(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12})^2=1$	$\lambda^2(\varkappa^2-\mu^2)=\varkappa^2(1-\lambda^2)$
e) $i=1$ $i'=0$ $i''=0$	$4\tau_{12}+3(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2)=1$	$\lambda^2-\mu^2=\lambda^2(\varkappa^2-\mu^2)$
f) $i=1$ $i'=0$ $i''=1$	$4\tau_{12}+\tau_{22}+3(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2)=1$	$\varkappa^2-\mu^2=\varkappa^2(\lambda^2-\mu^2)$
g) $i=1$ $i'=1$ $i''=0$	$\tau_{11}+4\tau_{12}+3(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2)=1$	$\lambda^2-\mu^2=-\mu^2(\varkappa^2-\lambda^2)$
h) $i=1$ $i'=1$ $i''=1$	$\tau_{11}+4\tau_{12}+\tau_{22}+2(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2)=1$	$\varkappa^2-\lambda^2=-\varkappa^2(\lambda^2-\mu^2)$.

Ich will den Fall, dass

$$\mu^2=\varkappa^2\lambda^2,$$

hier vollständig durchführen und könnte hierzu offenbar die Transformation III. a) benützen. Da dieselbe indessen auf andere algebraische Beziehungen führt, als die von Jacobi gegebenen, so wähle ich lieber eine aus III. a) durch eine lineare Transformation abgeleitete, nämlich diejenige, welche entsteht aus der Combination von

$$\begin{vmatrix} 2&0&0&0\\ -1&1&0&0\\ 0&0&2&0\\ 0&0&1&1 \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&1&0\\ 0&1&0&1 \end{vmatrix},$$

deren Transformationszahlen also enthalten sind in dem Schema:

$$(38)\quad \begin{vmatrix} 2&0&0&0\\ -1&1&0&0\\ 2&0&0&0\\ 1&1&1&1 \end{vmatrix}, \text{ d. h.: } \begin{cases} \varrho_{11}=1, & \varrho_{12}=1, & \sigma_{11}=0, & \sigma_{12}=0,\\ \varrho_{21}=0, & \varrho_{22}=2, & \sigma_{21}=0, & \sigma_{22}=0,\\ \varrho_{11}'=-1, & \varrho_{21}'=-1, & \sigma_{11}'=0, & \sigma_{12}'=0,\\ \varrho_{21}'=-2, & \varrho_{22}'=0, & \sigma_{21}'=0, & \sigma_{22}'=0. \end{cases}$$

Man findet hieraus zunächst:

$$(39)\quad \begin{cases} \mathfrak{m}=2n_1^\lambda,\\ \mathfrak{n}=-n_1^\lambda+n_2^\lambda,\\ \mathfrak{p}=2n_1^\lambda+2m_2^\lambda,\\ \mathfrak{q}=n_1^\lambda+n_2^\lambda+m_1^\lambda+m_2^\lambda+2, \end{cases}$$

woraus sich ergiebt, dass $\Pi_{14}(v_1, v_2)$ und ausserdem noch $\Pi_5(v_1, v_2)$, $\Pi_0(v_1, v_2)$, $\Pi_{23}(v_1, v_2)$ sich als Summen von vier ϑ-Quadraten darstellen lassen.

Man hat ferner:

$$\omega_{11}=1, \quad \omega_{21}=0, \quad \omega_{11}'=-1+2\tau_{11}-\tau_{12}, \quad \omega_{21}'=-2+2\tau_{12}-\tau_{22},$$
$$\omega_{12}=1, \quad \omega_{22}=2, \quad \omega_{12}'=-1+\tau_{12}, \quad \omega_{22}'=\tau_{22},$$

und es ergiebt demnach die Bedingung (33ª) oder (33ᵇ) die Gleichung

$$\tau_{12}'=\tau_{21}'=-1+\tau_{12}-\tfrac{1}{2}\tau_{22}=0,$$

oder

$$2\tau_{12}-\tau_{22}=2, \tag{40}$$

während die beiden anderen transformirten Moduln, sowie die transformirten Argumente die Werthe haben:

$$\begin{cases} \tau_{11}'=-1+2\tau_{11}-\tau_{12}, & \tau_{22}'=\tfrac{1}{2}\tau_{22}=\tau_{12}-1, \\ v_1'=2v_1-v_2, & v_2'=v_2. \end{cases} \tag{41}$$

Setzen wir nun

$$\Pi_{14}(v_1, v_2)=(\alpha)\vartheta_5^2(v_1, v_2)+(\beta)\vartheta_1^2(v_1, v_2)+(\gamma)\vartheta_3^2(v_1, v_2)+(\delta)\vartheta_{13}^2(v_1, v_2),$$

so folgt zunächst für $v_1=v_2=0$

$$\Pi_{14}(0, 0)=0=(\alpha)\vartheta_5^2 \text{ und mithin } (\alpha)=0$$

(da ϑ_5 nicht verschwinden kann, denn sonst wäre das vorgelegte System bereits durch diejenige Lineartransformation in ein elliptisches transformirbar, welche $\vartheta_5(v_1, v_2)$ in $\vartheta_{14}(v_1', v_2')$ überführt). Man kann daher setzen:

$$\text{42) a) } \Pi_{14}(v_1, v_2)=(\beta)\vartheta_1^2(v_1, v_2)+(\gamma)\vartheta_3^2(v_1, v_2)+(\delta)\vartheta_{13}^2(v_1, v_2),$$

und diese Gleichung liefert vermöge der Substitutionen:

$$\begin{array}{lll} v_1-\tfrac{1}{2}, & v_1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau_{12}, & v_1+\tfrac{1}{2}\tau_{12}, \\ v_2, & v_2+\tfrac{1}{2}\tau_{22}, & v_2+\tfrac{1}{2}\tau_{22}, \end{array}$$

welche den Index der linken Seite nicht ändern, noch die folgenden drei:

$$\begin{cases} \text{b)} & -\Pi_{14}(v_1, v_2)=(\beta)\vartheta_2^2(v_1, v_2)+(\gamma)\vartheta_{04}^2(v_1, v_2)+(\delta)\vartheta_{23}^2(v_1, v_2), \\ \text{c)} & -\Pi_{14}(v_1, v_2)=(\beta)\vartheta_{24}^2(v_1, v_2)-(\gamma)\vartheta_0^2(v_1, v_2)+(\delta)\vartheta_{01}^2(v_1, v_2), \\ \text{d)} & \Pi_{14}(v_1, v_2)=-(\beta)\vartheta_{14}^2(v_1, v_2)-(\gamma)\vartheta_{34}^2(v_1, v_2)+(\delta)\vartheta_{02}^2(v_1, v_2). \end{cases} \tag{42}$$

Setzt man $v_1=v_2=0$, so liefert das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} \vartheta_2^2 & \vartheta_{04}^2 & \vartheta_{23}^2 \\ -\vartheta_{24}^2 & -\vartheta_0^2 & \vartheta_{01}^2 \\ -\vartheta_{14}^2 & -\vartheta_{34}^2 & \vartheta_{02} \end{vmatrix}$$

die Bedingung

$$-\vartheta_2^2\,\vartheta_{01}^2\,\vartheta_{34}^2+\vartheta_0^2\,\vartheta_{23}^2\,\vartheta_{14}^2=0,$$

oder:

$$\mu^2=\varkappa^2\lambda^2,$$

während sich die Quotienten der unbekannten Coefficienten aus Gleichung (42) b) und c) in der Form ergeben:

$$\frac{(\beta)}{(\delta)}=-\frac{\vartheta_{23}^2}{\vartheta_2^2},\quad \frac{(\gamma)}{(\delta)}=\frac{\vartheta_{01}^2}{\vartheta_0^2},$$

so dass wir setzen können:

$$\begin{aligned}(43)\quad \Pi_{14}(v_1,v_2)&=e^{-f(v_1,v_2)\pi i}\,\vartheta_1(v_1',\tau_{11}')\,\vartheta_1(v_2',\tau_{22}')\\&=C\{-\vartheta_0^2\vartheta_{23}^2\vartheta_1^2(v_1,v_2)+\vartheta_2^2\vartheta_{01}^2\vartheta_3^2(v_1,v_2)\\&\qquad+\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_{13}^2(v_1,v_2)\},\end{aligned}$$

wo C eine Constante bedeutet.

Durch Anwendung der Substitutionen:

$$\begin{array}{lll} v_1, & v_1+\tfrac{1}{2}\tau_{11}, & v_1+\tfrac{1}{2}\tau_{11},\\ v_2-\tfrac{1}{2}, & v_2+\tfrac{1}{2}\tau_{21}, & v_2-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau_{21},\end{array}$$

denen die folgenden Werthe der transformirten Argumente entsprechen:

$$\begin{array}{lll} v_1'+\tfrac{1}{2}, & v_1'+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau_{11}', & v_1'+1+\tfrac{1}{2}\tau_{11}',\\ v_2'-\tfrac{1}{2}, & v_2'+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau_{22}', & v_2'+\tfrac{1}{2}\tau_{22}',\end{array}$$

ergeben sich aus Gleichung (43) die folgenden drei:

$$\begin{aligned}(44)\quad \Pi_{23}(v_1,v_2)&=e^{-f(v_1,v_2)\pi i}\vartheta_2(v_1',\tau_{11}')\,\vartheta_2(v_2',\tau_{22}')\\&=C\{\vartheta_0^2\vartheta_{23}^2\vartheta_{02}^2(v_1,v_2)-\vartheta_2^2\vartheta_{01}^2\vartheta_4^2(v_1,v_2)\\&\qquad-\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_{14}^2(v_1,v_2)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(45)\quad \Pi_5(v_1,v_2)&=e^{-f(v_1,v_2)\pi i}\vartheta_3(v_1',\tau_{11}')\,\vartheta_3(v_2',\tau_{22}')\\&=C\{\vartheta_0^2\vartheta_{23}^2\vartheta_0^2(v_1,v_2)+\vartheta_2^2\vartheta_0^2\vartheta_{24}^2(v_1,v_2)\\&\qquad-\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_{03}^2(v_1,v_2)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(46)\quad \Pi_0(v_1,v_2)&=e^{-f(v_1,v_2)\pi i}\vartheta_0(v_1',\tau_{11}')\,\vartheta_0(v_2',\tau_{22}')\\&=C\{\vartheta_0^2\vartheta_{23}^2\vartheta_{12}^2(v_1,v_2)+\vartheta_2^2\vartheta_0^2\vartheta_{23}^2(v_1,v_2)\\&\qquad-\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_{01}^2(v_1,v_2)\},\end{aligned}$$

Setzen wir hierin $v_1=v_2=0$, wodurch auch $v_1'=v_2'=0$ wird, und bezeichnen

$$\begin{aligned}&\vartheta_\lambda(0,\tau_{11}') \text{ mit } \vartheta_\lambda',\\&\vartheta_\lambda(0,\tau_{22}') \text{ mit } \vartheta_\lambda'',\end{aligned}$$

so erhalten wir folgende drei Gleichungen:

$$(47)\quad \vartheta_2'\cdot\vartheta_2''=-C(\vartheta_2^2\{\vartheta_{01}^2\vartheta_4^2+\vartheta_0^2\vartheta_{14}^2\})=-C\cdot\vartheta_2^2\vartheta_5^2\vartheta_{23}^2,$$

$$(48)\quad \vartheta_3'\cdot\vartheta_3''=C(\vartheta_0^2\{\vartheta_0^2\vartheta_{23}^2-\vartheta_2^2\vartheta_{03}^2\})=C\cdot\vartheta_0^2\vartheta_5^2\vartheta_{14}^2,$$

$$(49)\quad \vartheta_0'\cdot\vartheta_0''=C(\vartheta_{23}^2\{\vartheta_0^2\vartheta_{12}^2-\vartheta_2^2\vartheta_{01}^2\})=C\cdot\vartheta_5^2\vartheta_{23}^2\vartheta_{31}^2,$$

aus denen sich die Moduln der transformirten Integrale (sowie auch die Constante C) bestimmen lassen. Setzen wir nämlich:

$$(50)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} = u_1' = 2Cv_1', \\ \displaystyle C = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}}, \quad C+iC' = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}}, \\ \tau_{11}' = \dfrac{iC'}{C}, \\ \displaystyle\int_0^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = u_2' = 2Lv_2', \\ \displaystyle L = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}, \quad L+iL' = \int_0^{\frac{1}{l}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}, \\ \tau_{22}' = \dfrac{iL'}{L}, \end{cases}$$

so ist:

$$(51)\quad \begin{cases} y_1 = sn(u_1', c) = \dfrac{1}{\sqrt{c}} \dfrac{\vartheta_1(v_1', \tau_{11}')}{\vartheta_0(v_1', \tau_{11}')}, \\ \sqrt{1-y_1^2} = cn(u_1', c) = \dfrac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c}} \dfrac{\vartheta_2(v_1', \tau_{11}')}{\vartheta_0(v_1', \tau_{11}')}, \\ \sqrt{1-c^2y_1^2} = dn(u_1', c) = \sqrt{c_1} \dfrac{\vartheta_3(v_1', \tau_{11}')}{\vartheta_0(v_1', \tau_{11}')}, \\ \sqrt{c} = \dfrac{\vartheta_2'}{\vartheta_3'}, \quad \sqrt{c_1} = \dfrac{\vartheta_0'}{\vartheta_3'}, \quad (c^2 + c_1^2 = 1); \\ y_2 = sn(u_2', l) = \dfrac{1}{\sqrt{l}} \dfrac{\vartheta_1(v_2', \tau_{22}')}{\vartheta_0(v_2', \tau_{22}')}, \\ \sqrt{1-y_2^2} = cn(u_2', l) = \dfrac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l}} \dfrac{\vartheta_2(v_2', \tau_{22}')}{\vartheta_0(v_2', \tau_{22}')}, \\ \sqrt{(1-l^2y_1)} = dn(u_2', l) = \sqrt{l_1} \dfrac{\vartheta_3(v_2', \tau_{22}')}{\vartheta_0(v_2', \tau_{22}')}, \\ \sqrt{l} = \dfrac{\vartheta_2''}{\vartheta_3''}, \quad \sqrt{l_1} = \dfrac{\vartheta_0''}{\vartheta_3''}, \quad (l^2 + l_1^2 = 1). \end{cases}$$

Dividirt man jetzt die Gleichungen (47) und (48) durch Gleichung (49), so ergeben sich für die transformirten Integralmoduln die folgenden Beziehungen:

$$(52)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_2' \cdot \vartheta_2''}{\vartheta_3' \cdot \vartheta_3''} = \sqrt{cl} = -\dfrac{\vartheta_2^2\, \vartheta_{31}^2}{\vartheta_0^2\, \vartheta_{14}^2} = \dfrac{-\sqrt{\varkappa^2\lambda^2}}{\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\lambda^2)}}, \\ \dfrac{\vartheta_0' \cdot \vartheta_0''}{\vartheta_3' \cdot \vartheta_3''} = \sqrt{c_1 l_1} = \dfrac{\vartheta_{22}^2\, \vartheta_{34}^2}{\vartheta_0^2\, \vartheta_{14}^2} = \dfrac{\sqrt{1-\varkappa^2\lambda^2}}{\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\lambda^2)}}, \end{cases}$$

woraus:

$$(53)\quad \begin{cases} c = \dfrac{i(\lambda \pm \varkappa)}{\varkappa_1 \lambda_1}, & l = \dfrac{i(\lambda \mp \varkappa)}{\varkappa_1 \lambda_1}, \\ c_1 = \dfrac{1 \pm \varkappa\lambda}{\varkappa_1 \lambda_1}, & l_1 = \dfrac{1 \mp \varkappa\lambda}{\varkappa_1 \lambda_1}, \end{cases} \quad \text{wo:} \quad \begin{cases} \varkappa_1 = \sqrt{1-\varkappa^2}, \\ \lambda_1 = \sqrt{1-\lambda^2}. \end{cases}$$

Um nun auch die durch die Transformation resultirenden algebraischen Beziehungen der Integralgrenzen herzustellen, setzen wir noch:

$$(54)\quad \begin{cases} \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u_1 = 2K_{11}v_1 + 2K_{12}v_2, \\ \int_0^{x_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} = u_2 = 2K_{21}v_1 + 2K_{22}v_2, \end{cases}$$

wo:

$$R(x) = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\varkappa^2\lambda^2 x).$$

Hierbei haben wir — wegen der später anzustellenden Vergleichung mit den Resultaten Jacobi's — dem ersten Integrale in beiden Gleichungen die untere Grenze 0 gegeben, während die von Herrn Weierstrass herrührenden Definitionen der Abel'schen Functionen an dieser Stelle die untere Grenze $\frac{1}{\lambda^2}$ erheischen. Sei daher ferner:

$$(55)\quad \begin{cases} \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \mathfrak{u}_1 = 2K_{11}\mathfrak{v}_1 + 2K_{12}\mathfrak{v}_2, \\ \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{x_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \mathfrak{u}_2 = 2K_{21}\mathfrak{v}_1 + 2K_{22}\mathfrak{v}_2, \end{cases}$$

so lassen sich die bekannten symmetrischen Ausdrücke $\sqrt{x_1 x_2}$, $\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}$ u. s. w., unmittelbar nach den Definitionsgleichungen der Abel'schen Functionen durch $\vartheta_\alpha(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2)$, $\vartheta_\beta(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2)$ etc., darstellen*). Nun ist aber nach Gleichung (54) und (55):

$$\mathfrak{u}_1 = u_1 + \int_\infty^0 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} - \int_\infty^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u_1 + K_{11} + K_{12} - iK_{11}' + iK_{12}',$$

$$\mathfrak{u}_2 = u_2 + \int_\infty^0 \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} - \int_\infty^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} = u_2 + K_{21} + K_{22} - iK_{21}' + iK_{22}',$$

woraus sich ergiebt:

$$(56)\quad \begin{cases} v_1 = \mathfrak{v}_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau_{11} - \frac{1}{2}\tau_{12}, \\ v_2 = \mathfrak{v}_2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau_{21} - \frac{1}{2}\tau_{22}. \end{cases}$$

*) Siehe z. B.: Crelle's Journal Bd. 64.

Wir dividiren jetzt jede der drei Gleichungen (43), (44), (45) durch Gleichung (46) und führen zugleich statt der Argumente v_1, v_2 gemäss den Gleichungen (56) die Argumente $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ ein. Alsdann ergiebt sich, wenn wir noch die aus ϑ-Functionen (für die Nullwerthe der Argumente) zusammengesetzten Coefficienten durch $\varkappa$ und λ ausdrücken, wobei wir

$$\sqrt{1-\varkappa^2\lambda^2} = (\varkappa\lambda)_1\,, \qquad \sqrt{\varkappa^2-\lambda^2} = \lambda_\varkappa$$

setzen:

$$(57)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_1(v_1',\tau_{11}')\vartheta_1(v_2',\tau_{22}')}{\vartheta_0(v_1',\tau_{11}')\vartheta_0(v_2',\tau_{22}')} = \dfrac{-(\varkappa\lambda)_1\vartheta_4^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)-\lambda_\varkappa\vartheta_{02}^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)-\varkappa_1\lambda_1\vartheta_{34}^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)}{-(\varkappa\lambda)_1\vartheta_{24}^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)+\lambda_\varkappa\vartheta_0^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)-\varkappa_1\lambda_1\vartheta_{01}^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)} = \dfrac{Z_1}{N}, \\ \dfrac{\vartheta_2(v_1',\tau_{11}')\vartheta_2(v_2',\tau_{22}')}{\vartheta_0(v_1',\tau_{11}')\vartheta_0(v_2',\tau_{22}')} = \dfrac{(\varkappa\lambda)_1\vartheta_3^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)-\lambda_\varkappa\vartheta_1^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)-\varkappa_1\lambda_1\vartheta_3^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)}{-(\varkappa\lambda)_1\vartheta_{24}^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)+\lambda_\varkappa\vartheta_0^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)-\varkappa_1\lambda_1\vartheta_{01}^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)} = \dfrac{Z_2}{N}, \\ \dfrac{\vartheta_3(v_1',\tau_{11}')\vartheta_3(v_2',\tau_{22}')}{\vartheta_0(v_1',\tau_{11}')\vartheta_0(v_2',\tau_{22}')} = \dfrac{(\varkappa\lambda)_1\vartheta_{23}^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)-\lambda_\varkappa\vartheta_{12}^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)+\varkappa_1\lambda_1\vartheta_2^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)}{-(\varkappa\lambda)_1\vartheta_{24}^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)+\lambda_\varkappa\vartheta_0^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)-\varkappa_1\lambda_1\vartheta_{01}^2(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)} = \dfrac{Z_3}{N}. \end{cases}$$

Die algebraischen Ausdrücke für die linken Seiten ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen (51), während diejenigen für die rechten Seiten in den folgenden Gleichungen enthalten sind:

$$(58)\quad \begin{cases} N = \dfrac{1}{\varkappa_1\lambda_1(\varkappa\lambda)_1\lambda_\varkappa(x_1-x_2)^2}\Big\{ (\varkappa\lambda)_1^2[(1-x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\varkappa^2\lambda^2x_1)\cdot x_2(1-\varkappa^2x_2) \\ \quad +(1-x_2)(1-\lambda^2x_2)(1-\varkappa^2\lambda^2x_2)\cdot x_1(1-\varkappa^2x_1)] \\ -\varkappa_1^2\lambda^2[x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)\cdot(1-\lambda^2x_2)(1-\varkappa^2\lambda^2x_2) \\ \quad +x_2(1-x_2)(1-\varkappa^2x_2)\cdot(1-\lambda^2x_1)(1-\varkappa^2\lambda^2x_1)] \\ +\lambda_\varkappa^2(1-\varkappa^2\lambda^2x_1)(1-\varkappa^2\lambda^2x_2)(x_1-x_2)^2 \\ -2\lambda_1^2\sqrt{R(x_1)}\,\sqrt{R(x_2)}\Big\} \\ Z_1 = \dfrac{1}{\varkappa_1^2(\varkappa\lambda)_1(x_1-x_2)^2}\Big\{ \varkappa^2[x_1(1-x_1)(1-\lambda^2x_1)\cdot(1-\varkappa^2x_2)(1-\varkappa^2\lambda^2x_2) \\ \quad +x_2(1-x_2)(1-\lambda^2x_2)\cdot(1-\varkappa^2x_1)(1-\varkappa^2\lambda^2x_1)] \\ +\varkappa_1^2[(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\varkappa^2\lambda^2x_1)\cdot x_2(1-x_2) \\ \quad +(1-\varkappa^2x_2)(1-\lambda^2x_2)(1-\varkappa^2\lambda^2x_2)\cdot x_1(1-x_1)] \\ -\varkappa^2\varkappa_1^2\lambda^2(\varkappa\lambda)_1^2x_1x_2(x_1-x_2)^2-2\sqrt{R(x_1)}\,\sqrt{R(x_2)}\Big\} \\ Z_2 = -\dfrac{1}{\varkappa_1\lambda_1}\Big\{\varkappa^2\lambda^2(1-x_1)(1-x_2)+\varkappa^2(1-\lambda^2x_1)(1-\lambda^2x_2)-\varkappa_1^2\lambda_1^2\Big\}, \\ Z_3 = \dfrac{1}{\varkappa_1^2\lambda_1^2\lambda_\varkappa^2(x_1-x_2)^2}\Big\{ \varkappa_1^2[x_1(1-\lambda^2x_1)(1-\varkappa^2\lambda^2x_1)\cdot(1-x_2)(1-\varkappa^2x_2) \\ \quad +x_2(1-\lambda^2x_2)(1-\varkappa^2\lambda^2x_2)\cdot(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)] \\ +\lambda_\varkappa^2[x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2\lambda^2x_1)\cdot(1-\varkappa^2x_2)(1-\lambda^2x_2) \\ \quad +x_2(1-x_2)(1-\varkappa^2\lambda^2x_2)\cdot(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)] \\ -\varkappa_1^2\lambda_1^2\lambda^2(1-\varkappa^2x_1)(1-\varkappa^2x_2)(x_1-x_2)^2 \\ -2\lambda_1^2\sqrt{R(x_1)}\,\sqrt{R(x_2)}\Big\} \end{cases}$$

Wir wollen jetzt $x_2 = 1$ setzen. Dann gehen zunächst die Gleichungen (54) — wenn wir noch statt x_1 nur x schreiben — in die folgenden über:

$$(59)\qquad \begin{cases} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u_1 = 2K_{11}v_1 + 2K_{12}v_2, \\ \int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} = u_2 = 2K_{21}v_1 + 2K_{22}v_2, \end{cases}$$

während die Gleichungen (57) und (58) die algebraischen Beziehungen liefern:

$$\sqrt{cl}\; y_1 y_2 = \frac{\varkappa_1 \lambda_1 \lambda_\varkappa x}{(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)},$$

$$\frac{\sqrt{cl}}{\sqrt{c_1 l_1}}\sqrt{(1-y_1^2)(1-y_2^2)} = -\frac{\lambda_\varkappa (1-x)(1-\varkappa^2\lambda^2 x)}{(\varkappa\lambda)_1 (1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{c_1 l_1}}\sqrt{(1-c^2 y_1)(1-l^2 y_2)} = \frac{\varkappa_1 \lambda_1 (1-\varkappa^2\lambda^2 x^2)}{(\varkappa\lambda)_1 (1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)},$$

oder mit Berücksichtigung von (52):

$$(60)\qquad \begin{cases} y_1 y_2 = -\frac{\varkappa_1^2 \lambda_1^2 x}{(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)}, \\ \sqrt{(1-y_1^2)(1-y_2^2)} = \frac{(1-x)(1-\varkappa^2\lambda^2 x)}{(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)}, \\ \sqrt{(1-c^2 y_1)(1-b^2 y_1)} = \frac{1-\varkappa^2\lambda^2 x^2}{(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)}. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten der Gleichungen (60) folgt aber:

$$(y_1+y_2)^2 = \frac{(1-\varkappa^2 x)^2(1-\lambda^2 x)^2 + (1-\varkappa^2)^2(1-\lambda^2)^2 x^2 - (1-x)^2(1-\varkappa^2\lambda^2 x)^2 - 2(1-\varkappa^2)(1-\lambda^2)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)x}{(1-\varkappa^2 x)^2(1-\lambda^2 x)^2},$$

folglich:

$$(y_1+y_2) = 0, \text{ d. h. } y_1 = -y_2.$$

Setzen wir daher

$$y_1 = y, \quad y_2 = -y,$$

so wird zunächst aus Gleichung (50):

$$(61)\qquad \begin{cases} u_1' = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} = 2Cv_1', \\ u_2' = \int_0^{-y} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = -\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y)}} = 2Lv_2', \end{cases}$$

während die algebraischen Beziehungen (60) die Form annehmen:

$$(62)\quad \begin{cases} y^2 = + \dfrac{\varkappa_1^2 \lambda_1^2 x}{(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)}, \\ 1-y^2 = \dfrac{(1-x)(1-\varkappa^2\lambda^2 x)}{(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)}, \\ \sqrt{(1-c^2 y)(1-l^2 y)} = \dfrac{1-\varkappa^2\lambda^2 x^2}{(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)}. \end{cases}$$

Es bleibt jetzt nur noch die Relation zwischen den Integralen u_1, u_2 und u_1', u_2' festzustellen. Aus Gleichung (59) folgt mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$v_1 = \tfrac{1}{2}(v_1' + v_2') = \tfrac{1}{2}\left(\frac{u_1'}{2C} + \frac{u_2'}{2L}\right) \text{ und } v_2 = v_2' = \frac{u_2'}{2L}:$$

$$(63)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{K_{11}}{2C} u_1' + \dfrac{K_{11}+2K_{12}}{2L} u_2', \\ u_2 = \dfrac{K_{21}}{2C} u_1' + \dfrac{K_{21}+2K_{22}}{2L} u_2', \end{cases}$$

oder wenn man die Integrale selbst einsetzt:

$$(64)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{K_{11}}{2C}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} - \frac{K_{11}+2K_{12}}{2L}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(\lambda-l^2y^2}}, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{K_{21}}{2C}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y_2)}} - \frac{K_{21}+2K_2}{2L}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}, \end{cases}$$

Andrerseits findet man aber durch unmittelbares Einsetzen der algebraischen Substitutionen (62):

$$(65)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} = \tfrac{1}{2}\varkappa_1\lambda_1\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} - \tfrac{1}{2}\varkappa\lambda\varkappa_1\lambda_1\int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \\ \displaystyle\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \tfrac{1}{2}\varkappa_1\lambda_1\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \tfrac{1}{2}\varkappa\lambda\varkappa_1\lambda_1\int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \end{cases}$$

(wenn wir in den Ausdrücken für die Moduln (53) jedesmal das obere Zeichen wählen),

oder auch:

$$(66)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{c_1+l_1}{2}\left\{\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}\right\}, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{(c_1+l_1)^2}{2(c_1-l_1)}\left\{\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} - \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}\right\}, \end{cases}$$

so dass sich die Relationen ergeben:

$$\frac{K_{11}}{2C} = -\frac{K_{11}+2K_{12}}{2L} = \frac{c_1+l_1}{2},$$

$$\frac{K_{21}}{2C} = \frac{K_{21}+2K_{22}}{2L} = -\frac{(c_1+l_1)^2}{2(c_1-l_1)},$$

und hieraus:

$$\frac{K_{11}}{K_{21}} = -\frac{K_{11}+2K_{12}}{K_{21}+2K_{22}} = -\varkappa\lambda\,. \tag{67}$$

Ich will schliesslich noch die Resultate, welche Jacobi im 8ten Bande des Crelle'schen Journals gegeben hat, zur Vergleichung hier mittheilen. Sie lauten:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x)(1-x)(1-\varkappa\lambda x)(1+\varkappa x)(1+\lambda x)}} = \frac{b'+c'}{2}\left\{F(b,\varphi)+F(c,\varphi)\right\},$$

$$\int_0^x \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{(1-x)(1-\varkappa\lambda x)(1+\varkappa x)(1+\lambda x)}} = \frac{(c'+b')^2}{2(c'-b')}\left\{F(b,\varphi)-F(c,\varphi)\right\},$$

(wo $F(b,\varphi)$, $F(c,\varphi)$ das elliptische Integral 1ter Gattung in der Legendre'schen Form bedeuten),

$$\sin^2\varphi = \frac{(1+\varkappa)(1+\lambda)x}{(1+\varkappa x)(1+\lambda x)},$$

$$\cos^2\varphi = \frac{(1-x)(1-\varkappa\lambda x)}{(1+\varkappa x)(1+\lambda x)},$$

$$1-b^2\sin^2\varphi = \frac{(1-\sqrt{\varkappa\lambda}\,x)^2}{(1+\varkappa x)(1+\lambda x)},$$

$$1-c^2\sin^2\varphi = \frac{(1+\sqrt{\varkappa\lambda}\,x)}{(1+\varkappa x)(1+\lambda x)},$$

$$b = \frac{\sqrt{\varkappa}+\sqrt{\lambda}}{\sqrt{(1+\varkappa)(1+\lambda)}},\quad b' = \frac{1-\sqrt{\varkappa\lambda}}{\sqrt{(1+\varkappa)(1+\lambda)}},$$

$$c = \frac{\sqrt{\varkappa}-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{(1+\varkappa)(1+\lambda)}},\quad c' = \frac{1+\sqrt{\varkappa\lambda}}{\sqrt{(1+\varkappa)(1+\lambda)}}.$$

Diese Gleichungen sind aber offenbar mit den unsrigen: (66), (62), (53), identisch, wenn wir statt der Jacobi'schen Bezeichnungen:

$$\sqrt{\varkappa},\ \sqrt{\lambda},\ b,\ b',\ c,\ c'$$

der Reihe nach

$$i\lambda,\ i\varkappa,\ c,\ c_1,\ l,\ l_1$$

und ausserdem

$$\sin\varphi = y$$

setzen.

Beuthen O/S., 28. August 1875.

Ueber den Zusammenhang der Flächen.

Von Felix Klein in München.

Die nachstehenden Zeilen haben zunächst den Zweck, einen Fehler zu berichtigen, der sich in einem früheren Aufsatze von mir findet (Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen, diese Annalen VII, p. 549—557) und der dadurch entstanden ist, dass zwei an sich richtige Definitionen stillschweigend als gleichbedeutend behandelt sind, während sie in der That einander widersprechen. Inzwischen sind die Erörterungen, die ich an die Darlegung dieser Unrichtigkeit knüpfe, wie ich glaube, von allgemeinerem Interesse für die Lehre vom Flächenzusammenhang überhaupt.

Um beliebig sich durch das Unendliche erstreckende Flächen, die im projectiven Raume (R_1, Raum mit unendlicher ferner Ebene) vorhanden sind, den Zusammenhangsuntersuchungen zu unterwerfen, gebe ich in der genannten Arbeit (p. 551, 553) das allgemeine Mittel an: den genannten Raum als einen Doppelraum zu betrachten und durch eine einzweideutige Transformation mit dem Raume R_2, der im Unendlichen nur einen Punkt enthält, in Verbindung zu setzen. Einer Fläche in R_1 (deren Bild in R_2 nicht zerfällt) soll diejenige Zusammenhangszahl beigelegt werden, die ihr Bild in R_2 besitzt.

Diese an sich gestattete und vielleicht für weitere Untersuchungen (über dreifach ausgedehnte Gebiete) zweckmässige Feststellung steht im Widerspruche mit einer anderen, in der genannten Arbeit für den speciellen Fall des einschaligen Hyperboloids an zwei Stellen (p. 552, 555) angewandten Methode, die auch in dem folgenden Aufsatze: *Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen* (ebendas. Bd. VII, p. 558—566) festgehalten wurde und in der That festgehalten werden musste*).

Um dies deutlich zu sehen, betrachte man die p. 553 eingeführte Abbildung genauer. Vermöge derselben entsprechen jedem Punkte p_1

*) Vergl.: Weitere Mittheilungen über eine neue Art von Riemann'schen Flächen (Erlanger Berichte, Mai 1874), sowie einen demnächst in diesen Annalen erscheinenden Aufsatz.

des R_1 zwei Punkte p_2 des R_2*). Beschreibt p_1 eine Curve, so jeder der Punkte p_2. Und dabei findet der charakteristische Unterschied statt (man vergl. dazu die ebendort p. 553 besprochene einzweideutige Beziehung zwischen zwei Ebenen):

Ist die Curve, welche p_1 durchläuft, geschlossen, so muss man unterscheiden, ob sie paar oder unpaar ist. Im ersteren Falle durchläuft jeder der beiden Punkte p_2 eine geschlossene Curve und die Curve p_1 ist auf jede der beiden Curven p_2 eindeutig umkehrbar bezogen. Im zweiten Falle aber durchlaufen die beiden Punkte p_2 jeder die Hälfte einer und derselben geschlossenen Curve und die Curve p_1 ist auf diese eine Curve p_2 einzweideutig bezogen.

Bewegt sich jetzt p_1 auf einer geschlossenen Fläche, so ist nachzusehen, ob diese Fläche überhaupt unpaare Curven enthält oder nicht (vergl. diese Annalen Bd. VI, p. 577).

Im letzteren Falle sind die Flächen, die von den beiden Punkten p_2 beschrieben werden, getrennt und jede derselben ist mit der Fläche der p_1 in eine umkehrbar eindeutige Beziehung gesetzt. Durchläuft z. B. p_1 eine Kugel, so beschreibt auch jeder der beiden Punkte p_2 für sich eine Kugel.

Im ersteren Falle dagegen bilden die Flächentheile, welche die beiden Punkte p_2 beschreiben, erst zusammen eine geschlossene Fläche und auf sie ist dann die Fläche p_1 einzweideutig bezogen. Durchläuft z. B. p_1 eine Ebene, so durchlaufen die Punkte p_2 zusammen eine Kugelfläche (jeder für sich die Hälfte); jedem Punkte der Ebene entsprechen zwei Punkte der Kugel. Durchläuft p_1 ein einschaliges Hyperboloid, so erzeugen die p_2 gemeinschaftlich eine Ringfläche, und jedem Punkte des Hyperboloids entsprechen zwei Punkte des Ringes.

Die Meinung war nun die, dass dementsprechend der Ebene p_1 der Zusammenhang der Kugel p_2 beigelegt werden sollte und dem Hyperboloid p_1 der Zusammenhang des Ringes p_2, d. h. nach der von Schläfli vorgeschlagenen Art der Zählung (vergl. meine Arbeit p. 550, Note) der Ebene der Zusammenhang Null, dem Hyperboloide der Zusammenhang Zwei.

Diese Zahlen werden den genannten Flächen in der That in meiner Arbeit beigelegt, aber diese Uebereinstimmung ist, soweit sie das Hyperboloid betrifft, nur eine zufällige. Während nämlich die Ebene und überhaupt alle unpaaren Flächen, wie es nach der seitherigen Festsetzung sein muss, auch weiterhin in meiner Arbeit als *Doppelflächen* betrachtet werden, ist das einschalige Hyperboloid an den

*) In den Formeln:

$$x' = \frac{x}{1 - \lambda(x^2+y^2+z^2)} \text{ etc.}$$

bedeuten x', y', z' die Coordinaten von p_1, x, y, z die von p_2.

citirten Stellen (p. 552, 555) als *einfache* Fläche behandelt. Auf p. 552 wird das einschalige Hyperboloid allerdings auch in eine Ringfläche übergeführt, aber nicht durch ein ein-zweideutiges, sondern durch ein ein-eindeutiges Verfahren. *Zufällig* ist dabei, dass für das Hyperboloid dieselbe Zusammenhangszahl (Zwei) resultirt, wie nach der obigen Festsetzung. Hätte man z. B. das Hyperboloid mit einer Punktirung versehen, so würde nach dem auf p. 552 benutzten Processe eine einfache punktirte Ringfläche, nach der allgemeinen Regel aber eine zweimal punktirte Ringfläche entstanden sein, und dementsprechend hätte man dem punktirten Hyperboloide das eine Mal den Zusammenhang Drei, das andere Mal den Zusammenhang Vier beilegen müssen.

Es scheint mir nun am richtigsten, für den Fall es sich bloss um die Untersuchung des Zusammenhangs von Flächen, und überhaupt von zweifach ausgedehnten Gebieten handelt, festzusetzen: *dass nicht die ein-zweideutige Transformation, dass vielmehr die p. 552, 555 eingeschlagene Methode bei Bestimmung des Zusammenhangs (zunächst des einschaligen Hyperboloids) als richtig gelten soll.*

Diese Festsetzung, die denn auch für die Beurtheilung des Zusammenhangs meiner neuen Riemann'schen Flächen maassgebend sein wird, ordnet sich in eine allgemeine Auffassung vom Wesen des Zusammenhangbegriffes ein, die so, wie in der Folge geschehen soll, wohl noch nicht ausgesprochen wurde, so dass ihre Formulirung als Mitzweck der gegenwärtigen Mittheilung gelten darf.

Die Eigenschaften, die einem geometrischen Gebilde oder überhaupt einer Mannigfaltigkeit bei beliebigen Verzerrungen erhalten bleiben, kann man in *absolute* und *relative* sondern.

Absolut nenne ich diejenigen Eigenschaften, welche der betr. Mannigfaltigkeit unabhängig von dem umfassenden Raume zukommen, in welchem gelegen man sie voraussetzen mag.

Relative Eigenschaften hängen von dem umgebenden Raume ab; sie sind invariant bei Verzerrungen der Mannigfaltigkeit, die innerhalb des betr. Raumes stattfinden, nicht aber bei beliebigen Verzerrungen.

Eine absolute Eigenschaft einer Curve ist z. B. durch ihre Verästelung gegeben. Dagegen wird eine relative Eigenschaft einer geschlossenen Curve, — wenn sie in der Ebene liegend vorausgesetzt wird, — durch die *Gesammtkrümmung* der Curve vorgestellt, — wenn sie dem dreifach ausgedehnten Raume angehören soll, durch *die Zahl der Windungen der Curve um sich selbst (Knotenzahl).* Für eine geschlossene Fläche, die dem dreifach ausgedehnten Punktraume angehört, besteht ein *relatives* Charakteristikum ebenfalls in der *Gesammtkrümmung*; derartige Attribute sind es, von denen p. 552, 553 meiner alten Arbeit beiläufig gesprochen wird.

Die gemeinte Auffassung des Zusammenhangbegriffes zielt nun darauf ab, *den Zusammenhang der Flächen so zu definiren, dass er als ein absolutes Charakteristikum zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten gelten kann**). Der grösste Theil der bei der gewöhnlichen Definition des Zusammenhangs benutzten, der Geometrie entlehnten Ausdrücke: Randcurve, Querschnitt etc. hat von vornherein absolute Bedeutung. Es ist das nur bei einer Hülfsvorstellung nicht der Fall, die ausdrücklich den die M_2 umgebenden Punktraum voraussetzt. Man hat, wie ich auch bei der früheren Gelegenheit zur Sprache brachte, bei der Definition des Zusammenhangs einen Unterschied zu machen zwischen einfachen Flächen und (eigentlichen) Doppelflächen. Der Unterschied ergiebt sich durch Betrachtung der *Flächen-Normale*. Errichtet man gegen ein Element der Fläche in bestimmtem Sinne eine Normale und lässt die Normale mit ihrem Fusspunkte über die Fläche hinwandern, so heisst die Fläche eine Doppelfläche, sobald es möglich ist, zum Ausgangspunkte mit umgekehrtem Sinne der Normalrichtung zurückzukehren.

Diese Festsetzung lässt sich nun aber durch leichte Umstellung so verwandeln, dass eine *absolute* Bedeutung resultirt. Statt gegen das Flächenelement eine Normale in dem einen oder anderen Sinne zu errichten, *zeichne man in dem Flächenelemente eine in sich zurücklaufende Curve (Indicatrix) und belege sie mit dem einen oder anderen Sinne. — Eine Fläche heisse dann und nur dann eine Doppelfläche (eine M_2 eine Doppelmannigfaltigkeit), wenn es möglich ist, diese Indicatrix so über die Fläche hin bis zu ihrer ursprünglichen Stelle zurück zu verschieben, dass der Sinn der Indicatrix umgekehrt scheint.*

Nach dieser Regel ist die unbegrenzte projective Ebene und überhaupt jede unpaare Fläche eine Doppelfläche, das einschalige Hyperboloid aber eine einfache. Querschnitte, die man auf diesen Flächen ziehen mag, sind entsprechend zu beurtheilen. Es ist nur ein Mittel der Bequemlichkeit, wenn man, wie auf p. 552, nicht das Hyperboloid selbst der directen Untersuchung unterwirft, sondern dasselbe vorab durch einen umkehrbar eindeutigen und desshalb immer gestatteten Process in eine Ringfläche verwandelt. —

Die eben vorgetragene Indicatrixmethode drängt sich bei den neuen Riemann'schen Flächen, von denen ich in der zweiten damaligen Arbeit handelte, von selbst auf, sofern man die Entstehung dieser Flächen mit v. Staudt's Repräsentation der Imaginären zusammenbringt. Die Punkte, welche unsere Riemann'sche Fläche bilden, repräsentiren je eine imaginäre Linie, und sind also bei v. Staudt

*) Es ist dann zusammen mit der Zahl der Randcurven zugleich das ausreichende Charakteristikum.

die Träger einer, mit bestimmtem *Sinne* zu nehmenden Strahleninvolution. Indem wir um den Punkt einen kleinen Kegelschnitt als Indicatrix herumlegen und diesem einen Sinn ertheilen, geben wir der v. Staudt'schen Vorstellung in leicht verständlicher Weise Ausdruck*). Wir können uns dementsprechend die bez. Riemann'schen Flächen mit Indicatricen überdeckt denken, deren *Sinn* nicht nur, sondern deren *Gestalt* auch den von Staudt'schen Forderungen entspricht. Eine besondere Berücksichtigung etwaiger Doppelflächen erweist sich dabei freilich als überflüssig, sofern wir diejenigen Partieen unserer Fläche, die mit übrigens congruenten, nur in verschiedenem Sinne zu nehmenden Indicatricen überdeckt sind, schon von vornherein durch die Definition unserer Flächen als verschiedene Blätter unterschieden haben**).

Um die Bedeutung der Indicatrixtheorie und der absoluten Auffassung des Zusammenhangbegriffes vollends hervortreten zu lassen, mag hier zum Schlusse noch der Zusammenhang zweier zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten, die keine Flächen sind, bestimmt werden, nämlich *der Liniencongruenzen erster Ordnung und Classe mit zwei reellen oder zwei imaginären Leitlinien.* (Fallen die Leitlinien zusammen, so hat die Congruenz einen singulären Strahl, und es kann von Abzählung des Zusammenhanges ohne vorherige neue Festsetzungen keine Rede sein.)

Es bietet sich zu dieser Bestimmung zunächst eine analytische Methode. Führt man statt der Liniencoordinaten p_{ik} sechs reelle lineare Functionen x_i ein, so kann man bekanntlich erreichen, dass die zwischen den p_{ik} bestehende Identität in folgende übergeht***):

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0.$$

Eine lineare Congruenz mit imaginären Leitlinien ist dann, beispielsweise, durch

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

eine solche mit reellen Leitlinien durch

$$x_1 = 0, \quad x_4 = 0$$

dargestellt. Anders ausgedrückt: Die Congruenz mit imaginären Leitlinien ist eindeutig (und ohne Auftreten von Fundamentalelementen) abgebildet auf diejenige M_2, welche aus dem projectiven R_3:

$$x_3 : x_4 : x_5 : x_6$$

*) Der Kegelschnitt soll so gewählt sein, dass für ihn die in der Involution zusammengehörigen Strahlen conjugirte Linien sind, insbesondere also, wenn man will, bei Centren, die im Endlichen liegen, conjugirte Durchmesser.

**) Eine analoge Bemerkung findet bei den gew. Riemann'schen Flächen ihre Stelle.

***) Math. Annalen Bd. II, p. 204.

durch die Gleichung

$$x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0$$

ausgeschieden wird; die Congruenz mit reellen Leitlinien entsprechend auf diejenige M_2 des R_3:

$$x_2 : x_3 : x_5 : x_6 ,$$

die durch

$$x_2^2 + x_3^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0$$

repräsentirt wird. Aber dieselben Gleichungen bedeuten, bei anderer Interpretation der Verhältnissgrössen x, reelle Flächen zweiten Grades, die bez. nichtgeradlinig und geradlinig sind, d. h. also z. B. eine Kugel und ein einschaliges Hyperboloid.

Somit kommt:

Beide Liniencongruenzen sind einfache Mannigfaltigkeiten. Die Congruenz mit imaginären Leitlinien hat den Zusammenhang Null, die Congruenz mit reellen Leitlinien hat den Zusammenhang Zwei.

Versuchen wir jetzt, uns unmittelbar geometrisch zunächst von dem ersten Theile der vorstehenden Behauptung Rechenschaft zu geben.

Für eine Linie der Congruenz die Indicatrix construiren heisst, unter den unmittelbar benachbarten Linien einfach unendlich viele zu einer in sich zurücklaufenden (geschlossenen) Linienfläche zusammenfassen. Die Erzeugenden dieser Fläche sind dann, damit die Indicatrix ihren Sinn erhalte, in bestimmter Reihenfolge zu nehmen.

Diese Forderung lässt sich nun für die beiden zu betrachtenden Fälle in geläufigere Vorstellungen umsetzen, die dann in beiden Fällen leicht übersehen lassen, dass man es in der That mit *einfachen* Mannigfaltigkeiten zu thun hat*).

Nehmen wir zunächst die Congruenz mit imaginären Leitlinien. Um die Ideen zu fixiren, denken wir uns in einer Ebene senkrecht gegen den zu betrachtenden Strahl um diesen Strahl einen kleinen Kreis gezogen und wählen als Indicatrix die Linienfläche, die von den Congruenzstrahlen erzeugt wird, welche von den Punkten des Kreises ausgehen. Dieselben bilden ein enges, um den Strahl herumgelegtes einschaliges Hyperboloid, oder wenigstens eine ähnlich gestaltete Fläche. Statt nun diese Congruenzlinien in bestimmter Reihenfolge zu durchlaufen, ertheilen wir dem Hyperboloide in dem einen oder anderen Sinne eine Drehung um seine Axe. Denkt man sich dann die Erzeugenden als Tangenten von Schraubenlinien, die sich um die Axe herumwinden, so ist mit der Drehung eine Verschiebung der Axe in sich verbunden. Statt also unserer Indicatrix einen Sinn zu ertheilen,

*) Ein Beispiel für eine Doppelmannigfaltigkeit vom Zusammenhange Null giebt etwa das Secantensystem einer Raumcurve dritter Ordnung, wie man am raschesten auch wieder analytisch erschliesst.

können wir einfach auch dem als Punktreihe betrachteten Congruenzstrahle einen Sinn beilegen.

Genau dasselbe Mittel benutzt v. Staudt, um die beiden von allen Linien der Congruenz geschnittenen imaginären Leitlinien zu unterscheiden. v. Staudt's Entwickelungen zugegeben, ist also deutlich, dass ein Congruenzstrahl, mit einem bestimmten Verschiebungssinne behaftet, dann beliebig durch die Congruenz hin bewegt, zu seiner Anfangslage nur wieder mit seinem ursprünglichen Sinne zurückkehren kann: *die Congruenz erster Ordnung und Classe mit imaginären Leitlinien ist also eine einfache Mannigfaltigkeit.*

Entsprechende Ueberlegungen, bei der Congruenz mit reellen Leitlinien angestellt, ergeben dieses Resultat:

Jeder Strahl wird durch die beiden Directricen D_1 und D_2 in zwei Segmente zerlegt, und der wechselnde Sinn, welcher der Linienindicatrix beigelegt werden kann, kommt darauf hinaus, auf jedem dieser Segmente übereinstimmend einen Sinn von D_1 zu D_2 oder von D_2 zu D_1 anzunehmen. Dass dieser Sinn, einmal festgestellt, sich bei stetiger Verschiebung der Geraden innerhalb der Congruenz nicht ändern kann, ist deutlich, und *also haben wir wiederum eine einfache Mannigfaltigkeit vor uns.*

Die wirkliche Bestimmung des Zusammenhangs der beiderlei Congruenzen ergiebt sich nach dieser Voruntersuchung am anschaulichsten durch den Vergleich mit der unbegrenzten Ebene. Sind die Leitlinien der Congruenz imaginär, so entspricht jedem Punkte der Ebene ausnahmslos ein (hindurchgehender) Strahl und auch umgekehrt jedem Strahle ein Punkt, bis auf den einen Strahl, der ganz in der Ebene enthalten ist. Sind die Leitlinien reell, so modificiren sich diese Verhältnisse insofern, als dann auch noch zwei Punkte der Ebene auftreten (die Schnittpunkte der Ebene mit den beiden Leitlinien), denen unendlich viele Linien der Congruenz entsprechen. Aus diesem Verhalten bestimmt sich die Zusammenhangszahl der beiderlei Congruenzen bez. zu *Null* und *Zwei*, genau so, wie p. 555 der vorigen Arbeit aus dem entsprechenden Verhalten der Kugel und des einschaligen Hyperboloids bei ihrer Abbildung auf die Ebene der Zusammenhang dieser beiden Flächen bestimmt wurde. Zugleich giebt die Abbildung auf die Ebene ein geometrisches Mittel, um die umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen der Congruenz mit imaginären Leitlinien und der Kugel, resp. zwischen der Congruenz mit reellen Leitlinien und dem einschaligen Hyperboloide herzustellen, eine Beziehung, die oben auf analytischem Wege gewonnen wurde.

München, November 1875.

Die Curve vierpunktiger Berührung auf einer algebraischen Fläche.

Von A. Voss in Darmstadt.

In einer früheren Arbeit*) habe ich die Ordnung der Curve vierpunktiger Berührung auf einer durch den Schnitt dreier allgemeiner Complexe bestimmten windschiefen Fläche angegeben. Es ist indessen leicht, das Problem der Bestimmung der Ordnung der genannten Curve in seiner allgemeinsten Gestalt auf einem mehr geometrischen Wege zu erledigen. Die Methode, welche ich dazu eingeschlagen habe, ist, wie ich später bemerkt habe, bereits auch von Herrn Sturm**) gelegentlich desselben Problems benutzt worden, doch dürften die folgenden Betrachtungen trotzdem einiges Neue enthalten.

Eine Fläche n^{ter} Ordnung F_n besitze eine Rückkehr- resp. Doppelcurve von den Ordnungen r, d. Längs der durch eine willkürliche Ebene E bestimmten Schnittcurve C_n werde die umschriebene Fläche der Haupttangenten construirt. Die letzteren bilden eine windschiefe Fläche, welche die Curve C_n zur Selbstberührungscurve hat, deren beide Mäntel die Fläche F_n dreipunktig berühren. Bezeichnet man mit i die Zahl der Wendepunkte der C_n, so ist:

$$i = 3n(n-2) - 6d - 8r. \tag{1}$$

Die Ordnung der windschiefen Fläche ist:

$$N = i + 2n. \tag{2}$$

Sie schneidet daher F_n in einer Curve Σ, deren Ordnung:

$$n(2n+i) - 6n.$$

Die Schnittpunkte von Σ und E bestehen aus den folgenden Punkten:

*) Math. Annalen Bd. VIII, p. 90.

**) Crelle's Journal Bd. 72, p. 350.

a) den $(n-3)i$ Punkten, in denen die Wendetangenten der C_n begegnen,

b) aus den vierfach zu rechnenden Doppel- und den dreifach zu rechnenden Rückkehrpunkten der C_n,

c) aus den S Punkten, in denen die Curve vierpunktiger Berührung der Ebene E begegnet.

Man hat demnach:

$$S = n(2n+i) - 6n - i(n-3) - 4d - 3r,$$
$$S = n(11n-24) - 22d - 27r.$$

Von Herrn Cayley ist dieselbe Zahl durch Induction gefunden worden*).

Für eine windschiefe Fläche sind die obigen Betrachtungen nicht mehr gültig. Herr Salmon macht die Bemerkung**), dass die Gleichung, welche nach Clebsch und Salmon die Curve vierpunktiger Berührung aus einer windschiefen Fläche ausschneidet, nach Cayley mit der Differentialgleichung der windschiefen Flächen äquivalent sei. Dies kann nur so verstanden werden, dass in diesem Falle die genannte Gleichung den Factor F_n enthält, ausserdem einen anderen, der die eigentliche Curve vierpunktiger Berührung bestimmt und eine gewisse Anzahl mal durch die Doppelcurve geht, zugleich aber auf jeder Erzeugenden eine Reihe weiterer Punkte ausschneidet, welche der Frage fremd sind. Die Curve vierpunktiger Berührung verliert daher bei den windschiefen Flächen den Charakter eines vollständigen Schnittes. Eine analytische Untersuchung dieser Verhältnisse, derjenigen ähnlich, wie sie Cayley bis zu einem gewissen Grade für die Hesse'sche Fläche einer Developpabelen durchgeführt hat, ist mit grosser Weitläufigkeit verbunden.

Eine windschiefe Fläche n^{ter} Ordnung habe σ singuläre Erzeugende und eine Doppelcurve von der Ordnung d. Alsdann ist:

$$2\sigma + 8d = 4n(n-2)\text{***}). \tag{3}$$

*) Philosophical Transactions of the R. S. of London 1869.

**) Geometrie des Raumes, deutsche Ausgabe p. 572. Die bezügliche Arbeit von Herrn Cayley war mir leider nicht zugänglich.

***) Göttinger Nachrichten Juli 1873. Hat die Fläche r Rückkehrerzeugende, so lautet die analoge, auf dem Verhalten der Hesse'schen Determinante beruhende Gleichung:

$$2\sigma + 8d + 12r = 4n(n-2).$$

Sie führt unmittelbar zu einer merkwürdigen Formel für σ, welche Herr Sturm (Math. Annalen Bd. VI, p. 255) gegeben hat und von der weiterhin im Texte Gebrauch gemacht ist.

Die längs eines ebenen Schnittes C_n von den Haupttangenten gebildete windschiefe Fläche ist von der Ordnung $n + i$. Sie enthält, wie man leicht findet, eine Doppelcurve von der Ordnung:

$$D = d + \frac{i(i-1)}{2} + (n-3)i + 2i$$
$$= ni + d + \frac{i(i-3)}{2}.$$

Aus ihrem Range $n(n-1) - 2d + 2i$ ergiebt sich daher die Zahl ihrer singulären Erzeugenden gleich $\sigma + 2i$. Die Fläche der Haupttangenten hat daher die singulären Erzeugenden der F_n selbst zu singulären, die i Wendetangenten sind doppelte singuläre Erzeugende derselben.

Die beiden windschiefen Flächen schneiden sich mithin in einer weiteren Curve Σ, deren Ordnung:

$$n(n+i) - 3n - 2\sigma.$$

Daraus ergiebt sich wie vorhin als Ordnung der Curve vierpunktiger Berührung:

$$S = n(n+i) - 3n - i(n-3) - 2d - 2\sigma,$$

oder

$$S = n(6n - 13) - 12d. \tag{4}$$

Setzt man

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d,$$

so erhält man die elegante Formel:

$$S = 5n + 12(p-1). \tag{5}$$

Für $p = 0$ habe ich den nämlichen Werth bereits auf einem ganz anderen Wege abgeleitet*). Für die windschiefe Fläche, welche Schnitt dreier allgemeiner Complexe von den Geraden λ, μ, ν ist, hat man:

$$n = 2\lambda\mu\nu,$$
$$p = \lambda\mu\nu(\mu + \nu + \lambda - 4) + 1,$$

mithin

$$S = 2\lambda\mu\nu\big(6(\mu + \nu + \lambda) - 19\big),$$

wie daselbst bereits gefunden wurde.

Es ist endlich leicht, noch denjenigen Fall in Betracht zu ziehen, wo die Fläche eine δ-fache Leitlinie, sowie r Rückkehrerzeugende

*) Math. Annalen a. a. O. p. 107.

(Doppelerzeugende sind einfach in die Doppelcurve einzurechnen) besitzt. Man erhält dann:

$$S = 5n + 12(p-1) - \delta - 3r,$$

für den Fall zweier δ-, δ'-facher Leitlinien dagegen, da $\delta + \delta' = n$:

$$S = 4n + 12(p-1) - 3r.$$

Die Bedeutung dieser letzteren Zahl habe ich ausführlicher in der genannten Arbeit besprochen*).

Darmstadt, im Juni 1875.

*) Math. Annalen a. a. O. p. 94, 115.

Ueber die Entwicklung der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in Reihen.

Von

L. Königsberger in Dresden.

Herr Hermite hat vor Kurzem den Satz bekannt gemacht*), dass in der Reductionsformel des elliptischen Integrales

$$\int_0^x \frac{(k^2x^2)^{n+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = P\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} - A\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + B\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

die Coefficienten des ersten und zweiten Integrales durch die Gleichungen bestimmt sind

$$A = \beta_n\,, \quad B = \alpha_n\,,$$

wenn

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \sum \alpha_n x^{2n+1}\,,$$

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \sum \beta_n x^{2n+1}$$

ist.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist ohne weitere Rechnung durch den blossen Anblick der Coefficienten A und B einzusehen, wenn man dieselben in der von Herrn Weierstrass für elliptische Integrale aufgestellten Form, wie ich sie auch in meine „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen“ aufgenommen habe, zu Grunde

*) Sur le développement en série des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce. Extrait d'une lettre de M^r. Hermite à M^r. Brioschi. Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II^a, Tomo II^o, Fasc. II^o.

legt und, indem man die Entwicklung um den unendlich entfernten Punkt in die Entwicklung um den Nullpunkt überträgt, die Beziehung berücksichtigt:

$$\int^{\cdot} \frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int^{\cdot} \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \frac{1}{x}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

Um zu zeigen, dass dieser Weg auch der wirklich naturgemässe zur Auffindung der obigen Relation ist, will ich ein ähnliches Resultat für die hyperelliptischen Integrale herleiten, nachdem ich zuvor die Reductionsformeln für die allgemeinen hyperelliptischen Integrale aufgestellt und einige Betrachtungen über das Verschwinden der Integrale der einzelnen Gattungen daran geknüpft habe.

Sei

$$R(z) = A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+1})$$

und $F(z, \sqrt{R(z)})$ eine rationale Function von z und $\sqrt{R(z)}$, so wird sich

$$\int^{\cdot} F(z, \sqrt{R(z)})\,dz = \int^{\cdot} \frac{\varphi_1(z) + \varphi_2(z)\sqrt{R(z)}}{\psi_1(z) + \psi_2(z)\sqrt{R(z)}}\,dz,$$

worin $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ ganze Functionen von z sind, wenn in der Function unter dem Integral Zähler und Nenner mit dem conjugirten Werthe des Nenners multiplicirt wird, in die Form bringen lassen:

$$\int \left[F_1(z) + F_2(z)\sqrt{R(z)}\right] dz = \int^{\cdot} F_1(z)\,dz + \int^{\cdot} \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

in welcher $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F(z)$ rationale Functionen von z bedeuten. Da nun

$$\int F_1(z)\,dz$$

als Integral einer rationalen Function von z eine algebraisch-logarithmische Function ist, so handelt es sich somit nur noch um ein Integral von der Form:

$$\int^{\cdot} \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

auf dessen Reduction wir nunmehr eingehen.

Nach dem Cauchy'schen Satze ist, wenn $F(z)$ für die Werthe

$$z_1, z_2, \cdots z_n$$

unendlich wird,

$$(1)\quad F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(z_1)}^{\cdot} \frac{F(t)}{z-t}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{(z_2)}^{\cdot} \frac{F(t)}{z-t}\,dt + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\int_{(z_n)}^{\cdot} \frac{F(t)}{z-t}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{(\infty)}^{\cdot} \frac{F(t)}{z-t}\,dt,$$

worin die Integrale so zu durchlaufen sind, dass die eingeschlossenen Flächen zur Linken liegen, und das letzte Integral längs einem den Nullpunkt als Mittelpunkt umschliessenden Kreis mit sehr grossem Radius genommen werden kann; es wird sich somit, da die geschlossenen Integrale um die Punkte z_α genommen, wie bekannt, die Coefficienten von $(t-z_\alpha)^{-1}$ in der Entwicklung von

$$\frac{F(t)}{z-t}$$

nach steigenden Potenzen von $(t-z_\alpha)$ darstellen und ebenso das um den unendlich entfernten Punkt genommene Integral den Coefficienten von t^{-1} in der Entwicklung derselben Function nach fallenden Potenzen von t, wenn wir ausserdem diese Coefficienten durch

$$\left[\frac{F(t)}{z-t}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} \text{ und } \left[\frac{F(t)}{z-t}\right]_{t^{-1}}$$

bezeichnen und die Gleichung (1) mit $\sqrt{R(z)}$ dividiren, der Ausdruck ergeben:

$$(2)\quad \frac{F(z)}{\sqrt{R(z)}} = \left[\frac{F(t)}{(z-t)\sqrt{R(z)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} + \cdots + \left[\frac{F(t)}{(z-t)\sqrt{R(z)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{(z-t)\sqrt{R(z)}}\right]_{t^{-1}},$$

dessen einzelne Theile nunmehr weiter zu behandeln sein werden.

Nun ist aber eine unmittelbar ersichtliche Identität, die man durch Ausführung der Differentiation verificirt,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\sqrt{R(t)}}{(z-t)\sqrt{R(z)}}\right] - \frac{d}{dz}\left[\frac{\sqrt{R(z)}}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right] = \frac{\frac{1}{2}(z-t)[R'(t)+R'(z)]+[R(t)-R(z)]}{(z-t)^2\sqrt{R(z)}\sqrt{R(t)}},$$

welche, wie man durch einfache Ausrechnung erkennt, wenn

$$R(z) = Az^{2p+1} + B_0 z^{2p} + B_1 z^{2p-1} + \cdots + B_{2p-1}z + B_{2p},$$

$$F_r(t) = \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \frac{2p-2r+1}{2} B_1 t^{r-2} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{2p-r-3}{2} B_{r-3} t^2 + \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1},$$

oder auch

$$\begin{aligned}(-1)^r F_r(t) = {} & \frac{2p-1}{4p+2}\frac{1}{(2p)!}(2p-1)_r t^r R^{(2p+1)}(t) \\ & - \frac{2p-2}{4p}\frac{1}{(2p-1)!}(2p-2)_{r-1} t^{r-1} R^{(2p)}(t) \\ & + \frac{2p-3}{4p-2}\frac{1}{(2p-2)!}(2p-3)_{r-2} t^{r-2} R^{(2p-1)}(t) + \cdots \\ & \cdots + (-1)^{r-1}\frac{2p-r}{4p-2r+4}\frac{1}{(2p-r+1)!}(2p-r)_1 t R^{(2p-r+2)}(t) \\ & - (-1)^{r-1}\frac{2p-r-1}{4p-2r+2}\frac{1}{(2p-r)!} R^{(2p-r+1)}(t)\end{aligned}$$

gesetzt wird, worin a_k den k^{ten} Binomialcoefficienten von a und $R^{(i)}(t)$ die i^{te} Ableitung von $R(t)$ bedeutet, in

$$(3)\quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\sqrt{R(t)}}{(z-t)\sqrt{R(z)}}\right]=\frac{d}{dz}\left[\frac{\sqrt{R(z)}}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]+\frac{F_0(t)z^{2p-1}}{\sqrt{R(z)}\sqrt{R(t)}}+\frac{F_1(t)z^{2p-2}}{\sqrt{R(z)}\sqrt{R(t)}}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{F_{2p-2}(t)z}{\sqrt{R(z)}\sqrt{R(t)}}+\frac{F_{2p-1}(t)}{\sqrt{R(z)}\sqrt{R(t)}}$$

übergeht, wobei zu bemerken, dass der Index der F-Function den Grad dieser ganzen Function in t bezeichnet.

Integrirt man diese Gleichung nach t zwischen den Grenzen z_α und t, so erhält man:

$$\frac{\sqrt{R(t)}}{(z-t)\sqrt{R(z)}}-\frac{\sqrt{R(z_\alpha)}}{(z-z_\alpha)\sqrt{R(z)}}$$
$$=\frac{d}{dz}\left(\sqrt{R(z)}\int_{z_\alpha}^{t}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right)+\frac{z^{2p-1}}{\sqrt{R(z)}}\int_{z_\alpha}^{t}\frac{F_0(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}+\frac{z^{2p-2}}{\sqrt{R(z)}}\int_{z_\alpha}^{t}\frac{F_1(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{z}{\sqrt{R(z)}}\int_{z_\alpha}^{t}\frac{F_{2p-2}(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}+\frac{1}{\sqrt{R(z)}}\int_{z_\alpha}^{t}\frac{F_{2p-1}(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}},$$

und daher, wenn man mit $\sqrt{R(t)}$ dividirt, mit $F(t)$ multiplicirt, auf beiden Seiten nach steigenden Potenzen von $t-z_\alpha$ entwickelt und die Coefficienten von $(t-z_\alpha)^{-1}$ einander gleichsetzt:

$$(4)\quad \left[\frac{F(t)}{(z-t)\sqrt{R(z)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}}=\frac{\sqrt{R(z_\alpha)}}{(z-z_\alpha)\sqrt{R(z)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}}$$
$$+\frac{z^{2p-1}}{\sqrt{R(z)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}^{t}\frac{F_0(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}}+\frac{z^{2p-2}}{\sqrt{R(z)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}^{t}\frac{F(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{\sqrt{R(z)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}^{t}\frac{F_{2p-1}(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}}+\frac{d}{dz}\sqrt{R(z)}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}^{t}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}},$$

wenn wir uns der bekannten Bezeichnung bedienen.

Wir gehen wieder zu der Gleichung (3) zurück und integriren nach t für den Anfangswerth $t=\infty$, so ist klar, dass man

$$(5)\quad \frac{\sqrt{R(t)}}{(z-t)\sqrt{R(z)}}=\frac{d}{dz}\int_{\infty}^{t}\frac{\sqrt{R(z)}}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\,dt+\frac{z^{2p-1}}{\sqrt{R(z)}}\int_{\infty}^{t}\frac{F_0(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{\sqrt{R(z)}}\int_{\infty}^{t}\frac{F_{2p-1}(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}$$

erhält, wenn man nachweisen kann, dass die Integrationsconstante

Null wird; da aber auf der linken Seite in der Umgebung des unendlich entfernten Punktes

$$\sqrt{R(t)} = A^{\frac{1}{2}} t^{\frac{2p+1}{2}} + a_1 t^{\frac{2p-1}{2}} + \cdots$$

$$\frac{1}{z-t} = -\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{t}} = -t^{-1} - zt^{-2} - \cdots$$

ist, so wird die Entwicklung der linken Seite nach fallenden Potenzen von t

$$\frac{\sqrt{R(t)}}{(z-t)\sqrt{R(z)}} = -\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{R(z)}} t^{\frac{2p-1}{2}} + \text{fallende } \textit{gebrochene} \text{ Potenzen von } t;$$

auf der rechten Seite dagegen wird

$$\frac{1}{\sqrt{R(t)}} = A^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{2p+1}{2}} \left\{1 + \frac{a_1}{A^{\frac{1}{2}}} t^{-1} + \cdots\right\}^{-1} = A^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{2p+1}{2}} + b_1 t^{-\frac{2p+3}{2}} + \cdots$$

$$\frac{1}{t-z} = t^{-1} + zt^{-2} + \cdots.$$

also

$$\frac{1}{(t-z)\sqrt{R(t)}} = A^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{2p+3}{2}} + c_1 t^{-\frac{2p+5}{2}} + \cdots$$

und daher

$$\int_{\infty}^{\cdot} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} = -\frac{2}{2p+1} A^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{2p+1}{2}} - \frac{2}{2p+3} c_1 t^{-\frac{2p+3}{2}} - \cdots,$$

ferner, da

$$F_r(t) = (p - r - \tfrac{1}{2}) A t^r + \text{fallende Potenzen von } t,$$

$$\frac{F_r(t)}{\sqrt{R(t)}} = (p - r - \tfrac{1}{2}) A^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{2p+1}{2}+r} + \text{fallende } \textit{gebrochene} \text{ Potenzen von } t,$$

und

$$\int_{\infty}^{\cdot} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = -A^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{2p-1}{2}+r} + \text{fallende } \textit{gebrochene} \text{ Potenzen von } t,$$

so dass die Entwicklung der rechten und linken Seite der obigen Gleichung in der Umgebung des Punktes $t = \infty$ nur gebrochene Potenzen von t enthält. Da die Constante der Integration, wenn von t bis a (in der Umgebung von $t = \infty$ gelegen) integrirt würde, endlich wäre, so müssen sich, wenn $a = \infty$ wird, auf beiden Seiten die Unendlichkeiten fortheben, und es könnte höchstens eine Constante bleiben, was hier nicht möglich ist, da nur gebrochene t-Potenzen vorkommen, die für $t = \infty$ entweder unendlich gross werden oder verschwinden; es ist somit die Integrationsconstante Null, und die Glei-

chung (5) richtig, wenn auf der rechten Seite die Integrale mit der untern Grenze unendlich nur anzeigen sollen, dass die Functionen unter dem Integral in der Umgebung von $z = \infty$ zu entwickeln sind, und aus (5) ergiebt sich wieder ähnlich wie oben:

$$(6)\quad \left[\frac{F(t)}{(z-t)\sqrt{R(z)}}\right]_{t^{-1}} = \frac{z^{2p-1}}{\sqrt{R(z)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{F_0(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{\sqrt{R(z)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{F_{2p-1}(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}$$
$$+ \frac{d}{dz}\sqrt{R(z)}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}.$$

Es folgt somit aus (4) und (6) durch Einsetzen in (2), wenn

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = C_\alpha,$$

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = l_\alpha^{(r)}, \qquad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = l_0^{(r)},$$

worin $r = 0, 1, \cdots p-1$,

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = k_\alpha^{(r)}, \qquad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = k_0^{(r)},$$

wenn $r = p, p+1, \cdots 2p-1$, ferner:

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = f_\alpha(z), \qquad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = f_0(z),$$

endlich

$$l_1^{(r)} + l_2^{(r)} + \cdots + l_n^{(r)} - l_0^{(r)} = l^{(r)},$$
$$k_1^{(r)} + k_2^{(r)} + \cdots + k_n^{(r)} - k_0^{(r)} = k^{(r)},$$
$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) - f_0(z) = f(z)$$

gesetzt und mit dz multiplicirt wird, die nachstehende Reduction des allgemeinen hyperelliptischen Differentials:

$$(7)\quad \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{C_1\sqrt{R(z_1)}\,dz}{(z-z_1)\sqrt{R(z)}} + \cdots + \frac{C_n\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}}$$
$$+ \frac{l^{(0)}z^{2p-1}dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{l^{(1)}z^{2p-2}dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + \frac{l^{(p-1)}z^p\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$+ \frac{k^{(p)}z^{p-1}dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{k^{(p+1)}z^{p-2}dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + \frac{k^{(2p-1)}dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$+ \frac{d}{dz}\left\{f(z)\sqrt{R(z)}\right\}dz,$$

so dass sich somit

$$\int \frac{F(z)dz}{\sqrt{R(z)}}$$

in eine endliche Anzahl von Integralen von der Form

$$\int \frac{dz}{(z-z_a)\sqrt{R(z)}},$$

in Integrale von der Form

$$\int \frac{z^{2p-1}dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad \int \frac{z^{2p-2}dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad \ldots \quad \int \frac{z^p dz}{\sqrt{R(z)}},$$

in solche von der Form

$$\int \frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad \int \frac{z^{p-2}dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad \ldots \quad \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

und in eine Function von der Form

$$f(z)\sqrt{R(z)}$$

zerlegt, welche, wie aus der Definition von $f(z)$ hervorgeht und nachher noch genauer ausgeführt werden soll, das Product einer rationalen Function von z in $\sqrt{R(z)}$ ist.

Das Charakteristische dieser drei Integralclassen ist unmittelbar aus ihrer Form zu erkennen; es ist bekannt, dass die letzte Integralclasse nur Integrale erster Gattung enthält; für ein Integral der zweiten Classe, dessen Form

$$\int \frac{z^{p+\alpha}dz}{\sqrt{R(z)}}$$

ist, folgt unmittelbar, dass dasselbe für jeden im Endlichen gelegenen Punkt endlich ist, dass aber wegen

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = A^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{2p+1}{2}} + bz^{-\frac{2p+3}{2}} + \cdots\cdots$$

oder

$$\frac{z^{p+\alpha}}{\sqrt{R(z)}} = A^{-\frac{1}{2}} z^{\alpha-\frac{1}{2}} + bz^{\alpha-\frac{3}{2}} + \cdots\cdots$$

oder endlich

$$\int \frac{z^{p+\alpha}dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{A^{-\frac{1}{2}}}{\alpha+\frac{1}{2}} z^{\alpha+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha-\frac{1}{2}} bz^{\alpha-\frac{1}{2}} + \cdots\cdots$$

dieses Integral für $z=\infty$ von der $\alpha+\frac{1}{2}^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich wird; da nun $z=\infty$ ein Verzweigungspunkt der zu $\sqrt{R(z)}$ gehörigen Riemann'schen Fläche ist, so wird dieses Integral in diesem Punkte, wenn $z^{\frac{1}{2}}$ von der ersten Ordnung unendlich gesetzt wird, von der

$2\alpha + 1^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich oder es stellt ein Integral vor, welches nur für $z = \infty$ und zwar so unendlich wird, dass $2\alpha + 1$ Punkte, für welche es von der ersten Ordnung unendlich ist, dort zusammenfallen. Die ersten Integrale endlich, welche die Form haben

$$\int \frac{dz}{(z-z_\alpha)\sqrt{R(z)}},$$

werden nur in $z = z_\alpha$ und dort logarithmisch unendlich und zwar auf beiden Blättern, sind also, indem die beiden Punkte z_1 und z_2 eines allgemeinen Integrales dritter Gattung hier in übereinanderliegende Punkte verschiedener Blätter fallen, Integrale dritter Gattung; nur wenn z_α eine der Lösungen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{2p+1}$ des Polynoms $R(z)$ ist, würde es, wie unmittelbar zu sehen, ein Integral zweiter Gattung sein, dann aber, wie wir später sehen werden, in der Reduction gar nicht vorkommen.

Wir wollen noch kurz in Betreff der Coeffitienten der oben gefundenen Reductionsformel einige Betrachtungen anstellen. Was zuerst den Werth von

$$C_\alpha = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}}$$

betrifft, so wird, wenn z_α nicht eine der Lösungen von $R(t) = 0$ ist,

$$\frac{1}{\sqrt{R(t)}} = R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}} + b_1(t-z_\alpha) + \cdots$$

sein, und da, wenn $F(z)$ in $z = z_\alpha$ von der m^{ten} Ordnung unendlich wird,

$$F(t) = c_{-m}(t-z_\alpha)^{-m} + c_{-m+1}(t-z_\alpha)^{-m+1} + \cdots$$

ist, so werden zur Bestimmung der obigen Grösse C_α nur diese beiden Reihen zu multipliciren sein, und zwar wird man von der ersten nur die ersten m Glieder zu kennen brauchen, um den zugehörigen Werth von C_α herzuleiten, der im Allgemeinen von Null verschieden sein wird. Ist dagegen $z_\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{2p+1}$, dann wird

$$\frac{1}{\sqrt{R(t)}} = A^{-\frac{1}{2}}(t-z_\alpha)^{-\frac{1}{2}} + b_1(t-z_\alpha)^{\frac{1}{2}} + \cdots,$$

und daher wird das Product dieser Reihe mit der Reihenentwicklung von $F(t)$ nur gebrochene Exponenten enthalten, also $C_\alpha = 0$ sein, und sich somit kein dem Discontinuitätspunkte z_α entsprechendes Integral dritter Gattung ergeben.

Der durch die Gleichung:

$$k_\alpha^{(r)} = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha}^{t} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}},$$

worin $r = p, p+1, \cdots 2p-1$ zu setzen ist, gegebene Werth von k_α wird, wenn wir z_α wieder von $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{2p+1}$ verschieden annehmen, da

$$\frac{1}{\sqrt{R(t)}} = R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}} + \alpha_1(t-z_\alpha) + \cdots,$$

$$F_r(t) = F_r(z_\alpha) + \frac{t-z_\alpha}{1} F_r'(z_\alpha) + \cdots + \frac{(t-z_\alpha)^r}{r!} F_r^{(r)}(z_\alpha),$$

also

$$\int_{z_\alpha} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = F_r(z_\alpha) R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}} (t-z_\alpha) + \cdots,$$

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} = R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}} c_{-m}(t-z_\alpha)^{-m} + \cdots,$$

daher endlich:

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = c_{-m} R(z_\alpha)^{-1} F_r(z_\alpha)(t-z_\alpha)^{-m+1} + \text{steigende ganze Potenzen von } t-z_\alpha$$

ist, im Allgemeinen nur dann verschwinden, wenn $m = 1$ ist, weil dann die Reihenentwicklung bereits mit der nullten Potenz beginnt; ist $z_\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{2p+1}$, so überzeugt man sich leicht mit Hülfe der vorher gemachten Entwicklung, dass in diesem Falle k_α im Allgemeinen nicht verschwindet; jedenfalls ist $k_\alpha^{(r)}$ eine rationale Function von z_α, wie aus den Reihenentwicklungen unmittelbar hervorgeht.

Was nun die Grösse

$$k_0^{(r)} = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t=1}$$

angeht, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{R(t)}} = A^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{2p+1}{2}} + b_1 t^{-\frac{2p+3}{2}} + \cdots,$$

$$F_r(t) = (p-r-\tfrac{1}{2}) A t^r + \cdots,$$

$$\frac{F_r(t)}{\sqrt{R(t)}} = (p-r-\tfrac{1}{2}) A^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{2p+1}{2}} + \cdots,$$

und daher

$$\int_\infty \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = -A^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{2r-2p+1}{2}} + \cdots;$$

ist nun μ der Grad des Zählers und ν der Grad des Nenners der rationalen Function $F(t)$, so wird

$$F(t) = \frac{a_0 t^\mu (1 + c_1 t^{-1} + \cdots)}{b_0 t^\nu (1 + d_1 t^{-1} + \cdots)} = \frac{a_0}{b_0} t^{\mu-\nu} (1 + e_1 t^{-1} + \cdots),$$

also

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} = \frac{a_0}{b_0} A^{-\frac{1}{2}} t^{\mu-\nu-\frac{2p+1}{2}} + \text{fallende Potenzen von } t,$$

so dass

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty}^{t} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = \frac{a_0}{b_0} A^{-1} t^{\mu-\nu+r-2p} + \text{fallende Potenzen von } t,$$

und es wird somit $k_0^{(r)} = 0$ sein, wenn

$$\mu - \nu + r - 2p < -1$$

oder

$$\mu - \nu < 2p - r - 1$$

ist, d. h.

für $r = p$, $\mu - \nu < p - 1$,
für $r = p + 1$, $\mu - \nu < p - 2$,
. . . . . .
für $r = 2p - 1$, $\mu - \nu < 0$

ist, und daher folgt, weil

$$k_1^{(r)} + k_2^{(r)} + \cdots + k_n^{(r)} \quad k_0^{(r)} = k^{(r)}$$

ist, dass

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

in seiner in Einzelintegrale der verschiedenen Gattungen aufgelösten Form gar kein Integral erster Gattung hat, wenn $F(z)$ für keine Wurzel von $R(z)$ unendlich wird, in seinen Discontinuitätspunkten von der ersten Ordnung unendlich gross und zu gleicher Zeit ächt gebrochen ist.

Für $l_\alpha^{(r)}$ bleibt genau das für $k_\alpha^{(r)}$ entwickelte, wie man sich durch Wiederholung der vorher gemachten Schlüsse überzeugen kann, bestehen, nur für

$$l_0^{(r)} = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty}^{t} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t=1},$$

worin $r = 0, 1, 2, \cdots p - 1$ zu setzen ist, folgt, da, wie früher,

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\alpha}^{t} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = -\frac{a_0}{b_0} A^{-1} t^{\mu-\nu+r-2p} + \text{fallende Potenzen von } t,$$

dass $l_0^{(r)} = 0$ sein wird, wenn

$$\mu - \nu + r - 2p < -1,$$

oder

$$\mu - \nu < 2p - r - 1$$

ist, d. h.

$$\begin{aligned} &\text{für } r = 0, \qquad \mu - \nu < 2p - 1, \\ &\text{für } r = 1, \qquad \mu - \nu < 2p - 2, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\text{für } r = p - 1, \quad \mu - \nu < p \end{aligned}$$

ist, und es wird somit in der Reductionsformel des hyperelliptischen Integrals ein Integral, welches im unendlich entfernten Punkte von einer endlichen Ordnung unendlich wird, überhaupt nicht vorkommen, wenn $F(z)$ für keine Lösung von $R(z)$ unendlich wird, für seine Discontinuitätspunkte von der ersten Ordnung unendlich gross und der Grad des Zählers kleiner ist als der um p Einheiten vermehrte Grad des Nenners, d. h. wenn der Grad des Zählers den des Nenners nicht mindestens um p Einheiten übersteigt.

Betrachten wir endlich noch

$$f_\alpha(z) = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha}^{\cdot} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}},$$

so wird die Berechnung dieser Function in der folgenden Weise anzustellen sein:

$$\frac{1}{\sqrt{R(t)}} = R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}} + a_1(t-z_\alpha) + \cdots,$$

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z-z_\alpha-(t-z_\alpha)} = -\frac{1}{z-z_\alpha} \cdot \frac{1}{1-\frac{t-z_\alpha}{z-z_\alpha}}$$

$$= -\frac{1}{z-z_\alpha} - \frac{t-z_\alpha}{(z-z_\alpha)^2} + \cdots,$$

somit

$$\int_{z_\alpha}^{\cdot} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} = -\frac{R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}}}{z-z_\alpha}(t-z_\alpha) + \cdots;$$

da ferner

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} = R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}} c_{-m}(t-z_\alpha)^{-m} + \cdots$$

ist, so folgt

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha}^{\cdot} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} = -\frac{R(z_\alpha)^{-1}}{z-z_\alpha} c_{-m}(t-z_\alpha)^{-m+1} + \cdots,$$

so dass $f_\alpha(z)$ jedenfalls, da alle Entwicklungscoefficienten von $\frac{1}{\sqrt{R(t)}}$, wie man unmittelbar sieht, dieselbe Irrationalität $R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ enthalten, eine rationale Function von z und z_α wird, und verschwindet, wenn $-m+1 \geq 0$ also $F(z)$ von der ersten Ordnung unendlich wird.

Das Letztere tritt wieder, wie man sich auf dem schon angegebenen Wege überzeugen kann, nicht ein, wenn $z_\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{2p+1}$ ist. Die Entwicklung von

$$f_0(z) = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_\infty \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}$$

endlich liefert

$$\frac{1}{\sqrt{R(t)}} = A^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{2p+1}{2}} + \cdots,$$

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{t}} = t^{-1} + zt^{-2} + \cdots,$$

und daher

$$\int_\infty \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} = -\frac{2}{2p+1}A^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{2p+1}{2}} + \cdots;$$

da aber

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} = \frac{a_0}{b_0}A^{-\frac{1}{2}}t^{\mu-\nu-\frac{2p+1}{2}} + \text{fallende Potenzen von } t,$$

so folgt

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_\infty \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} = -\frac{2}{2p+1}\frac{a_0}{b_0}A^{-1}t^{\mu-\nu-2p-1} + \text{fallende Potenzen von } t,$$

und es wird daher $f_0(z)$ verschwinden, wenn

$$\mu - \nu - 2p - 1 < -1$$

oder

$$\mu - \nu < 2p,$$

also der Grad des Zählers nicht mindestens den des Nenners um die Zahl $2p$ übertrifft.

Nachdem die Reductionsformeln für das allgemeine hyperelliptische Integral entwickelt worden, gehe ich dazu über, für die allgemeinen hyperelliptischen Integrale die den oben angeführten Hermite'schen Relationen analogen zu entwickeln.

Sei das Integral

$$\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

zu behandeln, in welchem

$$R(z) = Az(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+1})$$
$$= Az^{2p+1} + B_0z^{2p} + B_1z^{2p-1} + \cdots + B_{2p-1}z^*),$$

ist, und

*) Es bedarf kaum der Erwähnung, dass die Annahme, dass eine der Lösungen des Polynoms $R(z)$ Null ist, keine Beschränkung der Allgemeinheit involvirt.

$$n > 2p - 1$$

angenommen wird, so wird, da z^n für kein endliches z unendlich wird, das vorgelegte Integral gar kein Integral dritter Gattung enthalten, und somit nach der Reductionsformel (7) sich in die Form bringen lassen:

(8)
$$\int \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}} = l_n^{(0)} \int \frac{z^{2p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + l_n^{(1)} \int \frac{z^{2p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + l_n^{(p-1)} \int \frac{z^p dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$+ k_n^{(p)} \int \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + k_n^{(p+1)} \int \frac{z^{p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + k_n^{(2p-1)} \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$+ f_n(z)\sqrt{R(z)},$$

worin für $r = 0, 1, 2, \cdots p-1$:

(9)
$$l_n^{(r)} = -\left[\frac{t^n}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty^{} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t-1},$$

für $r = p, p+1, \cdots 2p-1$:

(10)
$$k_n^{(r)} = -\left[\frac{t^n}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty^{} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t-1},$$

und endlich

(11)
$$f_n(z) = -\left[\frac{t^n}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty^{} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t-1}$$

ist, wenn

(12)
$$F_r(t) = \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \frac{2p-2r+1}{2} B_1 t^{r-2} + \cdots$$
$$+ \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1}$$

gesetzt wird.

Indem wir uns zuerst mit der Grösse $l_n^{(r)}$ beschäftigen, setzen wir

(13)
$$l_n^{(r)} = -\left[\frac{1}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty^{} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t=u-1}$$

oder mit Hülfe der Substitution

$$t = \frac{1}{u},$$

wenn

(14)
$$R_1(u) = B_{2p-1} u^{2p+1} + B_{2p-2} u^{2p} + \cdots + B_1 u^3 + B_0 u^2 + Au$$

(15)
$$\varphi_r(u) = \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1} u^r + \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} u^{r-1} + \cdots$$
$$+ \frac{2p-2r}{2} B_0 u + \frac{2p-2r-1}{2} A$$

ist,

$$(16) \qquad t_n^{(r)} = \left[\frac{1}{\sqrt{R_1(u)}} \int_0^u \frac{\varphi_r(u)\,du}{u^{r-p+1}\sqrt{R_1(u)}} \right]_{u^n - p},$$

worin $r = 0, 1, 2, \cdots p-1$ zu setzen und $n > 2p-1$ zu nehmen ist.

Da $p - r - 1$ eine positive ganze Zahl ist, so folgt:

$$(17) \quad \int_0^u \frac{\varphi_r(u)\,du}{u^{r-p+1}\sqrt{R_1(u)}} = \int_0^u \frac{u^{p-r-1}\varphi_r(u)\,du}{\sqrt{R_1(u)}} =$$

$$\frac{2p-r-1}{1} B_{r-1} \int_0^u \frac{u^{p-1}\,du}{\sqrt{R_1(u)}} + \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} \int_0^u \frac{u^{p-2}\,du}{\sqrt{R_1(u)}} + \cdots$$

$$+ \frac{2p-2r}{2} B_0 \int_0^u \frac{u^{p-r}\,du}{\sqrt{R_1(u)}}$$

$$+ \frac{2p-2r-1}{2} A \int_0^u \frac{u^{p-r-1}\,du}{\sqrt{R_1(u)}}.$$

Beachtet man nun, dass, wenn

$$\frac{1}{\sqrt{R_1(u)}} = A^{-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} + a_1 u^{\frac{1}{2}} + a_2 u^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

gesetzt wird, vermöge des Werthes

$$u^{p-r-1}\varphi_r(u) = \frac{2p-2r-1}{2} A u^{p-r-1} + \frac{2p-2r}{2} B_0 u^{p-r} + \cdots$$

$$+ \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1} u^{p-1},$$

in der Umgebung des Nullpunktes

$$\frac{u^{p-r-1}\varphi_r(u)}{\sqrt{R_1(u)}} = \frac{2p-2r-1}{2} A^{\frac{1}{2}} u^{p-r-\frac{3}{2}} + \text{steigende Potenzen von } u,$$

also

$$\int_0^u \frac{u^{p-r-1}\varphi_r(u)}{\sqrt{R_1(u)}} = A^{\frac{1}{2}} u^{p-r-\frac{1}{2}} + \text{steigende Potenzen von } u,$$

und daher

$$\frac{1}{\sqrt{R_1(u)}} \int_0^u \frac{u^{p-r-1}\varphi_r(u)}{\sqrt{R_1(u)}} = u^{p-r-1} + \text{steigende Potenzen von } u$$

wird, so folgt, dass die Entwicklung dieses Ausdruckes mit einem ganzen Polynom von der Form

$$u^{p-r-1} + M_0 u^{p-r} + M_1 u^{p-r+1} + \cdots + M_{r-1} u^{p-1}$$

beginnt, dessen Coefficienten aus den Coefficienten des Polynoms

$R_1(u)$ zusammengesetzt sind, und dass somit nach (16), da n die Werthe

$$2p,\quad 2p+1,\quad 2p+2,\quad \cdots$$

annehmen darf, vermöge (17) sich die Beziehung ergiebt

$$(18)\quad \int \frac{\left(\frac{2p-r-1}{2}B_{r-1}u^{p-1}+\frac{2p-r-2}{2}B_{r-2}u^{p-2}+\cdots+\frac{2p-2r}{2}B_0u^{p-r}+\frac{2p-2r-1}{2}Au^{p-r-1}\right)du}{\sqrt{R_1(u)}}$$
$$=(u^{p-r-1}+M_0u^{p-r}+\cdots+M_{r-1}u^{p-1})\sqrt{R_1(u)}+\sum_0^\infty{}_\nu\, l^{(r)}_{2p+\nu}u^{p+\nu},$$

worin das auf der linken Seite der Gleichung befindliche Integral ein Integral erster Gattung ist und $\sqrt{R_1(u)}$ die zu $\sqrt{R(t)}$ reciproke Irrationalität; damit wäre die Relation zwischen den Coefficienten l der Integrale zweiter Gattung des vorgelegten Integrales und den Entwicklungscoefficienten eines zur reciproken Irrationalität gehörigen Integrales erster Gattung gefunden.

Setzen wir ferner die Grösse $k_n^{(r)}$ in die Form

$$(19)\qquad k_n^{(r)}=-\left[\frac{1}{\sqrt{R(t)}}\int_0^t\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{n-1}}$$

worin $r=p,\ p+1,\ \cdots\ 2p-1$ ist, so wird wieder mit Hülfe der oben benutzten Substitution und Bezeichnungen

$$(20)\qquad k_n^{(r)}=\left[\frac{1}{\sqrt{R_1(u)}}\int_0^u\frac{\varphi_{p+\alpha}(u)\,du}{u^{\alpha+1}\sqrt{R_1(u)}}\right]_{u^{n-p}},$$

wenn

$$r=p+\alpha,\qquad \alpha=0,1,2,\cdots p-1$$

und

$$(21)\quad \varphi_{p+\alpha}(u)=\frac{p-\alpha-1}{2}B_{p+\alpha-1}u^{p+\alpha}+\frac{p-\alpha-2}{2}B_{p+\alpha-2}u^{p+\alpha-1}+\cdots+\frac{-2\alpha}{2}B_0u+\frac{-2\alpha-1}{2}A$$

ist.

Nun ist aber unmittelbar durch Differentiation zu sehen, dass

$$\frac{d\cdot\frac{\sqrt{R_1(u)}}{u^{\alpha+1}}}{du}=\frac{u^{2p+1}(p-\alpha-\frac12)B_{2p-1}+u^{2p}(p-\alpha-1)B_{2p+2}+u^{2p-1}(p-\alpha-\frac32)B_{2p-3}+\cdots+u^{p+\alpha+2}\left(\frac{p-\alpha}{2}\right)B_{p+\alpha}+u^{p+\alpha+1}\left(\frac{p-\alpha-1}{2}\right)B_{p+\alpha-1}+u^{p+\alpha}\left(\frac{p-\alpha-2}{2}\right)B_{p+\alpha-2}+\cdots+u^2\left(\frac{-2\alpha}{2}\right)B_0u^2+\frac{-2\alpha-1}{2}Au}{u^{\alpha+2}\sqrt{R_1(u)}}$$

oder nach (21)

$$\frac{d\frac{\sqrt{R_1(u)}}{u^{\alpha+1}}}{du} = \frac{(p-\alpha-\frac{1}{2})B_{2p-1}u^{2p-\alpha-1}+(p-\alpha-1)B_{2p-2}u^{2p-\alpha-2}+\cdots+\frac{p-\alpha}{2}B_{p+\alpha}u^p}{\sqrt{R_1(u)}} + \frac{\varphi_{p+\alpha}(u)}{u^{\alpha+1}\sqrt{R_1(u)}},$$

woraus durch Integration folgt

$$(22)\qquad \int_0 \frac{\varphi_{p+\alpha}(u)\,du)}{u^{\alpha+1}\sqrt{R_1(u)}} = \int_0 \frac{\left(-(p-\alpha-\frac{1}{2})B_{2p-1}u^{2p-\alpha-1}-(p-\alpha-1)B_{2p-2}u^{2p-\alpha-2}-\cdots-\frac{p-\alpha}{2}B_{p+\alpha}u^p\right)du}{\sqrt{R_1(u)}} + \frac{\sqrt{R_1(u)}}{u^{\alpha+1}},$$

wobei zu bemerken, dass das rechts stehende Integral ein Integral der zweiten Gattung ist.

Nun ist aber in der Umgebung des Nullpunktes

$$\frac{1}{\sqrt{R_1(u)}} = A^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} + \text{steigende Potenzen von } u,$$

$$\frac{\varphi_{p+\alpha}(u)}{u^{\alpha+1}} = \frac{-2\alpha-1}{2}Au^{-\alpha-1} + \text{steigende Potenzen von } u,$$

daher

$$\frac{\varphi_{p+\alpha}(u)}{u^{\alpha+1}\sqrt{R_1(u)}} = \frac{-2\alpha-1}{2}A^{\frac{1}{2}}u^{-\alpha-\frac{3}{2}} + \text{steigende Potenzen von } u$$

und somit

$$\int_0 \frac{\varphi_{p+\alpha}(u)\,du}{u^{\alpha+1}\sqrt{R_1(u)}} = A^{\frac{1}{2}}u^{-\alpha-\frac{1}{2}} + \text{steigende Potenzen von } u,$$

so dass

$$\frac{1}{\sqrt{R_1(u)}}\int_0 \frac{\varphi_{p+\alpha}(u)\,du}{u^{\alpha+1}\sqrt{R_1(u)}} = u^{-\alpha-1} + \text{steigende Potenzen von } u$$

wird. Daraus folgt aber unmittelbar nach Gleichung (20):

$$\frac{1}{\sqrt{R_1(u)}}\int_0 \frac{\varphi_{p+\alpha}(u)\,du}{u^{\alpha+1}\sqrt{R_1(u)}} = u^{-\alpha-1}+N_0u^{-\alpha}+N_1u^{-\alpha+1}+\cdots+N_{p-1+\alpha}u^{p-1}+\sum_0^\infty{}_\nu k_{2p+\nu}^{(p+\alpha)}u^{p+\nu}$$

und daher

$$(23)\quad \int_0 \frac{\varphi_r(u)\,du}{u^{r-p+1}\sqrt{R_1(u)}} = \sqrt{R_1(u)}\left[u^{p-r-1}+N_0u^{p-r}+N_1u^{p-r+1}+\cdots+N_{r-1}u^{p-1}\right] + \sqrt{R_1(u)}\sum_0^\infty{}_\nu k^{(r)}_{2p+\nu}u^{p+\nu}.$$

Benutzt man endlich die Gleichung (22), indem man den dort gefundenen Werth der linken Seite dieser Gleichung hier einsetzt, so folgt für $r = p,\ p+1,\ \cdots\ 2p-1$

$$(24)\quad \int_0 \frac{\left((r-2p+\tfrac{1}{2})B_{2p-1}u^{3p-r-1}+(r-2p+1)B_{2p-2}u^{3p-r-2}+\cdots+\frac{2p-r}{2}B_ru^p\right)du}{\sqrt{R_1(u)}} =$$

$$\sqrt{R_1(u)}\left[N_0u^{p-r}+N_1u^{p-r+1}+\cdots+N_{r-1}u^{p-1}\right]+\sqrt{R_1(u)}\sum_0^\infty{}_\nu k^{(r)}_{2p+\nu}u^{p+\nu},$$

und hierdurch ist das Integral zweiter Gattung ermittelt, dessen Entwicklungscoefficienten in der Umgebung des Nullpunktes die Coefficienten der Reductionsformel des oben vorgelegten Integrales

$$\int \frac{z^{2p+\nu}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

liefern. Eine weitere Ausführung dieser Beziehungen brauche ich um so weniger zu geben; als es mir nur darauf ankam, die eigentliche Quelle jener Relationen anzugeben, welche für elliptische Functionen wegen des unmittelbaren Zusammenhanges des reciproken Polynoms mit dem ursprünglichen eine einfachere Gestalt annehmen.

Dresden, den 20. December 1875.

Zur Theorie des optischen Drehvermögens von Krystallen.

Von L. Sohncke in Carlsruhe.

§ 1.

Einleitung.

Welcher Ursache die Drehung der Polarisationsebene im Quarz und anderen Krystallen zuzuschreiben sei, ist noch eine offene Frage. Zwar hat Fresnel als nächste Ursache die Zerlegung eines der Axe parallel einfallenden Strahls in 2 entgegengesetzt circulare von verschiedener Geschwindigkeit erkannt; und Airy konnte, hiervon ausgehend, nachweisen, dass alle hergehörigen Erscheinungen des Quarz ihre Erklärung finden, wenn man annimmt, ein in beliebiger Richtung einfallender Strahl zerlege sich im Quarz im Allgemeinen in 2 elliptisch polarisirte Strahlen. Der Unterschied ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, sowie das Axenverhältniss der Schwingungsellipsen wurden sodann von Jamin*) gemessen. Aber die eigentliche Ursache für dieses eigenthümliche Verhalten war hierdurch nicht erklärt.

Der Lösung dieser Frage hat man sich von anderer Seite auf einem merkwürdigen Wege zu nähern gesucht. Nachdem nämlich Mac Cullagh durch Probiren gefunden hatte, welche Glieder man zu den gewöhnlichen optischen Elasticitätsgleichungen hinzufügen müsse, damit aus den so vervollständigten Gleichungen die Drehung der Polarisationsebene folge, gelang es Herrn Carl Neumann für diese Zusatzglieder eine mechanische Deutung zu finden; er wies nämlich nach**), dass sich die Mac Cullagh'schen Gleichungen ergeben, wenn man die Annahme macht: „die relative Verrückung eines Aethertheilchens gegen ein anderes wirke auf letzteres ebenso, wie das Element eines elektrischen Stroms auf einen Magnetpol.“ Auch Clebsch***) ist selbst-

*) Ann. d. Ch. et d. Ph. III^me^ Série, 1850, t. 30, pag. 55.

**) Die magnetische Drehung der Polarisationsebene. Halle, Waisenhaus, 1863.

***) Theorie der circularpolarisirenden Medien. § 2. In Borchardt's Journ. f. Math. Bd. 57.

ständig auf dieselbe Deutung der etwas allgemeineren Zusatzglieder gekommen, welche Cauchy angegeben hatte.

Eine andere Ansicht über die Ursache des Drehvermögens hat Herr Boltzmann geäussert*). Weil nämlich die Rechnung ergebe, dass bei verschwindend kleiner Distanz zweier Aethertheilchen die Drehung der Polarisationsebene nicht möglich sei (ebensowenig wie die Dispersion durch Brechung), so könne dieselbe „bloss daher rühren, dass die Wellenlänge nicht mehr sehr gross gegenüber den Dimensionen der Wirkungssphäre eines Moleküls sei." Obgleich Herr Boltzmann die Theorie nicht entwickelt, musste seine Ansicht doch erwähnt werden, weil sie für ihn der Anlass gewesen ist, jenen — freilich doch nur als eine empirische Formel aufzufassenden — Ausdruck für die Abhängigkeit der Drehung von der Wellenlänge aufzustellen, durch welchen die Beobachtungen besser als durch die früheren Formeln von Biot und Stefan wiedergegeben werden.

Diese theoretischen Versuche geben keine Rechenschaft über den Zusammenhang des Drehvermögens mit der Structur der drehenden Krystalle, und doch ist dieser Zusammenhang ein so inniger, dass sich bei allen krystallisirten drehenden Substanzen die rechtsdrehende Varietät von der linksdrehenden schon äusserlich durch die Lage gewisser Krystallflächen unterscheidet (wenn auch diese Flächen nicht immer bei allen Exemplaren ausgebildet sind).

Ein Versuch, diesen Zusammenhang zu berücksichtigen, liegt in der Briot'schen Theorie vor**). Zwar die einfache, schon von Fresnel gehegte Vorstellung, dass die Aethermoleküle im Quarz in Schrauben geordnet seien, deren Axen der optischen Axe parallel, zeigt sich nach Herrn Briot's Rechnungen unvermögend zur Erklärung der optischen Drehung, indem die einfache Torsion in einer Schraubenlinie keinerlei Wirkung auf die der Schraubenaxe parallelen Strahlen ausübt. Daher muss die Dissymmetrie des Aethers in den drehenden Krystallen eine complicirtere sein. Weil nun die Rechnung lehrt, dass sich ein zur Axe der Aetherschrauben senkrechter Strahl in 2 entgegengesetzt rotirende elliptische Strahlen von verschiedener Geschwindigkeit theilt, so macht Herr Briot die Annahme, der Aether im Quarz sei geordnet nach Schraubenlinien von durchweg gleichem Drehungssinn, aber verschiedener Richtung, nämlich so, dass die Schraubenaxen mit den Radien der sechsseitigen Basis des Quarzprismas der Reihe nach zusammenfallen. Hieraus ergeben sich wirklich Formeln, welche die Er-

*) Ueber den Zusammenhang der Drehung der Polarisationsebene und der Wellenlänge. In Poggendorff's Annalen. Jubelband.

**) Ch. Briot: Versuche über die math. Theorie des Lichts. Deutsch von Klinkerfues. 1867. (Original 1863) Buch IV, Cap. 3. Krystalle mit Circularpolarisation. Siehe auch die Vorrede p. XVIII—XXI.

scheinungen des Quarz im Wesentlichen darstellen. Trotzdem scheint mir die Briot'sche Theorie nicht naturgemäss; vor allen Dingen fehlt der Nachweis, wie die, durch die Trapezflächen des Quarz sich verrathende Anordnung der Massentheilchen nach Schrauben, deren Axen der Hauptaxe *parallel* sind, im Aether schraubenförmige Anordnungen *senkrecht* zur Hauptaxe erzeugen kann. Wenn man also die Drehung der Polarisationsebene in einen unmittelbareren Zusammenhang mit der Structur der Krystalle bringen könnte, so würde, wie mir scheint, dadurch eine naturgemässere Theorie angebahnt sein.

Dieser Versuch ist in der vorliegenden Abhandlung gemacht. Ihr Gedankengang ist kurz folgender: Die optische Drehung des Quarz lässt sich, wie Herr Reusch 1869 gezeigt hat*), durch rein mechanische Mittel ziemlich vollkommen nachahmen, indem man nämlich eine grössere Anzahl Blättchen zweiaxigen Glimmers von möglichst gleicher, sehr geringer Dicke in der Weise aufeinanderschichtet, dass jedes folgende gegen das vorhergehende aus ursprünglich völlig paralleler Lage um 60^0 (oder 45^0), immer in demselben Sinn, gedreht ist. Ein solches Präparat zeigt fast dieselben optischen Erscheinungen wie eine senkrecht zur Axe geschnittene Quarzplatte, und zwar wie ein rechts- oder linksdrehender Quarz, je nach dem Sinne der wendeltreppförmigen Aufschichtung. Auch zeigen sich bei Aufeinanderlegung einer rechts- und einer linksdrehenden Glimmercombination (von gleich viel Blättchen gleicher Beschaffenheit) die Airy'schen Spiralen vorzüglich deutlich. Nur insofern weicht das Verhalten des Präparats von dem des Quarz ab, als sich im Polarisationsapparat, bei Drehung des Präparats in seiner eigenen Ebene, gewisse kleine Aenderungen der Farbenerscheinung einstellen. In Bezug hierauf vermuthet Herr Reusch, dass sich das Verhalten der Glimmercombination dem des *„Quarz um so mehr nähern wird, je dünner die Lamellen und je grösser die Zahl der Umgänge."*

Ich entwickle nun im Folgenden die Theorie dieser Glimmercombinationen für senkrechten Durchgang der Strahlen, und wende sie dann auf den Fall an, dass die mit einer gewissen, von der optischen Beschaffenheit der Blättchen abhängenden Zahl multiplicirte Dicke der Blättchen klein gegen die Wellenlänge ist. *In diesem Falle ergiebt sich für die Drehung der Polarisationsebene dasselbe Gesetz, welches beim Quarz als das, von Boltzmann vervollständigte, Biot'sche Gesetz bekannt ist.* Für die Berechtigung, dem Quarz eine derartige Structur zuzuschreiben, verweise ich alsdann noch auf meine allgemeine Theorie der Krystallstructur.

---

*) Monatsbericht der Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin, Gesammtsitzung vom 8. Juli 1869, p. 530—538. Auch in Poggendorff's Annalen Bd. 138, p. 628.

Abschnitt I.

Theorie der Glimmercombination von Reusch für senkrechten Durchgang der Strahlen.

§ 2.

Vorbereitungen.

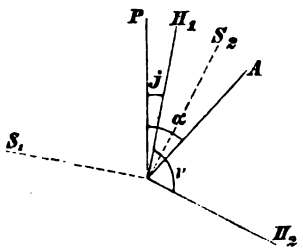
Ein geradlinig polarisirter, senkrecht auf das erste Blättchen der Combination fallender Strahl zerlegt sich beim Durchgang durch das Blättchen in 2 aufeinander senkrecht polarisirte Strahlen, welche in den folgenden Blättchen entsprechende Zerlegungen erfahren; aus dem letzten Blättchen treten schliesslich in ein und derselben geraden Linie 2 Strahlen aus, die bezüglich im Hauptschnitt des letzten Blättchens und senkrecht dazu polarisirt sind. Beide sind im Allgemeinen in verschiedener Phase und setzen sich daher zu einem elliptisch polarisirten Strahl zusammen, der alsdann auf den Analysator fällt.

Zum Verständniss des eigenthümlichen Verhaltens der Glimmercombination im Polarisationsapparat genügt es nun schon, *eine nur aus 3 Blättchen aufgeschichtete Combination zu betrachten.* Ich nehme jedes Blättchen gegen das vorhergehende unter 120^0 gedreht an, was bezüglich des optischen Verhaltens ganz auf dasselbe hinauskommt, als sei die Aufschichtung mit einem Drehungswinkel von 60^0, jedoch im entgegengesetzten Drehungssinn, ausgeführt. Dann besteht z. B. eine 24 Blättchen enthaltende Combination, wie sie Herr Steeg in Homburg herstellt, aus 8 solchen parallel aufeinandergelegten Blättchentriaden.

Ich verfolge nun den Durchgang durch die einzelnen Blättchen einer Triade, betrachte die 2 aus dem letzten Blättchen austretenden Strahlen genauer, und untersuche schliesslich den den Analysator verlassenden Strahl. Hierbei werden folgende üblichen Annahmen gemacht, die für den Vorgang selbst unwesentlich sind, aber sehr zur Vereinfachung der Rechnung beitragen. Die Amplitude des einfallenden Strahls sei 1; beim Durchgang durch jede Grenzfläche dringt nun bloss ein Bruchtheil in das folgende Medium, jedoch wird der aus diesem Grunde hinzuzufügende Factor als für unsre Betrachtung einflusslos weggelassen; ebenso wird von der geringen Absorption in den Krystallblättchen und ihrer eventuellen Verschiedenheit für beide Strahlen abgesehn. Ferner denke man den Ursprung des Strahls unmittelbar am ersten Blättchen, denke die Blättchen lückenlos aneinanderliegend, und betrachte die austretenden Strahlen unmittelbar beim Verlassen des letzten Blättchens; auch die durch den Analysator bewirkte Zerlegung denke man unmittelbar an der Austrittsfläche des letzten Blättchens vor sich gehend. — Es bedeute:

d die bei allen Blättchen gleiche Blättchendicke;
T die Oscillationsdauer des angewandten Lichtstrahls;
h_n die zur Zeit t vorhandene Entfernung des Aethertheilchens aus der Gleichgewichtslage bei dem im Hauptschnitt (H_n) des n^{ten} Blättchens polarisirten Strahl an seiner Austrittsstelle aus dem Blättchen;
s_n dasselbe für den senkrecht zum Hauptschnitt (nach S_n) polarisirten Strahl;
o und e die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der, bezüglich im Hauptschnitt und senkrecht dazu polarisirten, Wellenebenen;
j den Winkel des Hauptschnitts H_1 des ersten Blättchens mit der Polarisationsebene P des einfallenden Strahls;
ν den Winkel der Hauptschnitte zweier aufeinanderfolgender Blättchen [erst später $= 120^0$ gesetzt].

Als Normalfall, in dem die Winkel j und ν beide positiv gerechnet werden, wählen wir den, wo die Ebene P sich erst um den $\sphericalangle j$ und dann in demselben Sinne weiter um den $\sphericalangle \nu$ drehen muss, damit sie erst mit H_1 und dann mit H_2 zusammenfalle.



Die Figur zeigt den Schnitt der Polarisationsebenen: des Polarisators P, Analysators A, und der 4 bei 2 Blättchen auftretenden Strahlen, mit der Zeichnungsebene, welche senkrecht zum Strahl ist.

Unter obigen Voraussetzungen haben die 2 aus dem ersten Blättchen tretenden, resp. nach H_1 und S_1 polarisirten Strahlen die Gleichungen:

$$h_1 = \cos j \cdot \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{d}{o}\right),$$

$$s_1 = \sin j \cdot \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{d}{e}\right).$$

Jeder dieser Strahlen liefert beim Eintritt in das zweite Blättchen eine im Hauptschnitt des letzteren (H_2) und eine senkrecht dazu (nach S_2) polarisirte Componente; also haben die beiden das zweite Blättchen durchsetzenden Strahlen bei ihrem *Eintritt* die Gleichungen:

$$h'' = h_1 \cos \nu - s_1 \sin \nu,$$

$$s'' = s_1 \cos \nu + h_1 \sin \nu;$$

bei ihrem *Austritt* aber die Gleichungen:

$$h_2 = \cos\nu \cdot \cos j \cdot \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{2d}{o}\right) - \sin\nu \cdot \sin j \cdot \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{o}\right)d\right),$$

$$s_2 = \cos\nu \cdot \sin j \cdot \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{2d}{e}\right) + \sin\nu \cdot \cos j \cdot \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \left(\frac{1}{o} + \frac{1}{e}\right)d\right).$$

In das dritte Blättchen treten die nach H_3 und S_3 polarisirten Strahlen:

$$h''' = h_2 \cos \nu - s_2 \sin \nu ,$$
$$s''' = s_2 \cos \nu + h_2 \sin \nu .$$

Aus dem dritten Blättchen endlich treten die Strahlen:

$$\left\{\begin{aligned} h_3 = {} & \cos\nu \cdot \left\{\cos\nu\cos j \cdot \sin\tfrac{2\pi}{T}\left(t - \tfrac{3d}{o}\right) - \sin\nu\sin j \cdot \sin\tfrac{2\pi}{T}\left(t - \left(\tfrac{1}{e} + \tfrac{2}{o}\right) d\right)\right\} \\ & - \sin\nu \cdot \left\{\cos\nu\sin j \cdot \sin\tfrac{2\pi}{T}\left(t - \left(\tfrac{2}{e} + \tfrac{1}{o}\right) d\right) + \sin\nu\cos j \cdot \sin\tfrac{2\pi}{T}\left(t - \left(\tfrac{2}{o} + \tfrac{1}{e}\right) d\right)\right\}, \\ s_3 = {} & \cos\nu \cdot \left\{\cos\nu\sin j \cdot \sin\tfrac{2\pi}{T}\left(t - \tfrac{3d}{e}\right) + \sin\nu\cos j \cdot \sin\tfrac{2\pi}{T}\left(t - \left(\tfrac{1}{o} + \tfrac{2}{e}\right) d\right)\right\} \\ & + \sin\nu \cdot \left\{\cos\nu\cos j \cdot \sin\tfrac{2\pi}{T}\left(t - \left(\tfrac{2}{o} + \tfrac{1}{e}\right) d\right) - \sin\nu\sin j \cdot \sin\tfrac{2\pi}{T}\left(t - \left(\tfrac{2}{e} + \tfrac{1}{o}\right) d\right)\right\}. \end{aligned}\right.$$

Man bemerke, dass der Ausdruck für h_3 in jenen für s_3 übergeht (und ebenso allgemein der für h_n in jenen für s_n), wenn man j durch $j - 90^0$ ersetzt und gleichzeitig o und e mit einander vertauscht.

(Hätte man den Ursprung des Strahls nicht an der Eintrittsfläche angenommen, die austretenden Strahlen nicht *an* der Oberfläche untersucht und die Zwischenräume der Blättchen nicht als verschwindend, sondern mit irgend einem isotropen Stoff erfüllt angenommen — Copalfirniss bei dem wirklichen Präparat —, so hätte man für h_3 und s_3 Ausdrücke erhalten, die sich von den obigen nur dadurch unterscheiden, dass $t - \left(\frac{x}{V} + \frac{x_1}{V_1}\right)$ an Stelle von t stände, wo x und x_1 die Längen der resp. in Luft und im Zwischenmedium zurückgelegten Wege, V und V_1 die zugehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bedeuten. Die Einsetzung dieses Ausdrucks für t würde an den folgenden Entwickelungen nichts ändern.)

§ 3.

Umformung der Gleichungen (1). Berechnung der Amplituden der 2 das dritte Blättchen verlassenden Strahlen.

Die Strahlengleichungen h_3 und s_3 sind auf die Form zu bringen:

$$h_3 = A_h \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{D_h}{\lambda}\right),$$
$$s_3 = A_s \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{D_s}{\lambda}\right),$$

wo λ die Wellenlänge in Luft $= V \cdot T$.

Von den 4, nach Richtung und Schwingungsebene zusammenfallenden Strahlen, aus denen h_3 (und ebenso s_3) besteht, sind 2 in gleicher Phase, setzen sich also unmittelbar durch Addition ihrer Am-

plituden zusammen. Somit bleiben nur noch 3 Strahlen zusammenzusetzen, und zwar sowohl bei h_3 als bei s_3. Es ist nämlich:

$$(2)\quad \begin{cases} h_3 = \begin{cases} \cos^2\nu\cos j\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{3d}{o}\right), \\ -\sin\nu\sin(\nu+j)\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\left(\frac{2}{o}+\frac{1}{e}\right)d\right), \\ -\sin\nu\cos\nu\sin j\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\left(\frac{1}{o}+\frac{2}{e}\right)d\right); \end{cases} \\ s_3 = \begin{cases} \cos^2\nu\cdot\sin j\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{3d}{e}\right), \\ +\sin\nu\cdot\cos(\nu+j)\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\left(\frac{2}{e}+\frac{1}{o}\right)d\right), \\ +\sin\nu\cdot\cos\nu\cdot\cos j\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\left(\frac{1}{e}+\frac{2}{o}\right)d\right). \end{cases} \end{cases}$$

Nun setzen sich n nach Richtung und Schwingungsebene zusammenfallende Strahlen mit den Gleichungen:

$$y_n = a_n\cdot\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\delta_n}{\lambda}\right)$$

nach dem Fresnel'schen Parallelogramm zu 1 Strahl:

$$h = A\cdot\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{D}{\lambda}\right)$$

zusammen, wo A und D durch die Gleichungen gegeben sind:

$$(3)\quad A^2 = \left(\sum\nolimits_n a_n\cdot\sin\frac{\delta_n}{\lambda}2\pi\right)^2+\left(\sum\nolimits_n a_n\cdot\cos\frac{\delta_n}{\lambda}2\pi\right)^2,$$

$$(4)\quad \operatorname{tg}\frac{D}{\lambda}2\pi = \frac{\sum a_n\cdot\sin\frac{\delta_n}{\lambda}2\pi}{\sum a_n\cdot\cos\frac{\delta_n}{\lambda}2\pi}.$$

Also ergiebt sich mit Anwendung von Gleichung (3):

$$A_h^2 = \left[a\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3d}{o}-b\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2}{o}+\frac{1}{e}\right)d-c\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{o}+\frac{2}{e}\right)d\right]^2 + \left[a\cdot\cos\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3d}{o}-b\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2}{o}+\frac{1}{e}\right)d-c\cdot\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{o}+\frac{2}{e}\right)d\right]^2,$$

$$A_s^2 = \left[a'\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3d}{e}+b'\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2}{e}+\frac{1}{o}\right)d+c'\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{e}+\frac{2}{o}\right)d\right]^2 + \left[a'\cdot\cos\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3d}{e}+b'\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2}{e}+\frac{1}{o}\right)d+c'\cdot\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{e}+\frac{2}{o}\right)d\right]^2,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(5)\quad a=\cos^2\nu\cdot\cos j;\quad b=\sin\nu\cdot\sin(\nu+j);\quad c=\sin\nu\cos\nu\sin j;$$

$$(5')\quad a'=\cos^2\nu\cdot\sin j;\quad b'=\sin\nu\cdot\cos(\nu+j);\quad c'=\sin\nu\cos\nu\cos j.$$

Man findet leicht:

$$A_h^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2b(a-c)\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{o}-\frac{1}{e}\right)d - 2ac\cos 2\cdot\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{o}-\frac{1}{e}\right)d.$$

Hieraus folgt, wenn man zugleich zur Abkürzung:

$$\frac{\pi}{T}\left(\frac{1}{o}-\frac{1}{e}\right)\cdot d = \xi \tag{6}$$

setzt, durch leichte Umformung:

$$A_h^2 = (a-b-c)^2 + 4b(a-c)\sin^2\xi + 4ac\sin^2 2\xi\cdot$$

Einsetzung der Werthe für a, b, c giebt den schliesslichen Ausdruck für A_h^2. Aus ihm erhält man, zufolge der bei Gleichung (1) gemachten Bemerkung, den Ausdruck für A_s^2, wenn man j durch $j - 90$ ersetzt, und o und e miteinander vertauscht. Also:

$$\left\{\begin{aligned} A_h^2 &= \cos^2(2\nu+j) + \sin 2\nu\cdot\sin(2\nu+2j)\cdot\sin^2\xi \\ &\quad + \cos^2\nu\cdot\sin 2\nu\cdot\sin 2j\cdot\sin^2 2\xi, \\ A_s^2 &= \sin^2(2\nu+j) - \sin 2\nu\cdot\sin(2\nu+2j)\cdot\sin^2\xi \\ &\quad - \cos^2\nu\cdot\sin 2\nu\cdot\sin 2j\cdot\sin^2 2\xi. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Man bemerkt, dass:

$$A_h^2 + A_s^2 = 1. \tag{8}$$

Diese Relation, welche die Gleichheit der Intensität *dicht vor und hinter* der Glimmertriade ausspricht, ist eine selbstverständliche Folge unserer Annahmen, nach denen von allen Intensitätsverlusten abgesehen werden sollte. In Wahrheit wird die Summe der Intensitäten beider austretenden Strahlen kleiner sein als die Intensität des eintretenden; jedoch kann sie stets $= 1$ gesetzt werden, weil das ja nur auf ein Messen der Intensität nach anderer Masseinheit hinauskommt.

Setzen wir jetzt, dem wirklichen Glimmerpräparat entsprechend, $\nu = 120^0$, so finden wir für die Amplituden der 2 aus der Triade austretenden, senkrecht zu einander polarisirten Strahlen die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} A_h^2 &= \tfrac{1}{4}(\cos j - \sqrt{3}\cdot\sin j)^2 + \tfrac{\sqrt{3}}{4}(\sin 2j + \sqrt{3}\cdot\cos 2j)\cdot\sin^2\xi \\ &\quad - \tfrac{\sqrt{3}}{8}\sin 2j\cdot\sin^2 2\xi, \\ A_s^2 &= \tfrac{1}{4}(\sin j + \sqrt{3}\cdot\cos j)^2 - \tfrac{\sqrt{3}}{4}(\sin 2j + \sqrt{3}\cdot\cos 2j)\cdot\sin^2\xi \\ &\quad + \tfrac{\sqrt{3}}{8}\sin 2j\cdot\sin^2 2\xi. \end{aligned}\right. \tag{I}$$

§ 4.

Berechnung des Phasenunterschiedes der 2 das dritte Blättchen verlassenden Strahlen.

Die Phasen der beiden austretenden Strahlen sind nach Gleichung (4) bestimmt durch die Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\frac{D_h}{\lambda}2\pi = \frac{a\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3d}{o} - b\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2}{o}+\frac{1}{e}\right)d - c\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{o}+\frac{2}{e}\right)d}{a\cdot\cos\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3d}{o} - b\cdot\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2}{o}+\frac{1}{e}\right)d - c\cdot\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{o}+\frac{2}{e}\right)d},$$

$$\operatorname{tg}\frac{D_s}{\lambda}2\pi = \frac{a'\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3d}{e} + b'\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2}{e}+\frac{1}{o}\right)d + c'\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{e}+\frac{2}{o}\right)d}{a'\cdot\cos\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3d}{e} + b'\cdot\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2}{e}+\frac{1}{o}\right)d + c'\cdot\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{e}+\frac{2}{o}\right)d},$$

deren rechte Seiten resp. mit $\frac{Z}{N}$ und $\frac{Z'}{N'}$ bezeichnet werden sollen. Hier haben a, b, c, a', b', c' die in (5) und (5′) angegebene Bedeutung. Für den Phasenunterschied $\frac{D_h - D_s}{\lambda}2\pi$ ergiebt sich nun die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\frac{D_h - D_s}{\lambda}2\pi = \frac{\frac{Z}{N} - \frac{Z'}{N'}}{1 + \frac{Z}{N}\cdot\frac{Z'}{N'}} = \frac{ZN' - NZ'}{ZZ' + NN'}.$$

Bei der Berechnung des Zählers $ZN' - NZ'$ fasse man immer diejenigen 2 Glieder zusammen, welche — eins aus ZN', das andre aus NZ' herrührend — mit demselben Product von zweien der Buchstabengrössen a, b, c, a', b', c', multiplicirt sind. Entsprechend verfahre man bei der Bildung des Nenners $ZZ' + NN'$. Benutzt man dann zugleich den Buchstaben ξ, Gleichung (6), so wird:

$$\text{(9)}\qquad \operatorname{tg}\frac{D_h - D_s}{\lambda}2\pi = \frac{aa'\cdot\sin 6\xi + (ab' - a'b)\sin 4\xi + (ac' - a'c - bb' + cc')\sin 2\xi}{aa'\cdot\cos 6\xi + (ab' - a'b)\cos 4\xi + (ac' - a'c - bb' - cc')\cos 2\xi - (bc' + b'c)},$$

wo der Zähler und Nenner der rechten Seite zur Abkürzung mit $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{N}$ bezeichnet werden sollen.

Behufs der Berechnung des Zählers $\mathfrak{Z}$ bedenke man, dass

$$\sin 6\xi = \sin 2\xi\cdot(3 - 4\sin^2 2\xi).$$

Dann erhält man:

$$\text{(10)}\qquad \mathfrak{Z} = \sin 2\xi\cdot(H - 4K\sin^2\xi),$$

wo

$$H = 3aa' + 2(ab' - a'b) + ac' - a'c - bb' + cc',$$
$$K = ab' - a'b + 4aa'\cdot\cos^2\xi.$$

Diese beiden Grössen sind nun zu berechnen; zunächst H. Aus den Definitionsgleichungen (5) und (5′) folgt:

$$aa' = \frac{\cos^4\nu \cdot \sin 2j}{2};$$
$$bb' = \tfrac{1}{2}\sin(2\nu+2j)\cdot(1-\cos^2\nu);$$
$$cc' = \tfrac{1}{2}\sin^2\nu\cdot\cos^2\nu\cdot\sin 2j;$$
$$ab' - a'b = \cos^2\nu\cdot\sin\nu\cdot\cos(\nu+2j);$$
$$ac' - a'c = \cos^3\nu\cdot\sin\nu\cdot\cos 2j.$$

Mit Hülfe dieser Werthe kann man successive bilden:

$$3aa'+cc' = \tfrac{1}{2}\sin 2j\cdot\cos^2\nu\cdot(1+2\cos^2\nu);$$
$$3aa'+cc'+ac'-a'c = \tfrac{1}{2}\sin 2j\cdot\cos^2\nu+\cos^3\nu\cdot\sin(\nu+2j);$$
$$3aa'+cc'+ac'-a'c+ab'-a'b = \tfrac{1}{2}\sin 2j\cdot\cos^2\nu+\cos^2\nu\cdot\sin(2\nu+2j);$$
$$3aa'+cc'+ac'-a'c+ab'-a'b-bb' =$$
$$= \cos^2\nu\cdot\left\{\frac{\sin 2j+\sin(2\nu+2j)}{2}+\sin(2\nu+2j)\right\}-\tfrac{1}{2}\sin(2\nu+2j);$$
$$H = \sin(2\nu+2j)\cdot(2\cos^2\nu-\tfrac{1}{2}).$$

Ohne Schwierigkeit ergiebt sich:

$$K = \cos^2\nu\cdot\{\sin\nu\cdot\cos(\nu+2j)+2\cos^2\nu\cdot\sin 2j\cdot\cos^2\xi\}.$$

Diese Werthe von H und K wären in Gleichung (10) einzusetzen. Jetzt soll aber sogleich der specielle Werth $\nu = 120^0$ eingeführt werden; *dann wird* $H = 0$. Man erkennt also, dass die Tangente des Phasenunterschiedes beider Strahlen in Bezug auf $\sin\xi$ von der dritten Ordnung ist, und zwar *nur* für unseren Fall $\nu = 120^0$ (und für $\nu = 60^0$, was aber im Wesentlichen auf dasselbe hinauskommt). Es wird:

$$(11)\qquad \mathfrak{Z} = \tfrac{1}{2}\sin^3\xi\cdot\cos\xi\cdot\{\sqrt{3}\cdot\cos 2j+\sin 2j\cdot(1+2\sin^2\xi)\}.$$

Zur Berechnung des Nenners $\mathfrak{N}$ (Gleichung (9)) bedenke man, dass:

$$\cos 6\xi = 1-2\sin^2\xi-4\cos 2\xi\cdot\sin^2 2\xi.$$

Dann erhält man:

$$(12)\qquad \mathfrak{N} = P-2Q\cdot\sin^2\xi-2R\sin^2 2\xi,$$

wo gesetzt ist:

$$P = (a'+b'+c')\cdot(a-b-c),$$
$$Q = aa'-cc'+ac'-a'c-bb',$$
$$R = ab'-a'b+2aa'\cdot\cos 2\xi.$$

Durch Einführung der Werthe für $a, b, \cdots$ ergiebt sich:

$$P = \tfrac{1}{2}\sin(4\nu+2j);$$
$$Q = \tfrac{1}{2}\cos 2\nu\cdot\sin(2\nu+2j);$$
$$R = \cos^2\nu\cdot[\sin\nu\cdot\cos(\nu+2j)+\cos^2\nu\cdot\sin 2j\cdot\cos 2\xi].$$

Diese Werthe wären in Gleichung (12) einzusetzen. Wir führen aber sofort den speciellen Werth $\nu = 120^0$ ein, und erhalten:

$$(13) \qquad \mathfrak{N} = \tfrac{1}{4}\{\sqrt{3}\cdot\cos 2j\cos^2\xi\cdot(1+2\sin^2\xi) - \sin 2j\cdot(1+\sin^2\xi)\cdot(1-4\sin^2\xi\cdot\cos^2\xi)\}.$$

Benutzt man die Werthe von $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{N}$ aus Gleichung (11) und (13) in der Gleichung (9), so erhält man für den Phasenunterschied der 2 aus der Triade austretenden, senkrecht aufeinander polarisirten Strahlen die Gleichung:

$$(II) \qquad \operatorname{tg}\frac{D_h - D_s}{\lambda}2\pi = \frac{2\sin^2\xi\cos\xi\cdot\{\sqrt{3}\cdot\cos 2j+\sin 2j\cdot(1+2\sin^2\xi)\}}{\{\sqrt{3}\cdot\cos 2j\cdot\cos^2\xi\cdot(1+2\sin^2\xi)-\sin 2j\cdot(1+\sin^2\xi)\cdot(1-4\sin^2\xi\cos^2\xi)\}}.$$

§ 5.

Wann sich beide Strahlen zu 1 Circularstrahl zusammensetzen?

Die Formeln (I) und (II) ermöglichen es, den elliptischen Strahl, zu dem sich h_3 und s_3 im Allgemeinen zusammensetzen, genauer zu untersuchen. — Sollen beide einen Circularstrahl liefern, so ist die Erfüllung folgender 2 Bedingungen erforderlich:

1) Die Differenz des Ursprungs $D_h - D_s$ muss $(2m+1)\cdot\frac{\lambda}{4}$ betragen (m = ganze Zahl).
2) Die Amplituden müssen gleich sein.

In Foge der ersten Bedingung muss $\operatorname{tg}\frac{D_h - D_s}{\lambda}2\pi = \infty$, also der Nenner des sub (II) stehenden Ausdrucks $= 0$ sein. Hieraus folgt:

$$(14) \qquad \operatorname{tg} 2j = \frac{\sqrt{3}\cdot\cos^2\xi\cdot(1+2\sin^2\xi)}{(1+\sin^2\xi)\cdot(1-4\sin^2\xi\cos^2\xi)}.$$

In Folge der zweiten Bedingung muss nach Gleichung (8) $A_h^2 = \frac{1}{2}$ sein. Hieraus folgt nach Gleichung (I):

$$(14') \qquad \operatorname{tg} 2j = -\frac{1-3\sin^2\xi}{\sqrt{3}\cdot\cos^2\xi\cdot(1+2\sin^2\xi)}.$$

Weil beide Bedingungen zugleich bestehn, so müssen die 2 gefundenen Werthe von tg $2j$ einander gleich sein. Die hieraus entspringende Gleichung ergiebt:

$$\sin^2\xi = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}.$$

Resultat: Nur wenn die Dicke der Blättchen und die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellenebenen in ihnen solche Werthe haben, dass $\sin^2\frac{\pi}{T}\left(\frac{1}{o}-\frac{1}{e}\right)d = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ ist, ist die Zusammensetzung beider aus

der Triade tretenden Strahlen zu 1 Circularstrahl überhaupt möglich. Sie tritt aber nur dann wirklich ein, wenn die Polarisationsebene des einfallenden Strahls mit dem Hauptschnitt des ersten Blättchens den aus Gleichung (14) oder (14') folgenden $\sphericalangle j$ bildet.

Weil, wie wir sehn werden, bei den wirklich hergestellten Glimmercombinationen $\sin^2 \xi$ einen viel kleineren Werth hat (etwas kleiner als 0,09 statt des obigen 0,794), *so tritt hier niemals ein Circularstrahl aus.*

§ 6.

Wann sich beide Strahlen zu einem geradlinig polarisirten zusammensetzen?

Soll die Schwingungsellipse in eine gerade Linie übergehn, so muss die Differenz des Ursprungs beider Componenten $m \cdot \frac{\lambda}{2}$ betragen ($m =$ ganze Zahl). Hieraus folgt $\operatorname{tg} \frac{D_h - D_s}{\lambda} 2\pi = 0$, also nach Gleichung (II):

$$(15) \qquad \sin^3 \xi \cdot \cos \xi \cdot [\sqrt{3} \cdot \cos 2j + \sin 2j \cdot (1 + 2 \sin^2 \xi)] = 0.$$

Diese Gleichung ist auf drei Arten erfüllbar, nämlich dadurch, dass der erste oder zweite oder dritte Factor verschwindet.

a) *Es sei* $\sin \xi = 0$. Wenn die Blättchen so beschaffen sind, dass diese Bedingung erfüllt ist, so ist der austretende Strahl unter allen Umständen geradlinig polarisirt. Wichtiger als das strenge Erfülltsein dieser Bedingung ist für unsere Untersuchung aber der Fall, *dass* $\sin \xi$ *nur einen kleinen Werth hat.* Dann tritt, welches auch das Azimuth j sein mag, ein elliptisch polarisirter Strahl aus, dessen Schwingungsellipse sehr gestreckt ist, der sich also nahezu wie ein geradlinig polarisirter Strahl verhält.

b) *Es sei* $\cos \xi = 0$. Obgleich dieser Werth den Phasenunterschied im Allgemeinen zu 0 macht, so darf man doch nicht schliessen, dass dies für jedes Azimuth j gilt. Denn für $j = 0$ und für $j = 90^0$ verwandelt sich Gleichung (II) in folgende:

$$\operatorname{tg} \frac{D_h - D_s}{\lambda} 2\pi = \frac{2 \cdot \sin^3 \xi}{\cos \xi \cdot (1 + 2 \sin^2 \xi)};$$

diese Gleichung lehrt aber, dass für $\cos \xi = 0$ die Differenz des Ursprungs beider Strahlen $(2m + 1) \frac{\lambda}{4}$ beträgt, so dass beide Strahlen jetzt sogar so weit als möglich davon entfernt sind, einen geradlinig polarisirten Strahl zu liefern. Bei dem wirklichen Glimmerpräparat ist übrigens $\cos \xi$ etwa $= 0{,}95$, so dass dieser Fall praktisch nicht in Betracht kommt.

c) *Es sei der dritte Factor der Gleichung* (15) = 0, so folgt:

$$\text{tg}\, 2j = -\frac{\sqrt{3}}{1+2\sin^2\xi}. \tag{16}$$

Hieraus folgt, dass für jede Glimmertriade (jedes gegebene ξ) ein (durch Gleichung (16) bestimmter) $\sphericalangle j$ existirt, für welchen beide austretenden Strahlen sich zu einem geradlinig schwingenden zusammensetzen.

Ausser den genannten giebt es noch 2 specielle Fälle, in denen nur 1 geradlinig polarisirter Strahl austritt: *nämlich wenn einer der beiden, resp. nach* H_3 *und* S_3 *polarisirten, Strahlen die Intensität* 0, *der andere also die Intensität* 1 *hat.* Die Gleichungen (I) geben:

$$\varrho \cdot \cos 2j + \sigma \cdot \sin 2j = +\text{ oder } -1,$$

je nachdem man A_h^2 oder $A_s^2 = 1$ setzt. Hier bedeutet:

$$\varrho = 1 - 3\sin^2\xi; \quad \sigma = \sqrt{3} \cdot \cos^2\xi \cdot (1+2\sin^2\xi);$$

also

$$\varrho^2 + \sigma^2 = 4 \cdot (1 - \cos^2\xi \cdot \sin^6\xi).$$

Die gefundene Gleichung liefert:

$$\pm \sin 2j = \frac{1}{\varrho^2+\sigma^2} \cdot \{\sigma \pm \varrho \cdot \sqrt{\varrho^2+\sigma^2-1}\}. \tag{17}$$

wo links + oder − zu nehmen ist, je nachdem A_h^2 oder $A_s^2 = 1$ gesetzt ward.

Diese Gleichung bestimmt jene Werthe des Azimuth j, für welche nur *ein* gradlinig (und zwar resp. nach H_3 oder S_3) polarisirter Strahl austritt.

Resultat: Sollen die 2 *aus der Glimmertriade tretenden Strahlen sich für jedes Azimuth* j *zu einem möglichst gestreckt elliptisch (oder ganz geradlinig) schwingenden Strahl zusammensetzen, so muss* sin ξ *möglichst klein (oder genau* = 0) *sein.* Ausserdem giebt es aber noch einige, durch die Gleichungen (16) und (17) bestimmte specielle Werthe des Azimuth j, für welche aus einer gegebenen Glimmertriade nur 1 geradlinig polarisirter Strahl austritt.

§ 7.

Ueber die durch die Glimmertriade bewirkte Drehung der Polarisationsebene.

Vermittelst der Gleichungen (I) und (II) liesse sich die Lage der Schwingungsellipse des austretenden Strahls ermitteln. Einfacher untersucht man diesen Strahl aber dadurch, dass man ihn durch eine Analysatorvorrichtung gehn lässt. Indem nun der elliptische Strahl in 2 geradlinige Componenten, bezüglich ∥ schwingend der grossen

und der kleinen Ellipsenaxe, zerlegt werden kann, so erkennt man, dass der aus dem Analysator kommende Strahl das Maximum der Intensität dann besitzen wird, wenn die Polarisationsebene des Analysators zusammenfällt mit der Polarisationsebene derjenigen Componente, die ‖ der grossen Ellipsenaxe schwingt. *Den Winkel, welchen jetzt die Polarisationsebene des Analysators mit der des Polarisators bildet, ist man — nach Analogie — berechtigt, als Drehungswinkel der Polarisationsebene des einfallenden Strahls, in Folge des Durchgangs durch die Glimmertriade, zu bezeichnen.* Behufs seiner Ermittelung berechnen wir zuerst die Intensität J des bei beliebiger Analysatorstellung aus letzterem tretenden Strahls, wobei α den $\sphericalangle$ der Polarisationsebenen von Polarisator und Analysator bedeutet, natürlich von P aus (vgl. die Figur) in demselben Sinne herum als $+$ gerechnet wie j. Darauf suchen wir jenen Werth von α, welcher die Intensität J zu einem Maximum macht.

Die Gleichung des den Analysator verlassenden Strahls ist:

$$y = h_3 \cdot \cos\beta + s_3 \sin\beta\,;$$

wo zur Abkürzung

$$j + 2\nu - \alpha = \beta \tag{18}$$

gesetzt ist, und wo h_3 und s_3 die in 2) angegebenen Werthe haben. Die Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$y = m \cdot \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{3d}{o}\right) + n \cdot \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{3d}{e}\right) +$$
$$+ p \cdot \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \left(\frac{2}{o} + \frac{1}{e}\right)d\right) + q \cdot \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \left(\frac{1}{o} + \frac{2}{e}\right)d\right),$$

wo gesetzt ist:

$$m = \cos^2\nu \cdot \cos j \cdot \cos\beta\,;$$
$$n = \cos^2\nu \cdot \sin j \cdot \sin\beta\,;$$
$$p = \sin\nu \cdot \left\{\cos\nu \cdot \cos j \cdot \sin\beta - \sin(\nu + j)\cos\beta\right\},$$
$$q = \sin\nu \cdot \left\{\cos(\nu + j) \cdot \sin\beta - \cos\nu \cdot \sin j \cdot \cos\beta\right\}.$$

Dieser Strahl besteht, wie man sieht, aus 4 Strahlen von derselben Richtung und Schwingungsebene. Seine Intensität J, d. h. sein Amplitudenquadrat, findet sich nach Gleichung (3):

$$J = \left[m\sin\frac{2\pi}{T}\frac{3d}{o} + n\sin\frac{2\pi}{T}\frac{3d}{e} + p\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2}{o} + \frac{1}{e}\right)d + q\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{o} + \frac{2}{e}\right)d\right]^2 +$$
$$+ \left[m\cos\frac{2\pi}{T}\frac{3d}{o} + n\cos\frac{2\pi}{T}\frac{3d}{e} + p\cdot\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2}{o} + \frac{1}{e}\right)d + q\cdot\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{o} + \frac{2}{e}\right)d\right]^2,$$

d. i. mit Benutzung des Buchstabens ξ (Gleichung (6)), und nach einer Entwickelung wie in § 3.:

$$J=(m+n+p+q)^2-4(mp+nq+pq)\sin^2\xi-4(mq+np)\sin^2 2\xi-4mn\sin^2 3\xi.$$

Die Berechnung der aus $m\ n\ p\ q$ zusammengesetzten Ausdrücke ergiebt:

$$\begin{aligned}(m+n+p+q)^2 &= \cos^2\alpha\,;\\ 4mn &= r\cdot\sin 2\beta\,;\\ 4\cdot(mp+nq+pq) &= g\sin 2\beta - h\cos 2\beta;\\ 4\cdot(mq+np) &= k\sin 2\beta - l\cos 2\beta\,,\end{aligned}$$

wo folgende Bezeichnungen eingeführt sind:

$$(19)\quad \begin{cases} g=\cos^2\nu\cdot\sin 2\nu\cdot\cos 2j-\sin^2\nu\cdot\sin(2\nu+2j)-\sin^2\nu\cdot\cos^2\nu\cdot\sin 2j,\\ h=\sin 2\nu\cdot\sin(2\nu+2j),\\ k=\cos\nu\cdot\sin 2\nu\cdot\cos(\nu+2j),\\ l=\cos^2\nu\cdot\sin 2\nu\cdot\sin 2j,\\ r=\cos^4\nu\cdot\sin 2j. \end{cases}$$

Drückt man jetzt $\sin^2 2\xi$ und $\sin^2 3\xi$ nur vermittelst Potenzen von $\sin^2\xi$ aus und fasst alle mit $\sin 2\beta$ multiplicirten Glieder zusammen, ebenso alle mit $\cos 2\beta$ multiplicirten, so wird:

$$(20)\qquad J=\cos^2\alpha - P\cdot\sin^2\xi\cdot\sin 2\beta + Q\cdot\sin^2\xi\cdot\cos 2\beta\,;$$

wo gesetzt ist:

$$(21)\quad \begin{cases} P=g+4k+9r-4(k+6r)\sin^2\xi+16r\sin^4\xi\,;\\ Q=h+4l-4l\sin^2\xi. \end{cases}$$

Um nun jenen Werth von α zu ermitteln, für welchen J ein Maximum wird, bildet man $\frac{\partial J}{\partial\alpha}$, — wobei zu beachten, dass nach Gleichung (18) $\beta=j+2\nu-\alpha$, während P, Q, ξ frei von α sind, — und setzt es $=0$. Daraus folgt die Gleichung:

$$(22)\qquad \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\sin^2\xi\cdot\{P\cdot\cos(4\nu+2j)+Q\sin(4\nu+2j)\}}{1-2\sin^2\xi\cdot\{P\cdot\sin(4\nu+2j)-Q\cos(4\nu+2j)\}}.$$

Dies ist die Bedingungsgleichung für den Eintritt sowohl des Maximums als des Minimums. In der That weiss man von vornherein, dass beide bei zwei aufeinander senkrechten Stellungen der Polarisationsebene des Analysators eintreten (bei denen nämlich die eine und die andere Axe der Schwingungsellipse in diese Polarisationsebene fällt). Hat also J für einen gewissen Winkel α' sein Maximum, wobei Gleichung (22) durch dieses α' befriedigt werden muss, so wird dieselbe Gleichung, wie man sieht, auch durch $\alpha'+90^0$ befriedigt.

Wenn $\sin\xi=0$, wie es z. B. bei Anwendung von nicht doppeltbrechenden Blättchen der Fall ist, so darf natürlich keine Drehung der

Polarisationsebene eintreten: dann entspricht also dem Intensitäts*maximum* der Werth $\alpha = 0$, dem Minimum der Werth $\alpha = 90^0$.

Wenn aber $\sin \xi$ klein ist, wodurch auch $\operatorname{tg} 2\alpha$ klein wird (denn P und Q sind ihrer Natur nach stets endliche Grössen), so entspricht — wegen der Continuität — dem Maximum der kleine Werth von α, dem Minimum der um 90^0 grössere.

In dem Specialfall $v = 120^0$ wird:

$$(19') \quad \begin{cases} g = \frac{3}{16}\sin 2j + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2j\,; \quad h = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2j + \frac{3}{4}\cos 2j\,; \\ k = -\frac{3}{8}\sin 2j - \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 2j\,; \quad l = -\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 2j\,; \quad r = \frac{1}{16}\sin 2j\,; \end{cases}$$

folglich:

$$(21') \quad \begin{cases} P = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2j+120^0) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2j \cdot \sin^2\xi + \sin 2j \cdot \sin^4\xi\,; \\ Q = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2j+120^0) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2j \cdot \sin^2\xi, \end{cases}$$

Einsetzung dieser Werthe in Gleichung (22) liefert für den *Drehungswinkel α der Polarisationsebene nach Durchgang durch die Glimmertriade* die Gleichung:

$$(III) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sqrt{3} \cdot \sin^2\xi \cdot \left\{1 - \frac{1}{2}\sin^2\xi + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin 2j \cdot \cos(2j+120^0) \cdot \sin^4\xi\right\}}{1 - \frac{3}{2}\sin^4\xi - 2 \cdot \sin 2j \cdot \sin(2j+120^0) \cdot \sin^6\xi}.$$

§ 8.

Discussion der Formel (III).

a) *Drehungssinn.* Für kleinere Werthe von $\sin^2\xi$ ist $\operatorname{tg} 2\alpha$ klein und positiv, also der Drehungswinkel α ein zwischen 0 und 90^0 liegender positiver Winkel. (Vergl. die Figur auf Seite 508.) Die Drehung der Polarisationsebene erfolgt also in demselben Drehungssinn, in welchem die Blättchen bei der Aufschichtung um 120^0 gegeneinander gedreht sind, so dass hiernach rechts- und linksdrehende Glimmertriaden unterschieden werden müssen. Dies bestätigen meine Beobachtungen an einer Glimmertriade, die ich an einem anderen Orte ausführlich mittheilen werde.

b) *Der Zahlwerth von* $\sin\xi$ ist von wesentlichem Einfluss auf die Erscheinung. Wäre er $= 0$, so würde zwar (nach § 6., a) ein vollkommen geradlinig polarisirter Strahl austreten; seine Polarisationsebene würde aber, nach Gleichung (III), gar keine Drehung erlitten haben. Weil bei dem wirklichen Glimmerpräparat eine Drehung erfolgt (und zwar für jede Farbe), so kann hier $\sin\xi$ für keine Farbe

$= 0$ sein. Zur Ermittelung des Zahlwerths, ohne die unbequeme Bestimmung der optischen Constanten des angewandten Glimmers ausführen zu müssen, verfuhr ich so: Ich liess Sonnenlicht durch den Polarisator, die Glimmertriade und den Analysator gehn, zerlegte es dann durch ein Prisma, und beobachtete die Drehung der Polarisationsebene einer bestimmten Farbe (Broch's Methode); *und zwar für das Azimuth* $j = 0$ *oder* $j = 90$. Der beobachtete Drehungswinkel α muss die Gleichung (III) erfüllen, welche in diesem Falle die Gestalt annimmt:

$$\text{(III')} \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sqrt{3} \cdot \sin^2\xi \cdot \left\{1 - \frac{1}{2}\sin^2\xi\right\}}{1 - \frac{3}{2}\sin^4\xi}.$$

Von den aus dieser quadratischen Gleichung folgenden 2 Werthen für $\sin^2\xi$ erweist sich nur einer als brauchbar, indem der andere > 1 ist. Für die Fraunhofer'schen Linien D und F ergab sich $\sin^2\xi$ nicht sehr verschieden, nämlich nach vorläufigen Versuchen etwas kleiner als 0,09.

c) *Einfluss des Azimuths j. Die Grösse der Drehung ist nur wenig verschieden für Strahlen mit verschiedenem Azimuth j,* denn in Gleichung (III) sind die Glieder ersten und zweiten Grades bezüglich $\sin^2\xi$ gänzlich frei von j; Functionen von j finden sich erst mit der dritten Potenz der kleinen Grösse $\sin^2\xi$ multiplicirt. Einen viel grösseren Einfluss hat das Azimuth j auf die Gestalt der Schwingungsellipse des aus der Triade tretenden Strahls, d. h. darauf, ob sich letzterer mehr oder weniger dem geradlinig polarisirten Zustand nähert. Denn in der Bestimmungsgleichung (II) für die Phasendifferenz findet sich gar kein von j freies Glied. Allerdings ist die Phasendifferenz überhaupt klein, da $\operatorname{tg} \frac{D_h - D_s}{\lambda} 2\pi$ den Factor $\sin^3\xi$ enthält, und schon $\sin^2\xi$ nicht gross ist. Daher kann die Schwingungsellipse einem Kreise nie sehr nahe kommen.

Diese Folgerungen finden sich durch meine Versuche bestätigt.

d) *Abhängigkeit der Erscheinung von der Farbe.* Wegen der Kleinheit von $\sin^2\xi$ kann man *in erster roher Näherung* in Gleichung (III) alle Glieder mit höheren Potenzen fortlassen und $\sin^2\xi$ selbst durch ξ^2 ersetzen; und weil gleichzeitig $\operatorname{tg} 2\alpha$ klein sein muss, so kann man es ebenfalls durch 2α ersetzen, so dass sich der Drehungswinkel als angenähert proportional mit ξ^2 ergiebt. Nun ist aber $\xi = \frac{\pi d}{\lambda}\left(\frac{V}{o} - \frac{V}{e}\right)$, was aus Gleichung (6) folgt, wenn dort Zähler und Nenner mit V (Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Luft) multiplicirt, und $V \cdot T$ durch λ (Wellenlänge in Luft) ersetzt wird. Nimmt man nun in erster Näherung den Zähler des Werths von ξ als constant für die ver-

schiedenen Farben an, so ist ξ umgekehrt proportional mit der Wellenlänge, also *der Drehungswinkel* (in roher Näherung) *umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge.* Dies bestätigen meine Messungen vollständig.

Gleichung (II) lehrt, dass die Phasendifferenz, und somit die Gestalt der Schwingungsellipse, ebenfalls wesentlich von der Wellenlänge abhängt. Uebereinstimmend hiermit lehren die Beobachtungen, dass bei festgehaltenem Azimuth j die Annäherung der verschiedenfarbigen Strahlen an den Zustand der geradlinigen Polarisation eine durchaus verschiedene ist.

§ 9.

Glimmercombinationen aus mehr als 3 Blättchen.

a) *Die Combination bestehe aus* $3n$ *Blättchen* (n = ganze Zahl), gegen einander um 120° gedreht, so dass sie als aus n Triaden aufgeschichtet angesehn werden kann. Weil die durch eine Triade bewirkte Drehung mit Annäherung als unabhängig vom Azimuth j angesehn werden kann (§ 8., c), so kann die Drehung nach dem Durchgange des Strahls durch n congruente Triaden nicht sehr verschieden sein von dem n-fachen Betrage der durch die erste Triade erzeugten Drehung. Dies lehrt wirklich die Beobachtung an einer von Herrn Steeg hergestellten Combination von 8 Triaden, im Vergleich mit einer einzelnen, aus möglichst eben solchen Blättchen construirten, Triade. — Die Beobachtungen an der Combination aus 24 Blättchen zeigen ferner, dass auch hier der Drehungswinkel mit Näherung umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge ist, und ausserdem, dass er einigermassen vom Azimuth des einfallenden Strahls abhängt. — Besonders deutlich stellt sich ferner heraus, dass die verschiedenen Farben sehr verschieden elliptisch polarisirt sind, indem (bei den meisten Azimuthen) jedesmal *eine* Farbe dem Zustande der geradlinigen Polarisation am nächsten kommt, während ihre Nachbarfarben nach beiden Seiten des Spektrums hin sich mehr und mehr von diesem Zustande entfernen.

b) *Die Combination bestehe aus* $3n + 1$ *oder* $3n + 2$ *Blättchen,* gegen einander um 120° gedreht. Ihr Verhalten kann sich nicht wesentlich von dem einer aus n Triaden gebildeten Combination unterscheiden. Das folgt aus der Untersuchung der Drehungen, welche der Durchgang durch ein Blättchen, sowie durch 2 unter 120° gedrehte Blättchen, bewirkt.

Man findet für die Intensität des durch 1 Blättchen und dann durch den Analysator gegangenen Strahls den Werth:

$$J_1 = \cos^2\alpha - \sin 2j \cdot \sin(2j - 2\alpha) \cdot \sin^2\xi.$$

Hieraus folgt für den Drehungswinkel α die Gleichung:

$$\text{(23)} \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 4j \cdot \sin^2 \xi}{1 - 2\sin^2 2j \cdot \sin^2 \xi}.$$

Die Intensität eines durch 2 (unter ν^0 gedrehte) Blättchen und dann durch den Analysator gegangenen Strahls erhält man durch analoge Betrachtungen wie im § 7.:

$$J_2 = \cos^2 \alpha - P' \cdot \sin 2\beta' \cdot \sin^2 \xi + Q' \cdot \cos 2\beta' \cdot \sin^2 \xi,$$

wo gesetzt ist:

$$P' = \sin 2\nu \cdot \cos 2j + 4 \sin 2j \cdot \cos^2 \nu \cdot \cos^2 \xi;$$
$$Q' = \sin 2\nu \cdot \sin 2j; \quad \beta' = j + \nu - \alpha.$$

Hieraus folgt für die durch diesen Durchgang erzeugte Drehung α die Gleichung:

$$\text{(24)} \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sin^2 \xi \cdot \{P' \cdot \cos(2\nu + 2j) + Q' \cdot \sin(2\nu + 2j)\}}{1 - 2\sin^2 \xi \cdot \{P' \cdot \sin(2\nu + 2j) - Q' \cdot \cos(2\nu + 2j)\}},$$

welche bei $\nu = 120^0$ in folgende übergeht:

$$\text{(25)} \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin^2 \xi \cdot \{\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 \cdot \sin 2j \cdot \cos(2j - 120^0) \cdot \cos^2 \xi\}}{1 - \sin^2 \xi \cdot \{\frac{3}{2} + 2 \cdot \sin 2j \cdot \sin(2j - 120^0) \cdot \cos^2 \xi\}}.$$

Beiläufig sei bemerkt, dass diese Gleichung den Haupttheil der Theorie für diejenigen Erscheinungen enthält, welche die von Reusch a. a. O. sogenannte „*Stufe*" darbietet.

Die Gleichungen (23) und (25) zeigen 1) dass die Drehung, welche der Durchgang durch 1 oder 2 Blättchen bewirkt, sehr stark vom Azimuth j abhängt, und 2) dass sie etwa proportional mit $\sin^2 \xi$ ist, somit klein ist, wenn diese Grösse klein ist. — Hat also der Strahl eine grössere Anzahl von Triaden durchlaufen, und geht dann noch durch 1 oder 2 Blättchen, so erfährt seine Polarisationsebene bei letzterem Durchgange noch eine weitere Drehung; die Grösse derselben ist zwar durch das Azimuth j, mit dem der Strahl den letzteren Durchgang beginnt, bedingt, sie ist jedoch jedenfalls klein, wenn $\sin^2 \xi$ kein ist, und kommt somit gegen diejenige Drehung wenig in Betracht, die schon vorher durch die sämmtlichen Triaden bewirkt war.

II. Abschnitt.

Die Drehung der Polarisationsebene im Quarz und in anderen Krystallen.

§ 10.

Uebergang von der Glimmercombination zum Quarz.

Bei der Anwendung der Gleichungen (II) und (III) des vorigen Abschnitts auf die wirklich hergestellte Glimmertriade hat sich gezeigt, dass sowohl der Drehungswinkel der Polarisationsebene, als auch namentlich das Axenverhältniss der Schwingungsellipse nicht ganz unabhängig vom Azimuth j sind, weil sin ξ einen zwar nicht grossen, aber doch keineswegs zu vernachlässigenden Werth hat.

Nehmen wir jetzt an, sin ξ sei so klein, dass seine sechste Potenz bereits vernachlässigt werden kann, so wird die Schwingungsellipse sehr gestreckt sein, weil die Phasendifferenz der zur elliptischen Schwingung sich zusammensetzenden Strahlen den Factor $\sin^3\xi$ enthält (vgl. Gl. II). Die Drehung der Polarisationsebene aber wird jetzt ganz unabhängig vom Azimuth j, weil die Gleichung (III) unter obiger Voraussetzung in folgende übergeht:

$$\text{(26)} \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3} \cdot \sin^2\xi \cdot \left\{1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\xi\right\} .$$

Gehen wir noch weiter, und nehmen sin ξ so klein an, dass bereits seine dritte Potenz als verschwindend zu erachten ist, so wird sich die Schwingungsellipse des austretenden Strahls nicht mehr merklich von einer geraden Linie unterscheiden (vgl. Gl. II); Gleichung III aber, welche die Drehung der Polarisationsebene bestimmt, geht jetzt in folgende über:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3} \cdot \sin^2\xi ,$$

oder mit Einsetzung des Werthes für ξ nach Gleichung (6) und § 8. d:

$$\text{(27)} \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi d(n_0 - n_e)}{\lambda}\right),$$

indem für $\frac{V}{0}$ und $\frac{V}{e}$ resp. n_0 und n_e geschrieben ist.

Die Bedingung, dass sin ξ äusserst klein ist, würde erfüllt sein, wenn die Blättchen so beschaffen wären, dass $\frac{(n_0 - n_e)d}{\lambda}$ äusserst wenig von einer ganzen Zahl verschieden wäre. — Dieselbe Bedingung ist aber auch dann erfüllt, wenn entweder die Blättchendicke (d), oder der Unterschied der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den Blättchen, oder beide zugleich so klein sind, dass $\frac{(n_0 - n_e)d}{\lambda}$ ein äusserst kleiner Bruch wird. Diese letztere Annahme soll fortan beibehalten

werden. Jetzt kann man wegen der Kleinheit von ξ und der daraus folgenden Kleinheit von α (siehe die Bemerkung zu Gleichung (22) am Ende von § 7.) für sin und tg die Bogen selbst setzen, so dass Gleichung (27) übergeht in:

$$\alpha = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi^2 \cdot d^2 \cdot (n_0 - n_e)^2}{2 \cdot \lambda^2},$$

oder wenn für den Bogen α der zugehörige Winkel ω, in Graden gemessen, eingeführt wird:

$$\omega = \frac{90 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot d^2 (n_0 - n_e)^2}{\lambda^2}. \tag{28}$$

Soviel beträgt die Drehung beim Durchgang durch 1 Triade. Jetzt sei eine grosse Anzahl (p) von congruenten Triaden aufeinandergeschichtet: Dann beträgt die durch alle zusammen bewirkte Drehung, welche φ heisse, p mal soviel, denn die Einzeldrehung ist nach Gleichung (28) unabhängig vom Azimuth j. Also ist:

$$\varphi = \frac{p \cdot 90 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi d^2 (n_0 - n_e)^2}{\lambda^2}.$$

Die Dicke der einzelnen Triade heisse δ; sie ist im Allgemeinen durchaus nicht gleich der dreifachen Blättchendicke, weil ja die Blättchen nicht unmittelbar aufeinander zu liegen brauchen (vgl. den Schluss von § 2.). Dann ist die Gesammtdicke der p Triaden, d. h. die Dicke der ganzen Blättchencombination $D = p \cdot \delta$. Setzt man also $\frac{D}{\delta}$ für p ein, und nennt die, bei unverändertem Zustande der Blättchencombination constante, von der Farbe unabhängige Grösse:

$$\frac{90 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot d^2}{\delta} = K,$$

so erhält man für *die Drehung der Polarisationsebene in der Blättchencombination von der Dicke D* den Werth:

$$\varphi = \frac{K \cdot D (n_0 - n_e)^2}{\lambda^2}. \tag{VI}$$

Man erkennt, *dass die Drehung proportional ist mit der Dicke der Blättchencombination.* Setzt man ferner in erster Näherung $n_0 - n_e$ als constant für alle Farben voraus, — was darauf hinauskommt, nur die Doppeldrehung zu berücksichtigen, die mit der Brechung verbundene Farbenzerstreuung aber zu vernachlässigen — so zeigt sich *die Drehung umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge.* Diese beiden Resultate stimmen nun vollständig mit den von Biot für die Drehung im Quarz aufgestellten Gesetzen überein, deren zweites überdies bekanntlich durchaus nicht streng richtig ist, wie es ja auch *hier* nur als angenähert richtig auftritt. Somit findet sich die von Reusch a. a. O. ausgesprochene Vermuthung, dass sich das Ver-

halten der Glimmercombination demjenigen des Quarz wohl um so mehr nähern werde, je dünner die Lamellen sind, hiermit auf das Vollständigste bestätigt.

Auf Grund des gewonnenen Resultats scheint die *Hypothese* nicht ungerechtfertigt, *den Quarz als aus lauter congruenten, um 120° gegeneinander gedrehten, nach Art der optisch zweiaxigen Krystalle doppelbrechenden Blättchen aufgebaut anzusehen, ganz entsprechend der Glimmercombination von* Reusch. Kennte man nun noch das Gesetz, nach welchem bei den einzelnen hypothetischen Blättchen des Quarz die Grösse $n_0 - n_e$ von der Wellenlänge abhängt, so lieferte Gleichung (IV) nicht nur den angenäherten, sondern den genauen Zusammenhang zwischen der Drehung und der Wellenlänge. In Ermangelung jener Kenntniss bleibt nichts übrig, als eine möglichst plausible Annahme zu machen, die jetzt begründet werden soll. — Von Mascart liegen Messungen über die den einzelnen Fraunhoferschen Linien zugehörigen Werthe der Brechungsquotienten n_0 und n_e für Strahlen *senkrecht* zur Axe des Quarz vor*). Aus ihnen ist die dritte Spalte der folgenden Tabelle abgeleitet. Die Wellenlängen λ sind ebenfalls nach Mascart angegeben, jedoch nur soweit, als sie in der Rechnung von Einfluss sind. Sie beziehen sich auf Luft (wie stets λ in dieser ganzen Abhandlung).

Fraunhofer'sche Linien	Wellenlängen λ in Millimetern	$n_e - n_0$ beobachtet	$n_e - n_0$ berechnet	Differenz
A		0,00910		
a		0,00901		
B	0,000687	0,00903	0,00901	+ 0,00002
C	656	907	904	+ 3
D	589	915	912	+ 3
E	527	918	923	— 5
b	517	924	925	— 1
F	486	931	932	— 1
G	431	943	949	— 6
H	397	954	963	— 9
L	382	955	970	— 15
M	373	971	975	— 4
N	358	981	984	— 3
O	344	991	994	— 3
P	336	980	0,01000	— 20

*) Die Zahlen sind aus Kettelers Abh. „Ueber d. Einfluss d. ponderablen Molek. auf d. Dispersion". Poggend. Ann. d. Phys. Bd. 140, Seite 50 entnommen.

Der Werth von $n_e - n_0$ ist nicht merklich verschieden, mag man unter den n die Brechungsquotienten aus dem leeren Raum oder aus Luft in Quarz verstehn.

Wie man sieht, ist es für diese Richtung wirklich in erster Näherung erlaubt, $n_e - n_0$ constant ($= 0{,}00942$) zu setzen. In zweiter Näherung lässt sich die Gesammtheit der für $n_e - n_0$ gefundenen Zahlen durch eine zweigliedrige Interpolationsformel von der Gestalt:

$$n_e - n_0 = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2}$$

wiedergeben, wo die Constanten α und β etwa die Zahlwerthe 0,00870 und $\frac{0{,}01466}{10^9}$ haben. (Diese Zahlen sind nicht streng abgeleitet, sondern durch Probiren gefunden.) Die aus dieser Formel berechneten Werthe stehn in der vorletzten Spalte der Tabelle, die Differenz der beobachteten und berechneten Werthe in der letzten. —

Jetzt machen wir die einfache Annahme, dass für die bei uns in Betracht kommenden Strahlen, welche die hypothetischen Blättchen senkrecht durchdringen, die den verschiedenen Farben entsprechenden Werthe von $n_e - n_0$ durch eine Interpolationsformel von derselben Gestalt:

$$n_e - n_0 = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

darstellbar sind. Dann nimmt Gleichung (IV) die Gestalt an:

$$\varphi = KD \cdot \left\{ \frac{a^2}{\lambda^2} + \frac{2ab}{\lambda^4} + \frac{b^2}{\lambda^6} \right\}. \tag{29}$$

Diese Formel stimmt nun in vorzüglicher Weise mit der besten bisher für die Drehung im Quarz aufgestellten empirischen Formel überein, welche für eine Quarzplatte von 1^{mm} Dicke lautet (vgl. Boltzmann a. a. O.):

$$\varphi = \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \frac{D}{\lambda^6} + \cdots \tag{30}$$

Von dieser Formel benutzt aber Boltzmann bei der wirklichen Zahlenrechnung nur die zwei ersten Glieder, in denen $B = \frac{7{,}07018}{10^6}$, $C = \frac{0{,}14983}{10^{12}}$ ist. Um das Grössenverhältniss des Hauptgliedes $\frac{B}{\lambda^2}$ zu dem Correctionsgliede $\frac{C}{\lambda^4}$ besser zu übersehn, schreiben wir die Boltzmann'sche Formel so:

$$\varphi = \frac{7{,}07018}{10^6 \cdot \lambda^2} \cdot \left\{ 1 + \frac{0{,}02119}{10^6 \cdot \lambda^2} \right\}. \tag{31}$$

Machen wir nun betreffs $n_e - n_0$ noch die weitere Annahme, die zwar einfach, aber freilich im Uebrigen nicht weiter begründet ist, — dass die Constanten a und b sogar dasselbe Grössenverhältniss haben, wie die entsprechenden Constanten α und β bei Strahlen senkrecht zur Axe, d. h. setzen wir:

$$a = \mu \cdot \alpha ; \qquad b = \mu \cdot \beta ,$$

wo μ eine constante Zahl ist, so folgt aus Gleichung (29):

$$\varphi = \frac{K \cdot (\mu\alpha)^2 \cdot D}{\lambda^2} \cdot \left\{ 1 + 2\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{1}{\lambda^4} \right\} ,$$

oder mit Einsetzung der obigen angenäherten Zahlwerthe für α und β:

$$\varphi = \frac{K(\mu\alpha)^2 \cdot D}{\lambda^2} \cdot \left\{ 1 + \frac{0{,}0337}{10^6 \cdot \lambda^2} + \frac{0{,}0002839}{10^{12} \cdot \lambda^4} \right\} . \tag{32}$$

Man erkennt, dass in dieser Gleichung das erste Correctionsglied nicht nur von derselben Grössenordnung ist, wie in der Boltzmann'schen Formel (31), sondern dass es sogar keinen allzuverschiedenen Zahlwerth besitzt, was um so mehr überraschen muss, als unsere beiden Annahmen über die für $n_e - n_0$ zu wählende Function fast nur ihrer Einfachheit wegen gemacht wurden. — Das letzte Glied der Formel (32) ist schon ganz unmerklich; denn setzt man für λ den mittleren Werth 0,0005, so findet man den Werth dieses dritten Gliedes in der Klammer $= 0{,}000018$, dessen Vernachlässigung gegen 1, den Beobachtungen gegenüber, vollständig gerechtfertigt ist.

Hiermit ist gezeigt, dass aus der über die Structur des Quarz gemachten Hypothese die Drehung der Polarisationsebene mit Nothwendigkeit folgt, und dass sich auch das *genaue* Gesetz für diese Drehung ohne Schwierigkeiten ableiten lässt.

§ 11.

Ueber die Structur der optisch drehenden Krystalle im Allgemeinen.

Sieht man sich nach anderweitigen Thatsachen um, welche geeignet sind, obige Hypothese von der Quarzstructur zu stützen, so weist vor Allem das Auftreten der Trapezflächen, welche den Quarz schon äusserlich als von rechts oder links gedrehter Beschaffenheit erkennen lassen, auch auf einen inneren schraubenförmigen Bau hin. Die wahre Berechtigung erwächst jener Hypothese aber erst aus der neuerdings von mir entwickelten allgemeinen *Theorie der Krystallstructur**), deren Grundgedanke nebst einigen hergehörigen Einzelheiten hier noch angedeutet werden soll.

Als Grundhypothese dient der Satz: *In jedem Krystall sind die Moleküle so geordnet, dass ihre Schwerpunkte ein regelmässiges Punktsystem bilden.* Hier fordert der Begriff des regelmässigen Punkt-

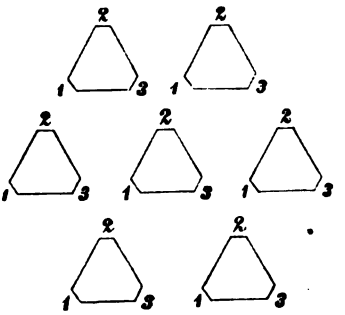
*) Die unbegrenzten regelmässigen Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstructur. Carlsruhe. Braun'sche Hofbuchh. 1876. — Im Auszuge Poggend. Annalen. Erg. Bd. VII.

systems noch eine Erklärung. Mit Rücksicht auf die gegen den Molekularabstand ungemein grossen Dimensionen jedes sichtbaren Krystalls denke man sich das Punktsystem als von grenzenloser Ausdehnung; *regelmässig ist es nun dann, wenn um jeden Punkt des Systems alle anderen ebenso liegen, wie um jeden anderen*, so dass keiner irgend eine Besonderheit vor den anderen voraus hat. Untersucht man nun rein geometrisch, was für verschiedene Arten von regelmässigen unendlichen Punktsystemen es überhaupt nur geben kann, so findet man 54 wesentlich verschiedene Systeme mit zahlreichen Varietäten. Diese sämmtlichen Systeme lassen sich nach dem Charakter der ihnen innewohnenden Symmetrie in 8 Gruppen zusammenfassen, welche den bekannten Krystallsystemen vollständig entsprechen. Hierbei ist das rhomboëdrische Krystallsystem als ein eigenes neben das hexagonale gestellt, und die Halbflächner des regulären Systems, (welche in der Bravais'schen Theorie der Krystallstructur nur vermöge einer Hülfshypothese Platz finden), treten als gleichberechtigtes eigenes Krystallsystem neben den Vollflächnern auf. Auch alle übrigen geometrischen und physikalischen Eigenschaften der Krystalle finden ihre Analogie in den geometrischen Eigenschaften jener Punktsysteme.

Nun finden sich unter den regelmässigen Punktsystemen nicht wenige mit einer *schraubenförmigen* Anordnung der Punkte. Legt man durch einen Punkt eines solchen Systems senkrecht zur Schraubenaxe eine Ebene, so ist sie in ihrer unendlichen Ausdehnung mit unendlich vielen Punkten besetzt; sie heisse eine „*Molekularebene*". In den einfachsten Fällen besteht dann das ganze schraubenförmige Punktsystem aus lauter äquidistanten, zur Schraubenaxe senkrechten, congruent besetzten Molekularebenen, deren jede folgende gegen die vorhergehende immer um denselben Winkel (von 120° oder 60° oder 90°) in demselben Sinn gedreht ist. Solche Systeme bieten also die überraschendste Analogie zu der Glimmercombination mit unendlich dünnen Blättchen dar. Sie unterstützen obige Hypothese von der Quarzstructur in hohem Grade.

In complicirteren Fällen treten an die Stelle jeder solchen Molekularebene zwei derselben, congruent und parallel besetzt, jedoch so, dass im Allgemeinen die Punkte der einen nicht vertical über denen der anderen liegen. Dann ist jedes solche Ebenenpaar gegen das vorhergehende um stets denselben Winkel gedreht. Umstehende Figur stellt z. B. einen Theil der Projection des dreizähligen Doppelschraubensystems auf eine Molekularebene vor. Darin bedeuten die Endpunkte der mit „1" bezeichneten kurzen Seiten der Sechsecke die Projectionen der Punkte eines solchen Ebenenpaars, die Endpunkte der mit „2" und der mit „3" bezeichneten kurzen Seiten die Projectionen der Punkte des nächsten und des drittfolgenden Ebenenpaars, welche

gegen das erste um 120° und nochmals 120° um eine zur Zeichnungsebene senkrechte, durch den Mittelpunkt eines Sechsecks gelegte Axe gedreht sind. Jedes Sechseck ist also die Projection der Punkte einer dreizähligen, mit Punktpaaren besetzten, unendlichen Schraube. — Weil jedes einzelne Ebenenpaar den geometrischen Charakter des monoklinen Krystallsystems besitzt, so ist es vollständig geeignet, die Stelle des einzelnen doppelbrechenden Blättchens der Reusch'schen Glimmercombination zu vertreten. Indess soll nicht behauptet werden, dass gerade dieses Punktsystem der Structur des Quarz zu Grunde liegen müsse.



Es ist wichtig hervorzuheben, dass nur in zweien von den genannten 8 Gruppen keine schraubenförmigen Punktsysteme auftreten, nämlich in den dem triklinen und monoklinen Krystallsysteme entsprechenden. *Im regulären Krystallsystem fehlen sie nicht;* dies ist z. B. für das Verständniss des Drehvermögens des chlorsauren Natrons von Wichtigkeit.

Wenn in vorstehender Abhandlung der Versuch gemacht ist, das optische Drehvermögen von Krystallen aus ihrer Structur abzuleiten, so ist dieser Versuch doch weit entfernt, eine fertige Theorie jener Erscheinung zu sein. Eine solche wird vielmehr von den Aether-Bewegungsgleichungen auszugehen haben, welche mit Rücksicht auf die schraubenförmige Anordnung der Körpermolcküle zu bilden sind; und zwar werden — auf Grund des Briot'schen Beweises, dass eine *einfach* schraubenförmige Anordnung der Aethertheilchen zur Erklärung der Erscheinung unvermögend sei, — vermuthlich die complicirteren unter den regelmässigen schraubenförmigen Punktsystemen zu Grunde gelegt werden müssen. —

Carlsruhe, den 20. November 1875.

Ein allgemeiner Ausdruck für die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades.

Von Julius König in Budapest.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Beweise des folgenden Satzes: *Sei* $f(x) = 0$ *eine beliebige algebraische Gleichung, (mit reellen Coefficienten), und*

$$\frac{1}{f(x)} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots\cdots$$

die entsprechende recurrirende Reihe, deren Coefficienten mit denen der Gleichung zugleich bekannt sind. Bezeichnet man sodann die Anzahl der Zeichenwechsel in den Coefficienten dieser Reihe bis zum n^{ten} *Gliede mit* w_n, *so ist die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel dieser Gleichung:*

$$x = r_1 (\cos \omega_1 \pm i \sin \omega_1)$$

durch folgende Werthe gegeben. Es ist:

$$\frac{\omega_1}{\pi} = \left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty},$$

$$r_1 = \operatorname{mod} \frac{1}{(\sqrt[n]{\gamma_n})_{n=\infty}}.$$

Der Ausdruck des Satzes erleidet nur dann eine geringe Modification, wenn es Wurzeln von gleichem absoluten Betrag giebt, die weder gleich noch conjugirt sind. Der Beweis beruht dem Wesen nach auf einem Hilfssatz (1.), der den Werth eines Winkels φ aus den Vorzeichen der Reihe:

$$1, \cos\varphi, \quad \cos 2\varphi, \quad \cos 3\varphi, \cdots\cdots,$$

durch den obigen Grenzausdruck bestimmt. Nach einer genauen Untersuchung des Werthes, dem sich jener Ausdruck für unendliche n wirklich nähert (2.) und einigen für das folgende nothwendigen Verallgemeinerungen (3.), gehe ich dazu über, aus den bekannten Relationen zwischen den Coefficienten γ und den Wurzeln der Gleichung jene Bestimmung der ihrem absoluten Betrage nach kleinsten Wurzel wirklich abzuleiten (4.). Eine kurze Betrachtung genügt dann, um

die Bedeutung des erwähnten Ausnahmsfalles klar zu stellen, der sich übrigens durch die Unbestimmtheit des Ausdrucks für ω immer selbst anzeigt.

1.

Es soll zunächst gezeigt werden, wie *der Werth eines Winkels φ sich vollständig bestimmen lässt, wenn die Vorzeichen der Glieder in der unendlichen Reihe:*

$$1, \cos\varphi, \quad \cos 2\varphi, \quad \cos 3\varphi, \cdots\cdots\cdots$$

bekannt sind.

Da, abgesehen von Vielfachen von 2π der obigen Reihe jedenfalls die beiden Werthe φ und $2\pi - \varphi$ entsprechen, dürfen wir voraussetzen, dass der zu bestimmende Werth von φ zwischen den Grenzen 0 und π liegt. Seien nun:

$$\begin{aligned} &1, \cos\varphi, \cdots\cdots, && \cos(\lambda_1 - 1)\varphi \quad \text{positiv}, \\ &\cos\lambda_1\varphi, \cdots\cdots, && \cos(\lambda_2 - 1)\varphi \quad \text{negativ}, \\ &\cos\lambda_2\varphi, \cdots\cdots, && \cos(\lambda_3 - 1)\varphi \quad \text{positiv}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \end{aligned}$$

und im Allgemeinen:

$$\cos\lambda_{m-1}\varphi, \cdots\cdots, \quad \cos(\lambda_m - 1)\varphi,$$

von gleichem Vorzeichen mit $(-1)^{m-1}$. Es sind in diesen Ausdrücken:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\cdots$$

positive ganze Zahlen, die fortwährend wachsen und m bedeutet die Anzahl der Zeichenwechsel, welche in der unendlichen Reihe bis zum Gliede $\cos\lambda_m\varphi$: d. i. bis zum $\lambda_m + 1^{ten}$ Gliede vorkommen*).

Man kann nun für φ folgende Reihe von Grenzbedingungen entwickeln. Es ist zunächst:

$$0 < \varphi < \pi.$$

Ist nun $\cos\varphi$ positiv, so wird auch:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

sein; ist auch $\cos 2\varphi$ positiv, so wird, da nach dem Vorhergehenden:

$$2\varphi < \pi$$

ist, auch

$$0 < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$$

sein. In dieser Weise fortschliessend, erhält man endlich:

---

*) Die Zeichenwechsel ebenso gezählt, wie diess in der Theorie der Gleichungen z. B. bei der Descartes'schen Zeichenregel der Fall ist.

(1) $$0 < (\lambda_1 - 1)\varphi < \frac{\pi}{2},$$

nun ist $\cos \lambda_1 \varphi$ negativ, φ selbst aber zwischen 0 und π enthalten, also:

(2) $$\frac{\pi}{2} < \lambda_1 \varphi < \frac{3\pi}{2}.$$

Aus diesen letzten Relationen erhält man unmittelbar:

(3) $$\frac{1}{2\lambda_1} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{1}{2(\lambda_1 - 1)}.$$

Für $(\lambda_1 + 1)\varphi$ hat man vor allem aus: $\varphi < \pi$

$$\frac{\pi}{2} < (\lambda_1 + 1)\varphi < \frac{5\pi}{2},$$

und da $\cos(\lambda_1 + 1)\varphi$ negativ ist:

$$\frac{\pi}{2} < (\lambda_1 + 1)\varphi < \frac{3\pi}{2};$$

ferner wird, wenn auch $\cos(\lambda_1 + 2)\varphi$ negativ ist, da jedenfalls:

$$(\lambda_1 + 2)\varphi < \frac{5\pi}{2},$$

auch

$$\frac{\pi}{2} < (\lambda_1 + 2)\varphi < \frac{3\pi}{2}$$

sein, und so erhält man endlich:

(4) $$\frac{\pi}{2} < (\lambda_2 - 1)\varphi < \frac{3\pi}{2}.$$

Dann ist wieder:

$$\frac{\pi}{2} < \lambda_2 \varphi < \frac{5\pi}{2},$$

und mit Berücksichtigung dessen, dass $\cos \lambda_2 \varphi$ positiv ist:

(5) $$\frac{3\pi}{2} < \lambda_2 \varphi < \frac{5\pi}{2},$$

woraus sich für $\frac{\varphi}{\pi}$ die folgenden Bedingungen ergeben;

(6) $$\frac{3}{2\lambda_2} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{3}{2(\lambda_2 - 1)}.$$

Durch Fortsetzung dieser Schlussreihe kann man für $\frac{\varphi}{\pi}$ eine Reihe von einschliessenden Werthen finden, deren Bildungsgesetz sehr einfach ist, und von m auf $m + 1$ schliessend, leicht allgemein verificirt werden kann. Dieses System von Ungleichungen ist das folgende:

$$\frac{1}{2\lambda_1} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{1}{2(\lambda_1 - 1)},$$

$$\frac{3}{2\lambda_2} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{3}{2(\lambda_2 - 1)},$$

(7)
$$\frac{5}{2\lambda_3} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{5}{2(\lambda_3-1)} \cdot$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{2m-1}{2\lambda_m} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{2m-1}{2(\lambda_m-1)},$$
$$\frac{2m+1}{2\lambda_{m+1}} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{2m+1}{2(\lambda_{m+1}-1)} \cdot$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Wenn nun die angenommene Zeichenreihe, d. i. die Reihe der Zahlen λ einem Werthe von φ wirklich entsprechen, müssen diese Bedingungen sämmtlich mit einander verträglich sein und man überzeugt sich leicht, dass die aufeinanderfolgenden Ungleichungen den Werth von $\frac{\varphi}{\pi}$ in immer engere Grenzen einschliessen. Man kann z. B. die vorletzte des Systems in folgender Weise schreiben:

$$\frac{m}{\lambda_m} - \frac{1}{2\lambda_m} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{\frac{m}{\lambda_m} - \frac{1}{2\lambda_m}}{1-\frac{1}{\lambda_m}} \cdot$$

Da nun m die Anzahl der Zeichenwechsel bis zum $\lambda_m + 1^{ten}$ Gliede ($\cos \lambda_m \varphi$) ist, so hat man jedenfalls:

$$m < \lambda_m;$$

also ist $\frac{m}{\lambda_m}$ für jedes m kleiner als 1. Da nun λ_m, die Anzahl der Glieder beliebig gross gemacht werden kann, so nähert sich die obere und untere Grenze von $\frac{\varphi}{\pi}$ beliebig dem Werthe von $\frac{m}{\lambda_m}$ für eine unendlich wachsende Gliederzahl. Dieser Quotient kann auch noch in andrer Weise geschrieben werden; setzt man nämlich die Gliederzahl: $\lambda_m + 1 = n$ und m, die Anzahl der Zeichenwechsel in den ersten n Gliedern gleich w_n, so wird derselbe $\frac{w_n}{n}$ und man hat:

(8)
$$\frac{\varphi}{\pi} = \lim \left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty} \cdot$$

2.

Als nothwendige Ergänzung des Vorhergehenden muss noch gezeigt werden, dass (natürlich immer unter der Voraussetzung, dass die gegebenen Verhältnisse wirklich einem Werthe des φ entsprechen) $\frac{w_n}{n}$ *sich bei wachsendem* n *in der That einem bestimmten Grenzwerthe nähert.*

Diess ist zunächst sehr leicht zu zeigen, wenn $\frac{\varphi}{\pi}$ einen *rationalen Werth:* $\frac{a}{b}$ besitzt. Dann ist

$$\varphi = \frac{a}{b}\pi ,$$

und jedenfalls schon

$$2b\varphi = 2a\pi ,$$

also:

$$\cos(2b+r)\varphi = \cos r\varphi .$$

Zwei Glieder, deren Stellenzeiger um $2b$ verschieden sind, haben in diesem Falle nicht nur gleiches Vorzeichen, sondern völlig übereinstimmende Werthe. Die Reihe der Vorzeichen hat also, wie man sich ausdrücken kann, eine endliche Periode; sie treten längstens nach dem $2b^{\text{ten}}$ in derselben Reihenfolge wieder auf. Seien nun bis zum $2b^{\text{ten}}$ Gliede k Zeichenwechsel vorhanden, von diesem zum $4b^{\text{ten}}$ k', (wo sich k von k' um 1 unterscheiden kann, wenn vom $2b^{\text{ten}}$ auf das $2b+1^{\text{te}}$ Glied ein Zeichenwechsel stattfindet). Dann ist auch im Allgemeinen die Zahl der Zeichenwechsel vom $2rb^{\text{ten}}$ bis zum $2(r+1)b^{\text{ten}}$ gleich k'. Gehen wir nun bis zu einem beliebigen n^{ten} Gliede. Dann ist:

$$n = 2bs + \beta ,$$

wo $\beta < 2b$; und die Anzahl der Zeichenwechsel bis zu diesem:

$$w_n = sk + \alpha ,$$

wo wieder α höchstens gleich k ist. Also hat man:

$$\frac{w_n}{n} = \frac{sk+\alpha}{2bs+\beta} ,$$

was bei unendlich wachsenden n oder s in $\frac{k}{2b}$ übergeht. Man sieht leicht, dass:

$$k = 2a$$

ist; also nähert sich $\frac{w_n}{n}$ in der That dem festen Werthe $\frac{a}{b}$.

Um nun von rationalen Werthen des $\frac{\varphi}{\pi}$ zu *irrationalen* überzugehen, beweisen wir zuerst den folgenden Satz:

Wenn φ irgend einen Werth zwischen 0 und π besitzt, und δ ein positiver Werth von der Beschaffenheit, dass auch $\varphi+\delta$ zwischen diesen Grenzen liegt, so ist die Zahl der Zeichenwechsel bis zu einem beliebigen Gliede in der Reihe:

$$1, \cos(\varphi+\delta), \cos 2(\varphi+\delta), \cos 3(\varphi+\delta), \cdots ,$$

nie kleiner als die Zahl der Zeichenwechsel bis zum entsprechenden Gliede in der Reihe:

$$1, \cos\varphi, \cos 2\varphi, \cos 3\varphi, \cdots$$

Gehen wir z. B. bis zu einem Gliede $\cos r\varphi$, so liegt $r\varphi$ zwischen zwei ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{(2k+1)\pi}{2} < r\varphi < \frac{(2k+3)\pi}{2},$$

und die Zahl der Zeichenwechsel bis $\cos r\varphi$ ist dann $k+1$. Man kann nämlich die Werthe:

$$0, \quad \varphi, \quad 2\varphi, \quad 3\varphi, \quad \cdots$$

nach den Intervallen 0 bis $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{2}$, u. s. f. eintheilen, und man sieht dann unmittelbar, dass ein Zeichenwechsel nur dann eintritt, wenn man von einem Intervall in das nächste gelangt. Da aber der Werth von φ kleiner als π ist, liegt in jedem solchen Intervall wenigstens ein Vielfaches von φ, woraus man ersieht, das die Zahl der Zeichenwechsel in der That gleich $k+1$ ist.

Ebenso sei nun:

$$\frac{(2k'+1)\pi}{2} < r(\varphi+\delta) < \frac{(2k'+3)\pi}{2}.$$

Dann ist die Zahl der Zeichenwechsel für die nach Vielfachen von $\varphi+\delta$ fortschreitende Reihe bis zum Gliede $\cos r(\varphi+\delta)$ gleich $k'+1$ und aus

$$r(\varphi+\delta) > r\varphi$$

folgt, wie es der oben ausgesprochene Satz verlangt:

$$k' \geqq k.$$

Ist nun $\frac{\varphi}{\pi}$ ein irrationaler Werth, so kann man bekanntlich zwei rationale Zahlen bestimmen, die jenen in beliebig enge Grenzen einschliessen, z. B.:

$$\frac{a'}{b'} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{a''}{b''},$$

oder auch

$$\varphi' < \varphi < \varphi'',$$

wenn

$$\varphi' = \frac{a'}{b'}\pi, \qquad \varphi'' = \frac{a''}{b''}\pi$$

gesetzt wird. Betrachten wir nun die drei Reihen:

$$1, \cos\varphi', \quad \cos 2\varphi', \quad \cos 3\varphi', \quad \cdots$$
$$1, \cos\varphi, \quad \cos 2\varphi, \quad \cos 3\varphi, \quad \cdots$$
$$1, \cos\varphi'', \quad \cos 2\varphi'', \quad \cos 3\varphi'', \quad \cdots$$

und bezeichnen die Anzahl der Zeichenwechsel bis zum n^{ten} Gliede in denselben mit w_n', w_n und w_n'', dann ist nach obigem Satze:

$$w_n' \leqq w_n \leqq w_n'',$$

also auch:

$$\frac{w_n'}{n} < \frac{w_n}{n} < \frac{w_n''}{n}$$

für jedes n. Geht man nun zur Grenze über, so wird:

$$\lim\left(\frac{w_n'}{n}\right)_{n=\infty} = \frac{a'}{b'},$$

$$\lim\left(\frac{w_n''}{n}\right)_{n=\infty} = \frac{a''}{b''},$$

und man erhält:

$$\frac{a'}{b'} \leq \lim\left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty} \leq \frac{a''}{b''}.$$

Da nun $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{a''}{b''}$ einander beliebig nahe gebracht werden können, so muss also $\frac{w_n}{n}$ sich auch dann einem bestimmten Grenzwerth nähern, wenn $\frac{\varphi}{\pi}$ einen irrationalen Werth besitzt.

3.

Die im Vorhergehenden ausgeführte Bestimmung von φ aus den Vorzeichen der Reihe:

$$1, \cos\varphi, \cos 2\varphi, \cos 3\varphi, \cdots$$

lässt sich noch in der Weise verallgemeinern, *dass es genügt, wenn die Vorzeichen erst von einem bestimmten endlichen Gliede richtig angegeben sind.* Hat man bis zu diesem statt der k wirklich vorkommenden Zeichenwechsel z. B. k' gezählt, so erhält man statt des wirklichen Werthes von w_n den folgenden: $w_n + k - k'$. Da aber $k - k'$ eine endliche Grösse ist, so nähert sich

$$\frac{w_n}{n} \text{ und } \frac{w_n + k - k'}{n}$$

derselben Grenze.

Eine weitere Verallgemeinerung des bisherigen Resultats besteht darin, dass *der Werth von φ sich ebenso aus der allgemeineren Reihe*

$$\cos\alpha, \cos(\alpha+\varphi), \cos(\alpha+2\varphi), \cos(\alpha+3\varphi), \cdots$$

ergiebt, wo α einen beliebigen endlichen Werth besitzt.

Wir schliessen ähnlich wie früher, dass die Werthe α, $\alpha+\varphi$, ... bis zu einem beliebigen $\alpha + r\varphi$ sich in die Intervalle 0 bis $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{2}$, ... $\frac{2k+1}{2}\pi$ bis $\frac{2k+3}{2}\pi$ eintheilen, von denen wegen α jedoch nun einige der ersten wegfallen können. Dann ist die Anzahl der Zeichenwechsel in obiger Reihe von k höchstens um eine bestimmte endliche Grösse verschieden. Wenn man nun ebenso die Werthe $0, \varphi, 2\varphi, \cdots r\varphi$ in Intervalle vertheilt, so liegt $r\varphi$

zwischen $\frac{2k'+1}{2}\pi$ und $\frac{2k'+3}{2}\pi$, und es ist $k - k'$ ebenfalls eine bestimmte endliche, von α abhängige Zahl; insbesondere wenn $\alpha < \pi$, gleich 0 oder 1.

Man erhält also auch aus dieser Reihe

$$\lim \left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty} = \varphi .$$

4.

Wir gehen nun zur Betrachtung der allgemeinen Gleichung m^{ten} Grades über:

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m = 0 .$$

Man hat dann in bekannter Weise:

$$\frac{1}{f(x)} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \cdots$$

eine recurrirende Reihe, deren Coefficienten durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$\begin{aligned} a_m \gamma_0 &= 1, \\ a_{m-1}\gamma_0 + a_m \gamma_1 &= 0 , \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_0 \gamma_i + a_1 \gamma_{i+1} + a_2 \gamma_{i+2} + \cdots + a_m \gamma_{i+m} &= 0 , \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Die Zahlen γ können mit Hülfe dieser Gleichungen der Reihe nach berechnet werden und sind demnach als bekannt zu betrachten. Dieselben lassen sich aber bekanntlich auch durch die Wurzeln der vorgelegten Gleichung ausdrücken, und zwar ist, wenn man diese mit:

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$$

bezeichnet:

$$\gamma_n = A_1 \alpha_1^{-n} + A_2 \alpha_2^{-n} + \cdots + A_m \alpha_m^{-n}$$

wo die Coefficienten A von dem Werthe der Wurzeln, nicht aber von n abhängen, also für alle γ dieselben bleiben. Setzen wir nun:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= r_j (\cos \omega_j + i \sin \omega_j) , \\ A_j &= M_j (\cos \eta_j - i \sin \eta_j) \end{aligned}$$

und beachten, dass, wenn die Coefficienten der Gleichung als reell vorausgesetzt werden, auch die γ reelle Werthe erhalten müssen, also in ihrem Ausdrucke der mit i multiplicirte Theil verschwinden muss, so erhält man weiter:

$$\begin{aligned} (1)\quad \gamma_n = M_1 r_1^{-n} \cos(\eta_1 + n\omega_1) + M_2 r_2^{-n} \cos(\eta_2 + n\omega_2) + \cdots \\ + M_m r_m^{-n} \cos(\eta_m + n\omega_m) . \end{aligned}$$

In diesem Ausdrucke wollen wir die Glieder so geordnet denken, dass die absoluten Beträge der Wurzeln:

$$r_1, r_2, \cdots, r_m$$

eine steigende Reihe bilden. Ausserdem mögen die etwaigen gleichen oder conjugirten Wurzeln entsprechenden Glieder als vereinigt gedacht werden; da diesen auch gleiche oder conjugirte Werthe von A entsprechen, ändert sich hierdurch M nun um einen Zahlenfactor.

Die weitere Untersuchung geschehe nun unter der Voraussetzung, dass nach Vereinigung der gleichen oder conjugirten Wurzeln entsprechenden Glieder die r sämmtlich untereinander verschieden sind, d. h. *dass es ausser den erwähnten keine Wurzeln von gleichem absoluten Betrage giebt.*

Dann wird von einem bestimmten Gliede an die Zahl der Zeichenwechsel in den Reihen:

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \cdots$$

und

$$\cos\eta_1, \cos(\eta_1+\omega_1), \cos(\eta_1+2\omega_1), \cos(\eta_1+3\omega_1), \cdots \tag{3}$$

vollständig übereinstimmen.

Schreibt man γ_n in folgender Form:

$$\gamma_n = M_1 r_1^{-n}\left(\cos(\eta_1+n\omega_1)+\frac{M_2}{M_1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\cos(\eta_2+n\omega_2)+\cdots + \frac{M_m}{M_1}\left(\frac{r_1}{r_m}\right)^n\cos(\eta_m+n\omega_m)\right), \tag{4}$$

so kann der erste Factor $M_1 r_1^{-n}$, seiner Bedeutung nach eine positive Grösse, die das Zeichen von γ_n nicht ändert, völlig unbeachtet bleiben.

Da ferner $r_1 < r_2 < \cdots < r_m$, kann man einen Exponenten n immer so bestimmen, dass die Glieder des eingeklammerten Factors in (4) vom zweiten ab, also auch deren Summe kleiner werde als eine beliebig gegebene Grösse ε; wenn also $\cos(\eta_1+n\omega_1)$ vom Zeichen abgesehen, grösser ist als ε, hat von einem bestimmten Exponenten n ab γ_n mit dieser Grösse gleiches Zeichen.

Es ist nun nur noch der Fall zu untersuchen, wo $\cos(\eta_1+n\omega_1)$ kleiner wird, als eine beliebig klein angenommene Grösse ε. Diess kann aber nur dann der Fall sein, wenn $\eta_1+n\omega_1$ sich um weniger als δ von einem ungeraden Vielfachen des $\frac{\pi}{2}$, z. B. $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ unterscheidet, wo δ eine Grösse ist, die mit ε zugleich verschwindet. Da aber ω_1 einen zwischen 0 und π befindlichen endlichen Werth bedeutet, so muss, wenn δ genügend klein gewählt wird, $\eta_1+\overline{n-1}\,\omega_1$

in dem Intervalle zwischen $(2k-1)\frac{\pi}{2}$ und $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, hingegen $\eta_1 + \overline{n+1}\omega_1$ zwischen $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ und $(2k+3)\frac{\pi}{2}$ liegen; es haben also $\cos(\eta_1 + \overline{n-1}\omega_1)$ und $\cos(\eta_1 + \overline{n+1}\omega_1)$ entgegengesetztes Zeichen. Nun können aber weder $\cos(\eta_1 + \overline{n-1}\omega_1)$, noch $\cos(\eta_1 + \overline{n+1}\omega_1)$ dem eben behandelten Ausnahmsfalle angehören, da beide bestimmte endliche Werthe besitzen. Das Zeichen von $\cos \eta_1 + n\omega_1$ hat in Folge dessen auf die Anzahl der Zeichenwechsel gar keinen Einfluss. Die benachbarten Glieder haben entgegengesetztes Zeichen: es können also in:

$$\gamma_{n-1},\ \gamma_n,\ \gamma_{n+1}$$

nur die folgenden 4 Combinationen vorkommen:

$$+,\ \pm,\ -\ \text{oder}\ -,\ \pm,\ +$$

deren jede *einen* Zeichenwechsel giebt.

Fasst man das Bisherige zusammen, so zeigt sich, dass die Reihen (2) und (3) in der That von einem endlichen Gliede dieselbe Anzahl von Zeichenwechsel darbieten, also die bekannte Reihe der γ zur Bestimmung von ω_1 gebraucht werden kann.

Bezeichnet man nun die Anzahl der Zeichenwechsel in dieser Reihe mit w_n, so wird in der That:

$$\frac{\omega_1}{\pi} = \left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty}.$$

Der Werth von r lässt sich als Grenze gleichfalls leicht aus dem unter (4) gegebenen Ausdruck von γ_n darstellen. Da M_1 so wie der in der Parenthese stehende Factor endliche Werthe besitzen, so erhält man*):

$$\operatorname{mod} \sqrt[n]{\gamma_n} = r_1^{-1}(1+\delta_1)(1+\delta_2),$$

wo δ_1 und δ_2 positive oder negative Grössen sind, die bei unendlich wachsenden n verschwinden. Also ist:

$$r_1 = \operatorname{mod} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{\gamma_n}\right)_{n=\infty}},$$

wo das Zeichen mod nur so viel bedeutet, dass γ_n von seinen etwaigen negativen Zeichen zu befreien ist.

---

*) Es sind dabei jene sozusagen singulären Werthe des n auszuschliessen, für die der Factor in der Parenthese beliebig klein wird. Da diess dann für $n+1$ nicht der Fall ist, kann man jene Werthe von n als ausgeschlossen betrachten, für welche $\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}$ vom Zeichen abgesehen, grösser wird als eine beliebig angenommene Zahl.

5.

Um endlich noch den Ausnahmsfall zu erledigen, wo auch solche Wurzeln von gleichem absoluten Betrage vorkommen, die weder gleich noch conjugirt sind, genügt die Substitution:

$$y = x - \delta,$$

wo δ eine beliebig kleine reelle Grösse bedeutet.

Die in Betracht zu ziehenden Wurzeln liegen bei der gewöhnlichen geometrischen Darstellung der complexen Zahlen auf einem Kreise um den Punkt $x = 0$, während die nächste Wurzel auf einem Kreise liegt, dessen Radius um ein endliches grösser ist. Verschiebt man den Mittelpunkt durch obige Substitution um δ nach rechts, so liegen von den früher gleich entfernten Punkten nur mehr die conjugirten in gleicher Entfernung. Nimmt man also den Kreis durch die zwei nächsten conjugirten Wurzelpunkte, so enthält derselbe, wenn nur δ genügend klein gewählt ist, keine andern, und die transformirte Gleichung ist also immer zur Bestimmung der Wurzeln geeignet.

Man ersieht hieraus auch, warum für $\delta = 0$ eine Unbestimmtheit eintreten muss. Bildet man nämlich die Gleichung und lässt δ beliebig, so ist der entwickelte Ausdruck der Wurzeln eine discontinuirliche Function von δ, die für endliche Intervalle, ohne ihren Werth zu ändern, denselben Werth der Wurzel giebt, für $\delta = 0$ jedoch sprungweise in einen zweiten übergeht.

The Theory of Screws: A study in the Dynamics of a Rigid Body.

By

Robert Stawell Ball*).

I.

Twists and Wrenches.

A screw is a straight line in space with which a definite linear magnitude, termed the pitch, is associated.

A body is said to receive a *twist about a screw* when it is rotated about the screw, while it is at the same time translated parallel to the screw, through a distance equal to the product of the pitch and the circular measure of the angle of rotation; hence

The canonical form to which the displacement of a rigid body can be reduced is a twist about a screw. (Chasles.)

We use the phrase, *wrench on a screw*, meaning thereby, a force directed along the screw and a couple in a plane perpendicular to the screw, the moment of the couple being equal to the product of the force and the pitch of the screw. Hence, we may state, that

The canonical form to which all the forces acting on a rigid body can be reduced is a wrench on a screw. (Poinsot.)

II.

The Cylindroid.

If α and β be two screws of pitches p_α and p_β and if d be the shortest distance between α and β and O the angle between α and β

*) Der Hr. Verfasser hat uns den nachstehenden Auszug aus einem grösseren Werke gütigst überlassen wollen. Der volle Titel ist: *The Theory of Screws, a study in the Dynamics of a rigid body. By Robert Stawell Ball, L. L. D., F. R. S., Andrews' Professor of Astronomy in the University of Dublin and Royal Astronomer of Ireland. — Dublin, Hodges, Forster and Co., Grafton Street. Booksellers to the University. 1876.* — Vergl. auch Lindemann: Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme etc. Diese Annalen Bd. VII, p. 136, 142, 144. Die Red.

then the work done by a wrench of intensity β'' on the screw β when a body receives a twist of amplitude α' about the screw α is:

$$\alpha'\beta''\{(p_\alpha + p_\beta)\cos O - d\sin O\}.$$

The theory of screws has many points of connexion with recent geometrical speculations on the linear complex, by the late Dr. Plücker and Dr. Felix Klein. Thus the latter has shown (Mathematische Annalen, Band II., p. 368), that if p_α and p_β be each the „Hauptparameter" of a linear complex, and if

$$(p_\alpha + p_\beta)\cos O - d\sin O = 0,$$

where d and O relate to the principal axes of the complexes, that then the two complexes possess a special relation and are said to be in „involution".

The quantity

$$(p_\alpha + p_\beta)\cos O - d\sin O$$

is termed the *virtual coefficient* of the two screws α and β.

One property of the virtual coefficient is of the utmost importance. If the two screws α and β be interchanged, the virtual coefficient remains unaltered. The identity of the laws of composition of twists and wrenches arises from this property, as does also the Theory of Reciprocal Screws.

The surface of which the equation is (Plücker)

$$z(x^2+y^2) - (p_\alpha - p_\beta)xy = 0$$

is called the *cylindroid*. The pitch of the generator which makes an angle θ with the axis of x is

$$p_\alpha\cos^2\theta + p_\beta\sin^2\theta.$$

The pitch of each screw on a cylindroid is proportional to the inverse square of the parallel diameter of the pitch conic.

If a body receive small twists about three screws on a cylindroid, and if the amplitude of each twist be proportional to the sine of the angle between the two non-corresponding screws, then the body after the last twist will occupy the same position which it did before the first.

If a body be acted upon by wrenches about three screws on a cylindroid, and if the intensity of each wrench be proportional to the sine of the angle between the two non-corresponding screws, then the three wrenches equilibrate.

III.

Reciprocal screws.

If a body only free to twist about a screw α be in equilibrium, though acted upon by a wrench on the screw β, then conversely a

body only free to twist about the screw β will be in equilibrium, though acted upon by a wrench on the screw α. When this condition is satisfied, α and β are said to be *reciprocal screws.*

If a screw η be reciprocal to two given screws ϑ and φ, then η is reciprocal to every screw on the cylindroid (ϑ, φ).

A screw reciprocal to a cylindroid must intersect the cylindroid in two screws of equal pitch and be perpendicular to the third screw on the surface which it meets.

From any point P perpendiculars can be let fall upon the generators of the cylindroid, and if to these perpendiculars pitches are assigned which are equal and opposite in sign to the pitches of the two remaining screws on the cylindroid intersected by the perpendicular, then all these perpendiculars will form a cone of reciprocal screws. This cone is of the second order.

The locus of a screw reciprocal to four given screws is a cylindroid.

One screw can be found which is reciprocal to five given screws.

One screw can always be found on a cylindroid reciprocal to a given screw.

IV.

Screw coordinates.

To determine the intensities of the seven wrenches on seven given screws, such that when these wrenches are applied to a rigid body, either entirely free or constrained in any way, they shall equilibrate.

The solution of this problem is identical with that which may be enunciated as follows: —

To determine the amplitudes of the seven twists about seven given screws, such that, if these twists be applied to a rigid body in succession, the body after the last twist shall occupy the same position which it had before the first.

We are thus enabled to decompose a twist (or wrench) into six twists or wrenches upon six screws of reference. It is convenient to select six screws of reference of which each pair are reciprocal (Klein).

We may now speak of the co-ordinates of a wrench, meaning thereby the intensities of its six components on the co-reciprocals. So also we may speak of the co-ordinates of a twist, meaning thereby the amplitudes of its six components about the six co-reciprocals.

The co-ordinates of a wrench of intensity ϱ'' on the screw ϱ are denoted by ϱ_1'', &c. ϱ_6''. The co-ordinates of a twist of amplitude ϱ' about ϱ are denoted by ϱ_1', &c. ϱ_6'.

A wrench on the screw α, of which the intensity is *one unit*, has for its components, on six co-reciprocal screws, wrenches of which

the intensities may be said to constitute *the co-ordinates of the screw* α. These co-ordinates may be denoted by α_1, &c., α_6.

If $p_1, \cdots, p_6$ be the pitches of the six co-reciprocal screws of reference then the virtual coefficient of the screws α and β is

$$2\,\Sigma p_1 \alpha_1 \beta_1 .$$

The pitch of the screw α is

$$\Sigma p_1 \alpha_1^2 .$$

V.

General considerations on Equilibrium.

To specify with precision the nature of the freedom enjoyed by a rigid body, it is necessary to ascertain all the screws about which the constraints will permit the body to be twisted. When the attempt has been made for every screw in space, the results will give us all the information conceivable with reference to the freedom of the body, and also with reference to the contraints by which the movement may be hampered.

Suppose that n screws A_1, &c., A_n have been found by these trials, about each of which the body can receive a twist. It is evident, without further trial, that twisting about an infinite number of other screws must also be possible ($n > 1$): for suppose the body receive any n twists about A_1, &c., A_n the position attained could have been reached by a twist about some single screw A. It follows that the body must be free to twist about A. Now since the amplitudes of the n twists may have any magnitude (each not exceeding an infinitely small quantity), A is merely one of an infinite number of screws, about which twisting must be possible. *All these screws, together with* A_1, &c., A_n, *we call a screw complex of the* n^{th} *order and first degree**).

The number of parameters necessary to specify a screw complex of the n^{th} order and first degree is

$$n(6-n).$$

All the screws which are reciprocal to a screw complex of the n^{th} order and first degree constitute a screw complex of the $(6-n)^{th}$ order and first degree.

The number of parameters required to define a screw complex of the n^{th} order and first degree is the same as the number of parameters

*) „Complex of the n^{th} order" ist zu verstehen als „Complex von n Dimensionen". Die Benennung umfasst also für $n = 3, 2, 1, 0$, was, unter Beschränkung auf gerade Linien, Linien-Complex, Congruenz, Linienfläche, Liniengruppe benannt wird. Die Red.

required to define a screw complex of the $(6-n)^{th}$ order and first degree.

The most general screw complex of the fifth order and first degree consists simply of all the screws in space which are reciprocal to an arbitrary screw.

The most general screw complex of the fourth order and first degree consists simply of all the screws in space which are reciprocal to an arbitrary cylindroid.

If the screw complex P expresses the freedom of a rigid body, then the body will remain in equilibrium though acted upon by a wrench on any screw of the reciprocal screw complex Q. This is, perhaps, the most general theorem which can be enunciated with respect to the equilibrium of a rigid body.

In the same manner it may be shown that a body which is free to twist about all the screws of Q will not be disturbed by a wrench about any screw of P. Thus, of two reciprocal complexes, each expresses the locus of a wrench which is unable to disturb a body free to twist about any screw of the other.

It also follows that the reactions of the constraints by which the movements of a body are confined to twists about the screws of a complex P can only be wrenches on the reciprocal screw complex Q, for the reactions of the constraints are only manifested by the success with which they resist the efforts of certain wrenches to disturb the equilibrium of the body.

VI.

Principal screws of Inertia.

If a quiescent rigid body have freedom of the n^{th} order, then n screws can always be found (but not more than n), such that if the body receive an impulsive wrench on any one of these screws, the body will commence to twist about the same screw.

These n screws are of great significance in the present method of studying Dynamics, and they may be termed the *principal screws of inertia.*

We have now to define the group of six co-reciprocal screws which are peculiarly adapted to serve as the screws of reference in Kinetic investigations. Let O be the centre of inertia of the rigid body, and let OA, OB, OC be the three pincipal axes through O, while a, b, c are the corresponding radii of gyration. Then two screws along OA, viz.: ω_1, ω_2, with pitches $+a$, $-a$; two screws along OB, viz.: ω_5, ω_4, with pitches $+b$, $-b$, and two along OC, viz.: ω_3, ω_6, with pitches $+c$, $-c$, are the co-reciprocal group which we shall employ.

For convenience in writing the formulæ, we shall often use p_1, &c. p_6, to denote the pitches as before.

The six screws thus defined are termed the *absolute principal screws of inertia of a free rigid body.*

If a free quiescent rigid body receive an impulsive wrench on a screw η, the body will immediately commence to twist about an instantaneous screw α. The co-ordinates of α being given, it is required to determine the co-ordinates of η.

If the co-ordinates of the instantaneous screw be proportional to α_1, &c. α_6, *then the co-ordinates of the corresponding impulsive screw are proportional to* $p_1\alpha_1$, &c. $p_6\alpha_6$.

If the body had freedom of the fifth order, then an impulsive wrench on *any* screw on a certain cylindroid will make the body commence to twist about a given screw.

If a body had freedom of the third order, then the „locus" of an impulsive wrench which would make the body twist about a given screw consists of all the screws in space which are reciprocal to a certain cylindroid.

If α and β be two instantaneous screws, and if η and ξ be the corresponding impulsive screws, then when α is reciprocal to ξ we must have β reciprocal to η. α and β are then said to form a pair of *conjugate screws of inertia.*

From the screw-complex of the n^{th} order P, n screws can be selected so that every pair of them are conjugate screws of inertia.

The twisting motion of a rigid body with freedom of the n^{th} order may be completely specified by the twist-velocities of the components of the twisting motion on any n screws of the complex defining the freedom. If the screws of reference be a set of conjugate screws of inertia, the expression for the kinetic energy of the body consists of n square terms.

If a group of instantaneous screws belong to a complex of the n^{th} order, then the corresponding group of impulsive screws also belong to a complex of the n^{th} order.

If a free or constrained rigid body receives an impulsive wrench, the body will commence to move with a larger kinetic energy when it is permitted to select its own instantaneous screw from the screw complex P defining the freedom, than it would have acquired, had it been arbitrarily restricted to any other screw of the complex. (Euler.)

A wrench which acts upon a constrained rigid body may always be replaced by a wrench on a screw belonging to the screw complex, which defines the freedom of the body.

VII.

Potential Energy of a displacement.

The function V, which expresses the potential energy of a small displacement from a position of equilibrium, is a homogeneous function of the second degree of the n co-ordinates, by which the displacement is defined.

If a free or constrained rigid body be displaced from a position of equilibrium by twists of small amplitudes, $\vartheta_1', \cdots, \vartheta_n'$, about n co-reciprocal screws of reference, and if V denote the work done in producing this movement, then the reduced wrench, which acts upon the body in its new position, has for components on the screws of reference, wrenches of which the intensities are found by dividing twice the pitch of the corresponding reference screw into the differential coefficient of V, with respect to the corresponding amplitude.

Suppose that a twist about a screw ϑ evokes a wrench on a screw η, while a twist about a screw φ evokes a wrench on a screw ξ. If ϑ be reciprocal to ξ, then must φ be reciprocal to η.

n screws can be found such that when the body is displaced by a twist about any one of these screws, a reduced wrench is evoked about the same screw. The screws which possess this property are called the *principal screws of the potential.*

The expression for the potential will consist of the sum of n square terms, whenever it is referred to *any* set of n conjugate screws of the potential.

VIII.

Harmonic screws.

If a rigid body be displaced from a position of equilibrium by a twist about a screw ϑ, and if the evoked wrench tend to make the body commence to twist about the same screw ϑ, then ϑ may be called an harmonic screw, and the number of harmonic screws is the same as the order of the screw complex which defines the freedom of the rigid body.

If a rigid body occupy a position of stable equilibrium under the influence of a system of forces, as restricted in § 6., then n harmonic screws can be selected from the screw complex of the n^{th} order, which defines the freedom of the body, and if the body be displaced from its position of equilibrium by a twist about a harmonic screw, and if it also receive a small initial twist velocity about the same screw, then the body will continue for ever to perform twist oscillations about that harmonic screw, and the amplitude of the twist will be always equal to the arc of a certain circular pendulum, which has an appropriate length, and was appropriately started.

IX.

Freedom of the first order.

Every straight line in space, when it receives an appropriate pitch, consitutes a screw of a given screw complex of the fifth order.

If all the screws of a screw complex be modified by the addition of the same linear magnitude (positive or negative) to the pitch of every screw, then the collection of screws thus modified still form a screw complex of the same order.

If a body which has freedom of the first order be in equilibrium, then the necessary and sufficient condition is, that the forces which act upon the body shall constitute a wrench on a screw of the screw complex of the fifth order, which is reciprocal to the screw which defines the freedom. We thus see that every straight line in space may be the residence of a screw, a wrench on which is consistent with the equilibrium of the body.

There are n screws belonging to each screw complex of the n^{th} order on which the time of vibration is a maximum or minimum, and these n screw are also the harmonic screws.

Taking the screw complex of the sixth order, which of course includes every screw in space, we see that if the body be permitted to twist about one of the six harmonic screws the time of vibration will be a maximum or minimum, as compared with the time of vibration on any adjacent screw.

X.

Freedom of the second order.

If $U_2 = 0$ denote a screw complex of the fifth order and second degree, then *to every screw* η *corresponds with respect to the screw complex, a polar screw*, whose co-ordinates are proportional to —

$$\frac{1}{p_1}\frac{dU_\eta}{d\eta_1}, \ldots, \frac{1}{p_6}\frac{dU_\eta}{d\eta_6},$$

the relation between η and its polar being completely independent of the group of co-reciprocals screws, which have been chosen as the screws of reference.

The anharmonic ratio of four screws on the impulsive cylindroid is equal to the anharmonic ratio of the four corresponding screws on the instantaneous cylindroid.

If impulsive wrenches on any four cocylindroidal screws act upon a partially free rigid body, the four corresponding initial reactions of the constraints also constitute wrenches about four cocylindroidal screws; and, further, the anharmonic ratios of the two groups of four screws are equal.

There are two screws on the cylindroid expressing the freedom which possess the property that an impulsive wrench on one of these screws will cause the body to commence to twist about the same screw.

If from the centre of the cylindroid radii vectores be drawn parallel to the screws of the cylindroid and proportional to the twist velocities with which the body should twist about the corresponding screws so that its kinetic energy shall be constant then the extremities of the radii vectores trace out an ellipse which is called the *ellipse of inertia.*

An impulsive wrench on a screw η acts upon a quiescent rigid body which has freedom of the second order. It is required to determine the screw ϑ, on the cylindroid expressing the freedom about which the body will commence to twist.

The ellipse of inertia enables us to solve this problem with great facility. Determine that one screw φ on the cylindroid which is reciprocal to η. Draw a diameter D of the ellipse of inertia parallel to φ. Then the required screw ϑ is simply that screw on the cylindroid which is parallel to the diameter conjugate to D in the ellipse of inertia.

The converse problem, viz., to determine the screw η an impulsive wrench on which would make the body commence to twist about ϑ is indeterminate. Any screw in space which is *reciprocal to* φ would fulfil the required condition.

We can interpret physically the common conjugate diameters of the pitch conic, and the ellipse of inertia. The two screws on the cylindroid parallel to these diameters are conjugate screws of inertia, and they are also reciprocal; they are, therefore, the *principal screws of inertia.*

If from the centre of the cylindroid radii vectores be drawn parallel to the screws of the cylindroid and proportional to the amplitudes of the twists which the body should receive about the corresponding screws from a position of stable equilibrium so that its potential energy shall be constant then these radii vectores trace out an Ellipse which is called the *Ellipse of the Potential.*

The common conjugate diameters of the pitch conic, and the ellipse of the potential, are parallel to the two screws on the cylindroid, which we have designated the *principal screws of the potential.*

When a body is displaced from its position of equilibrium by a small wrench upon a principal screw of the potential, then the body moves to the new position which is required in its altered circumstances by a small twist about the same screw.

The common conjugate diameters of the ellipse of inertia, and the ellipse of the potential, are parallel to the two harmonic screws on the cylindroid.

XI.

Freedom of the third order.

All the screws of given pitch $+k$ belonging to a given screw complex S of the third order lie upon a hyperboloid of which they form one system of generators, while the other system of generators with the pitch $-k$ belong to the reciprocal screw complex.

The three principal axes of the pitch quadric, when furnished with suitable pitches p_α, p_β, p_γ, constitute screws belonging to the screw complex of the third order, and the equation of the pitch quadric has the form — (Plücker)

$$p_\alpha x^2 + p_\beta y^2 + p_\gamma z^2 + p_\alpha p_\beta p_\gamma = 0.$$

Each screw of S has a pitch which is proportional to the inverse square of the parallel diameter of the pitch quadric.

Any three co-reciprocal screws of S are parallel to a triad of conjugate diameters of its pitch quadric.

Three screws belonging to the screw complex and also three screws belonging to the reciprocal screw complex, can be drawn through any point. All the screws of the complex parallel to a plane must lie upon a cylindroid.

Take *any* four screws α, β, γ, δ of the screw complex of the third order. Then the cylindroid (α, β) has a screw in common with the cylindroid (γ, δ).

That a rigid body with freedom of the third order may be in equilibrium under the action of gravity, we have the necessary and sufficient condition, which is thus stated: —

The vertical through the centre of inertia must be one of the reciprocal system of generators on the pitch quadric.

We see that the centre of inertia must, therefore, lie upon a screw of zero pitch which belongs to the screw complex; whence we have the following theorem: — The constraints which are necessary for the equilibrium of a body which has freedom of the third order under the action of gravity, would permit rotation of the body round one definite line through the centre of inertia.

The momental ellipsoid, which is of such significance in the theory of the rotation of a rigid body about a fixed point, is presented in the Theory of Screws as a particular case of another ellipsoid called *the ellipsoid of inertia*, which is of great importance in connexion with the general screw complex of the third order.

The kinetic energy of a rigid body, when twisting with a given twist velocity about any screw of a complex of the third order, is proportional to the inverse square of the parallel diameter of this ellipsoid; and a set of three conjugate diameters of the ellipsoid are parallel

to a set of three conjugate screws of inertia which belong to the screw complex.

We might also enunciate the property in the following manner: — Any diameter of the ellipsoid of inertia is proportional to the twist velocity with which the body should twist about the parallel screw of the screw complex, so that its kinetic energy shall be one unit.

It will simplify matters to consider that the ellipsoid of inertia is concentric with the pitch quadric. It will then be possible to find a triad of common conjugate diameters to the two ellipsoids. We can then determine three screws of the complex parallel to these diameters and these three screws will be co-reciprocal, and also conjugate screws of inertia. They will, therefore, form what we have termed the *principal screws of inertia*. When the screw complex reduces to a pencil of screws of zero pitch passing through a point, then the principal screws of inertia reduce to the well-known principal axes.

The work done in giving the body a twist of given amplitude from a position of equilibrium about any screw of a complex of the third order, is proportional to the inverse square of the parallel diameter of a certain ellipsoid which we may call the *ellipsoid of the potential*, and three conjugate diameters of this ellipsoid are parallel to three conjugate screws of the potential in the screw complex.

When a rigid body has freedom of the third order, it must have three harmonic screws, or screws which are conjugate screws of inertia, as well as conjugate screws of the potential. We are now enabled to construct these screws with facility, for they must be *those screws of the screw complex which are parallel to the triad of common conjugate diameters of the ellipsoid of inertia, and the ellipsoid of the potential.*

If the body be once set twisting about one of the harmonic screws, it will continue to twist thereon for ever, and in general its motion will be compounded of twisting motions upon the three harmonic screws.

If the displacement of the body from its position of equilibrium has been effected by a small twist about a screw on the cylindroid, which contains two of the harmonic screws, then the twist can be decomposed into components on the harmonic screws, and the instantaneous screw about which the body is twisting at any epoch will oscillate backwards and forwards upon the cylindroid, from which it will never depart.

If the periods of the twist oscillations on two of the harmonic screws coincided, then every screw on the cylindroid which contains those harmonic screws would also be a harmonic screw.

A rigid body which is free to rotate about a fixed point is at rest under the action of gravity. If a plane S be drawn through the

point of suspension O, conjugate to the vertical diameter OI of the momental ellipsoid, then the common conjugate diameters of the two ellipses in which S cuts the momental ellipsoid, and a circular cylinder whose axis is OI, are the two harmonic axes. If the body be displaced by a small rotation about one of these axes, the body will continue for ever to oscillate to and fro upon this axis, just as if the body had been actually constrained to move about this axis.

XII.

Freedom of the fourth order.

The sum of the reciprocals of the pitches of n co-reciprocal screws, selected from a screw complex of the n^{th} order, is a constant for each screw complex.

A quiescent rigid body is free to twist about all the screw of a screw complex A. If the body receive an impulsive wrench on a screw η belonging to A, then the body will commence to twist about the screw θ, of which η is the polar with respect to a complex of the second order.

This complex is defined by the property, that the kinetic energy of the body when twisting about any screw which belongs to it is zero.

XIII.

Freedom of the fifth order.

When six screws, A_1, &c., A_6, are reciprocal to a single screw T, a certain relation must subsist between the pitches and the coefficients of A_1, &c., A_6. The function which, when equated to zero, gives the condition required, may be called the *sexiant* of the six screws.

The property possessed by six screws when their sexiant vanishes may be enunciated in different ways, which are precisely equivalent.

a) The six screws are all reciprocal to one screw.

b) The six screws are members of a screw complex of the fifth order and first degree.

c) Wrenches of appropriate intensities on the six screws equilibrate, when applied to a free rigid body.

d) Properly selected twist velocities about the six screws neutralize, when applied to a rigid body.

e) A body might receive six small twists about the six screws, so that after the last twist the body would occupy the same position which it had before the first.

Any wrench (or twist or twist velocity) can be rosolved into six wrenches (or twists or twist velocities) about six screws when the sexiant of the six screws does *not* vanish.

Reference being made to the absolute principal screws of inertia we have for the determination of the five principal screws of inertia the equation

$$\frac{p_1\lambda_1^2}{p_1-x}+\frac{p_2\lambda_2^2}{p_2-x}+\frac{p_3\lambda_3^2}{p_3-x}+\frac{p_4\lambda_4^2}{p_4-x}+\frac{p_5\lambda_5^2}{p_5-x}+\frac{p_6\lambda_6^2}{p_6-x}=0.$$

This equation is of the fifth degree. If x' denote one of roots of the equation, then the corresponding principal screw of inertia has co-ordinates proportional to

$$\frac{\lambda_1}{p_1-x'},\quad \frac{\lambda_2}{p_2-x'},\quad \frac{\lambda_3}{p_3-x'},\quad \frac{\lambda_4}{p_4-x'},\quad \frac{\lambda_5}{p_5-x'},\quad \frac{\lambda_6}{p_6-x'}.$$

XIV.

Freedom of the sixth order.

When seven instantaneous screws are known, and the corresponding seven impulsive screws, we are enabled by geometry to deduce the instantaneous screw corresponding to any eighth impulsive screw, and *vice versa*.

If a rigid body be in a position of stable equilibrium under the influence of a sytem of forces which have a potential, and if the twists about seven given screws evoke wrenches about seven other given screws, then, without knowing any further about the forces, we shall be able to determine the screw on which a wrench is evoked by a twist about any eighth screw.

November 1875.

The Observatory Dunsink.

Ueber die Discriminante der Modulargleichungen der elliptischen Functionen (Fortsetzung)*).

Von M. Krause in Heidelberg.

In einer früheren Arbeit sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt worden, denen die Coefficienten einer Gleichung:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

genügen müssen, damit für die, einer Lösung τ derselben entsprechende Function $\varphi(\tau)$ zwei Wurzeln der Modulargleichung, die einer rationalen Transformation n^{ten} Grades gehört, einander gleich werden, vorausgesetzt, dass n eine unpaare Zahl ohne quadratischen Theiler ist. Dabei war der Fall ausgeschlossen worden, dass P, Q, R einen gemeinsamen Theiler haben, der zu gleicher Zeit Theiler von n ist (p. 548). Diese Beschränkung soll jetzt aufgehoben werden.

Wir schliessen uns in unseren Bezeichnungen an die frühere Arbeit an und legen von nun an Gleichungen zu Grunde, deren Coefficienten einerseits den p. 547 aufgestellten nothwendigen Bedingungen genügen, anderseits aber noch mit n einen grössten gemeinsamen Theiler haben. Es soll gezeigt werden, dass auch dann die nothwendigen Bedingungen zu gleicher Zeit die hinreichenden sind.

Sei der gemeinsame Theiler zunächst eine Primzahl a_p.

Setzen wir

$$P = a_p P'; \quad Q = a_p Q'; \quad R = a_p R',$$

so sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden.

Erster Hauptfall: P' ist relativ prim zu a_p. Die Gleichung:

$$P'\tau^2 + 2Q'\tau + R' = 0$$

gehört zu einer Transformation $\frac{n}{a_p} = n'^{\text{ten}}$ Grades. Da ihre Coefficienten nicht mehr sämmtlich einen und denselben Theiler mit n' gemeinsam

*) Siehe Band VIII, p. 539 dieses Journals.

haben, so ist sie eine Gleichung der ursprünglich betrachteten Art für den Transformationsgrad n'.

Somit werden sich bei analoger Bezeichnung der Buchstaben eindeutig bestimmte Werthe von

$$\delta'\delta_1'\xi_1'; \quad u'u_1'\xi_2'; \quad a_0'b_0'a_1'b_1'a'$$

ergeben. Gehen wir zu der Gleichung:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

zurück, so ist klar, dass die ihr entsprechenden Werthe von δ resp. u von den Werthen von δ' resp. u' höchstens um den Factor a_p verschieden sein können, wenn sie ihnen nicht gleich sind. Da nun $u\delta$ in P aufgehen muss, so sind nach den gemachten Voraussetzungen überhaupt nur noch drei Fälle möglich:

1) $\delta = \delta'$; $u = u'$; also $\delta_1 = a_p\delta_1'$; $u_1 = a_p u_1'$;
2) $\delta = \delta'$; $u = a_p u'$; also $\delta_1 = a_p\delta_1'$; $u_1 = u_1'$;
3) $\delta = a_p\delta'$; $u = u'$; also $\delta_1 = \delta_1'$; $u_1 = a_p u_1'$.

Wir betrachten den ersten Fall zuerst.

Die Bestimmungsgleichungen für $a_0 b_1$ werden wie früher:

$$nua_0 = (Q\delta + P16\xi_1) + a\delta,$$
$$n\delta b_1 = -(Qu + P16\xi_2) + au,$$

oder, indem wir durch a_p dividiren und die oben gemachten Annahmen berücksichtigen:

$$n'u'a_0 = (Q'\delta' + P'16\xi_1) + a'\delta',$$
$$n'\delta' b_1 = -(Q'u' + P'16\xi_2) + a'u'.$$

Mithin ergeben sich für ξ_1 und ξ_2 die Congruenzen:

$$P_1'16\xi_1 \equiv \frac{-Q'-a'}{u'} \bmod \delta_1',$$

$$P_1'16\xi_2 \equiv \frac{-Q'+a'}{\delta'} \bmod u_1',$$

wobei

$$P_1' = \frac{P'}{u'\delta'}$$

ist.

Nehmen wir hinzu, dass überdies ξ_1 und ξ_2 so bestimmt werden müssen, dass der Zähler von b_0 in:

$$b_0 = \frac{-R + 16[b_1u_1\xi_1 - a_0\delta_1\xi_2] + 16^2P_1\xi_1\xi_2}{\delta_1 u_1}$$

durch den grössten gemeinsamen Theiler von $\delta_1 u_1$ und P_1, also erst recht durch den von $\delta_1'u_1'$ und P_1' theilbar sein muss, so folgt:

$$\xi_1 = \xi_1' + k_1 \delta_1',$$
$$\xi_2 = \xi_2' + k_2 u_1',$$

und daher:

$$a_0 = a_0' + P_1' 16 k_1,$$
$$b_1 = b_1' + P_1' 16 k_2,$$

wobei $\xi_1' \xi_2' a_0' b_1'$ die obigen eindeutig bestimmten Grössen bedeuten und $k_1 k_2$ sämmtliche Werthe von 0 bis $a_p - 1$ annehmen können, für welche:

$$R - 16 [b_1 u_1 \xi_1 - a_0 \delta_1 \xi_2] - 16^2 P_1 \xi_1 \xi_2 \equiv 0 \bmod p^2$$

wird, oder was diesem äquivalent ist, für welche b_0 sich aus

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$$

als ganze Zahl bestimmen lässt.

Setzen wir in die letzte Gleichung für a_0 und b_1 die gefundenen Ausdrücke ein und berücksichtigen, dass $P_1 = a_1$, $P_1' = a_1'$ d. h. $a_1 = a_p a_1'$ ist, so wird dieselbe

$$(a_0' + a_1' 16 k_1)(b_1' + a_1' 16 k_2) - a_p a_1' b_0 = 1,$$

oder, da:

$$a_0' b_1' - a_1' b_0' = 1$$

ist:

$$a_1' 16 k_1 16 k_2 + a_0' 16 k_2 + b_0' \equiv 0 \bmod a_p,$$

oder:

$$16 k_2 [a_1' 16 k_1 + a_0'] + b_1' 16 k_1 + b_0' \equiv 0 \bmod a_p.$$

Für ein beliebiges $k_1 < a_p$ wird diese Congruenz dann und nur dann genügende Lösungen von k_2 ergeben, wenn für dasselbe entweder $a_1' 16 k_1 + a_0'$ nicht durch a_p theilbar ist, oder wenn, falls es durch a_p theilbar ist, zu gleicher Zeit die Congruenz besteht:

$$b_1' 16 k_1 + b_0' \equiv 0 \bmod a_p.$$

Der letzte Fall kann aber nie eintreten. In der That wäre gleichzeitig:

$$a_1' 16 k_1 + a_0' \equiv 0 \bmod a_p,$$

und:

$$b_1' 16 k_1 + b_0' \equiv 0 \bmod a_p,$$

so folgt hieraus:

$$a_0' b_1' - a_1' b_0' \equiv 0 \bmod a_p,$$

was nicht geht.

Da nun die Anzahl derjenigen Werthe von $k_1 < a_p$, für welche $a_1' 16 k_1 + a_0'$ durch a_p theilbar ist, die Einheit ist, so folgt, dass es $a_p - 1$ Werthe von $k_1 < a_p$ giebt, denen ganzzahlige Werthe von $k_2 < a_p$ entsprechen. Die Zahl der jedesmal entsprechenden Werthe von k_2 ist die Einheit, da die Congruenz vom ersten Grade ist. Da ebenso gezeigt werden kann, dass $(a_p - 1)$ Werthen von $k_2 < a_p$ je ein ganzzahliger Werth von $k_1 < a_p$ entspricht, so folgt, dass wir im

Ganzen $a_p - 1$ von einander verschiedene Paare $k_1 k_2$ erhalten, für welche b_0 aus:

$$a_0 b_1 - a_0 b_1 = 1$$

als ganze Zahl bestimmt werden kann.

Jedem Paare $k_1 k_2$ entspricht ein Paar zugehöriger Werthe von $\xi_1 \xi_2$. Sind die Paare der $k_1 k_2$ von einander verschieden, so sind es die der $\xi_1 \xi_2$ auch, so dass wir im ersten Falle $a_p - 1$ verschiedene Werthesysteme $\delta \delta_1 \xi_1$; $u u_1 \xi_2$ erhalten, für welche b_0 mit ihm $a_0 b_0 a_1 b_1$ zu ganzen Zahlen werden.

Zweitens war gesetzt worden:

$$\delta = \delta'; \quad u = a_p u', \quad \text{also} \quad \delta_1 = a_p \delta_1'; \quad u_1 = u_1'.$$

Dann folgen für a_0 und b_1 die Gleichungen:

$$\begin{aligned} n' a_p u' a_0 &= \quad (Q' \delta' \quad + P' 16 \xi_1) + a' \delta', \\ n' \quad \delta' b_1 &= -(Q' a_p u' + P' 16 \xi_2) + a' a_p u', \end{aligned}$$

mithin für ξ_1 und ξ_2 die Congruenzen:

$$P_1' 16 \xi_1 \equiv \frac{-Q' - a'}{u'} \bmod a_p \delta_1',$$

$$P_1' 16 \xi_2 \equiv \frac{(-Q' + a') a_p}{\delta'} \bmod u_1'.$$

Wendet man jetzt Schlüsse genau derselben Art an, wie die in der ersten Arbeit gemachten, so zeigt es sich, dass nur ein Werthepaar $\xi_1 \xi_2$, und mit ihm nur ein Werthesystem $\delta \delta_1 \xi_1$; $u u_1 \xi_2$ existirt, welches $a_0 b_0 a_1 b_1$ zu ganzen Zahlen macht.

Dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn wir drittens:

$$\delta = a_p \delta'; \quad u = u', \quad \text{also} \quad \delta_1 = \delta_1'; \quad u_1 = a_p u_1'$$

setzen.

Die beiden letzten Werthesysteme sind dabei sowohl von denen des ersten Falles als auch von einander verschieden. Das erstere ist unmittelbar klar, das letztere könnte nur dann zweifelhaft sein, wenn $\delta' = u'$ ist. Alsdann nämlich wird das zum zweiten Falle gehörende System: $\delta'(a_p \delta_1') \xi_1$; $(a_p \delta') \delta_1' \xi_2$ das zum dritten Falle gehörende: $(a_p \delta') \delta_1' x_1$; $\delta'(a_p \delta_1') x_2$ und es würden diese beiden Systeme wirklich einander gleich werden, wenn $\xi_1 = x_2$; $\xi_2 = x_1$ sein könnte. Letzteres ist aber nicht möglich. In der That, es genügt ξ_1 der Congruenz:

$$P_1' 16 \xi_1 \equiv \frac{-Q' - a'}{\delta'} \bmod a_p \delta_1',$$

x_2 der Congruenz:

$$P_1' 16 x_2 \equiv \frac{-Q' + a'}{\delta'} \bmod a_p \delta_1',$$

mithin müsste sein:

$$\frac{a'}{\delta'} \equiv 0 \bmod a_p \delta_1'$$

oder

$$a' \equiv 0 \bmod n,$$

was nicht geht.

Somit finden wir, dass im ersten Hauptfalle (a_p+1) von einander verschiedene Systeme $\delta\delta_1\xi_1$; $uu_1\xi_2$ existiren, denen ganzzahlige Werthe von $a_0b_0a_1b_1$ entsprechen.

Zweiter Hauptfall: P' enthält den Factor a_p in einer beliebig hohen Potenz: dann folgt aus:

$$(Q+a)(Q-a) = PR - n^2,$$

dass $(Q+a)$ sowohl, wie $(Q-a)$ durch die erste und nur durch die erste Potenz von a_p theilbar ist.

Die ersten Schlüsse bleiben genau dieselben, wie im ersten Hauptfalle, nur haben wir dieses mal vier von einander verschiedene Fälle zu unterscheiden

1) $\delta = \delta'$; $u = u'$, also $\delta_1 = a_p\delta_1'$; $u_1 = a_p u_1'$,
2) $\delta = \delta'$; $u = a_p u'$, also $\delta_1 = a_p\delta_1'$; $u_1 = u_1'$,
3) $\delta = a_p\delta'$; $u = u'$, also $\delta_1 = \delta_1'$; $u_1 = a_p u_1'$,
4) $\delta = a_p\delta'$; $u = a_p u'$, also $\delta_1 = \delta_1'$; $u_1 = u_1'$.

Durch Schlüsse, die den früheren ganz analog sind, findet man, dass im ersten Falle a_p von einander verschiedene Werthepaare $\xi_1\xi_2$, mithin ebenso viel von einander verschiedene Werthesysteme $\delta\delta_1\xi_1$; $uu_1\xi_2$ existiren, für welche $a_0b_0a_1b_1$ zu ganzen Zahlen werden. Der zweite und dritte Fall giebt, vermöge der gemachten Bemerkung über $Q+a$ und $Q-a$ kein Werthepaar $\xi_1\xi_2$, der vierte endlich ein einziges Werthesystem $\delta\delta_1\xi_1$; $uu_1\xi_2$, das von denen des ersten Falles verschieden ist, welches allen Bedingungen genügt.

Somit existiren auch im zweiten Hauptfalle (a_p+1) von einander verschiedene Werthesysteme $\delta\delta_1\xi_1$; $uu_1\xi_2$, denen ganzzahlige Werthe von $a_0b_0a_1b_1$ entsprechen, sodass das Resultat allgemein gültig ist, vorausgesetzt, das a_p eine Primzahl ist.

Es ist klar, wie sich die Sache gestalten wird, falls P, Q, R mit n einen zusammengesetzten Theiler gemeinsam haben. Sei derselbe gleich

$$\alpha = a_p a_q a_r \cdots,$$

wo $a_p a_q a_r \cdots$ ihrerseits Primzahlen sind, so ist die Zahl der von einander verschiedenen Werthesysteme $\delta\delta_1\xi_1$; $uu_1\xi_2$, welche ganzzahlige Werthe von $a_0b_0a_1b_1$ ergeben, gleich

$$(a_p+1)(a_q+1)(a_r+1)\cdots.$$

Es bliebe für die einzelnen Systeme nun noch zu beweisen übrig, dass $a_0 b_0 a_1 b_1$ die jedesmal verlangte Form haben. Indessen ist der Beweis dem früheren analogen so durchaus entsprechend, dass er füglich unterlassen werden kann.

Hieraus folgt, dass für jedes der Systeme $\delta\delta_1\xi_1; uu_1\xi_2$ wird:

$$\left(\frac{2}{\delta}\right)\varphi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right) = \left(\frac{2}{u}\right)\varphi\left(\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right),$$

d. h. dass das Wurzelpaar der Modulargleichung

$$\left(\frac{2}{\delta}\right)\varphi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right), \quad \left(\frac{2}{u}\right)\varphi\left(\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)$$

denselben numerischen Werth annimmt. Die Anzahl der von einander verschiedenen Systeme $\delta\delta_1\xi_1; uu_1\xi_2$ ist aber $(a_p+1)(a_q+1)(a_r+1)\cdots$, mithin werden ebensoviele Wurzelpaare der Modulargleichung denselben Werth annehmen, wobei der Werth, den ein beliebiges der Paare annimmt, von dem der anderen verschieden sein kann oder nicht.

Jedenfalls sehen wir, dass die p. 547 aufgestellten nothwendigen Bedingungen auch in dem Ausnahmefall die hinreichenden sind. Wir wollen dieselben in einer von der früheren etwas abweichenden Form hier noch einmal anführen, um sie in dieser den folgenden Betrachtungen zu Grunde zu legen.

Es zeigt sich nämlich, dass sowohl P wie Q wie R, falls

$$\Delta = 16\,(3n - 8\delta)\,(n - 2\delta)$$

ist, durch 4, falls

$$\Delta' = -\,32\delta(n - 8\delta)$$

durch 2 theilbar sind, so dass wir unter Fortlassung dieser Factoren den Lehrsatz so aussprechen können:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit zu einer Wurzel von

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

eine Function $\varphi(\tau)$ gehöre, die Lösung der Discriminante

$$D = 0$$

ist, sind:

1) die Determinante der Gleichung muss sich in eine der beiden Formen:

$$\Delta = (3n - 8\delta)\,(n - 2\delta)$$

oder

$$\Delta' = -\,8\delta(n - 8\delta)$$

bringen lassen und negativ sein.

2) Falls $\Delta = (3n - 8\delta)\,(n - 2\delta)$, muss sein:

$$P \equiv 1 \bmod 1; \quad Q \equiv 1 \bmod 2; \quad R \equiv 2 \bmod 4,$$

falls $\Delta' = -\,8\delta(n - 8\delta)$, muss sein:

$$P \equiv 1 \bmod 2; \quad Q \equiv 2 \bmod 4; \quad R \equiv 4 \bmod 8$$

oder

$$P \equiv 0 \bmod 1; \quad Q \equiv 0 \bmod 4; \quad R \equiv 0 \bmod 8.$$

Zu gleicher Zeit sahen wir, dass, *wenn P, Q, R mit n keinen gemeinsamen Theiler haben, nur zwei Wurzeln der Modulargleichung einander gleich werden, wenn dagegen P, Q, R mit n den gemeinsamen Theiler α haben — wobei $\alpha = a_p a_q a_r \cdots$ — im Ganzen $(a_p+1)(a_q+1)(a_r+1)\cdots$ von einander verschiedene Wurzelpaare denselben Werth annehmen.* Die Methode, diese Paare zu bestimmen, ist aus dem Vorhergehenden ersichtlich und soll nicht noch einmal angeführt werden.

Mit Hülfe dieser Sätze ist es möglich, sämmtliche Gleichungen

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

aufzustellen, deren Lösungen die Argumente der von einander verschiedenen Lösungen $u = \varphi(\tau)$ der Discriminante:

$$s = u^N (u^8 - 1)^{N_1} (a_0 + a_1 u^8 + \cdots a_r u^{8r}) = 0$$

sind.

Die Lösungen $u = 0$, $u = e^{\frac{2si\pi}{8}}_{s=1\ldots8}$ sind nicht in Betracht zu ziehen, und wir können uns somit, da:

$$(a_0 + a_1 u^8 + \cdots a_r u^{8r})$$

eine ganze Function von u^8 ist, darauf beschränken, sämmtliche Gleichungen

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

aufzustellen, deren Lösungen von einander verschiedene Werthe von $\varphi(\tau)^8$ ergeben.

Zunächst lassen sich aus Bedingung 1) für jedes n unmittelbar alle nur möglichen Determinanten ableiten. Dieses sei geschehen; dann greifen wir eine beliebige derselben, die wir mit Δ bezeichnen wollen, heraus. Sämmtliche quadratische Formen, die zu der Determinante Δ gehören, zerfallen in eine gewisse Anzahl von Classen, deren jede wir uns durch eine reducirte Form repräsentirt denken können. Diese reducirten Formen sind nach bekannten Methoden aufzustellen und mögen wirklich aufgestellt sein. Greifen wir eine beliebige derselben heraus, so fragt es sich, giebt es sichere Criterien, zu unterscheiden, ob in der zugehörigen Classe Formen enthalten sind, deren Coefficienten auch der zweiten Bedingung genügen.

Wir müssen dazu die einzelnen Fälle der möglichen Determinanten unterscheiden.

Sei I. $-\Delta = (8\delta - 3n)(n - 2\delta)$ und zwar:

1) $-\Delta \equiv 1 \bmod 4$.

Alsdann sind für die Coefficienten der zu der Determinante Δ gehörenden quadratischen Formen überhaupt folgende Fälle möglich:

(a) $$P \equiv 1 \bmod 2; \quad Q \equiv 0 \bmod 2; \quad R \equiv 1 \bmod 2.$$

Wenden wir dann auf die Form (P, Q, R) eine lineare Substitution des vierten Falles an (siehe Königsberger. II. Band, p. 112), so geht dieselbe über in die Form $(P' Q' R')$, wobei

$$P' = Pb_1^2 + 2Qb_1a_1 + Ra_1^2;$$
$$R' = Pb_0^2 + 2Qb_0a_0 + Ra_0^2;$$
$$Q' = \left(Pb_0b_1 + Q(b_0a_1 + a_0b_1) + Ra_0a_1\right)$$

ist und $a_0a_1b_0b_1$ jene linearen Transformationszahlen bedeuten, die der Bedingung genügen:

$$a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 0, \quad \bmod 2.$$

Wie wir sehen, ist jetzt

$$P' \equiv 1 \bmod 2; \quad Q' \equiv 1 \bmod 2; \quad R' \equiv 2 \bmod 4,$$

d. h. wir sind durch eine lineare Substitution auf eine Form gekommen, deren Coefficienten der Bedingung (2) genügen d. h. in Classen dieser Art existiren stets Formen der verlangten Art:

(b) $$P \equiv 0 \bmod 2; \quad Q \equiv 1 \bmod 2; \quad R \equiv 1 \bmod 2.$$

In diesem Falle wenden wir auf die Form (P, Q, R) eine lineare Substitution des zweiten Falles an, um wieder zu einer Form (P', Q', R') zu gelangen, deren Coefficienten allen früher aufgestellten Bedingungen genügen:

(c) $$P \equiv 1 \bmod 2; \quad Q \equiv 1 \bmod 2; \quad R \equiv 2 \bmod 4.$$

Diese Coefficienten haben schon die gewünschte Form. Da weitere Fälle nicht möglich sind, so finden wir: In sämmtlichen Classen, die zu einer Determinante der Form:

$$\Delta \equiv 3 \bmod 4$$

gehören, giebt es Formen, deren Coefficienten der Bedingung zwei und somit allen aufgestellten Bedingungen genügen. In ähnlicher Weise sind alle übrigen Determinanten zu untersuchen. Die Resultate werden später angegeben werden. Dieselben liefern einfache Criterien, welche der reducirten Formen bei einer jeden der möglichen Determinanten beizubehalten, welche zu verwerfen sind.

Seien alle beizubehaltenden reducirten Formen sämmtlicher überhaupt möglicher Determinanten hingeschrieben, so fragt sich schliesslich noch, wieviel Formen in der zu einer jeden derselben gehörenden Classen sich befinden, die der Bedingung (2) genügen und überdies von

einander verschiedene Werthe von $\varphi(\tau)^8$ ergeben, wenn $\varphi(\tau)$ eine Wurzel der Discriminante ist.

Die Coefficienten der reducirten Formen können entweder der Bedingung 2) genügen, oder nicht. Im ersteren Falle behalten wir sie als Repräsentanten bei, im letzteren wählen wir dazu diejenige Form, die aus der reducirten durch eine möglichst einfache lineare Transformation entstanden ist und Bedingung 2) genügt.

Die linearen Substitutionen, vermöge welcher man aus jeder quadratischen Form sämmtliche zu derselben Classe gehörende Formen finden kann, zerfallen in sechs Ordnungen oder Fälle. Zunächst ist klar, dass diejenigen Formen, welche durch eine Substitution des ersten Falles aus den obigen Repräsentanten abgeleitet sind, stets dieselben Werthe von $\varphi(\tau)^8$ ergeben, da die ihnen entsprechenden $\varphi(\tau)$ Functionen sich von einander nur um achte Einheitswurzel unterscheiden.

Die andern fünf Fälle müssen bei den einzelnen Arten von Determinanten gesondert betrachtet werden.

Hierbei ist eine Bemerkung wesentlich. Wenn man von einer allen Bedingungen genügenden Form:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

ausgehend, durch eine lineare Substitution des $2, 3, \cdots 6^{\text{ten}}$ Falles zu einer Form:

$$P'\tau^2 + 2Q'\tau + R' = 0$$

gelangt, die auch allen Bedingungen genügt, so wird die ihr entsprechende Function $\varphi(\tau)^8$ von der der obigen Gleichung entsprechenden $\varphi(\tau)^8$ wirklich verschieden sein, wenn nicht beide Formen identisch sind. Es ist zu untersuchen, wann und ob dieses möglich ist d. h. eine Form:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

durch eine lineare Substitution des $2, 3 \cdots 6^{\text{ten}}$ Falles in sich selbst übergeführt werden kann.

Bekanntlich ergeben sich die Substitutionen, welche eine quadratische Form in sich selbst überführen aus den Lösungen der Gleichung:

$$t^2 - \Delta u^2 = \sigma^2,$$

wenn σ der grösste gemeinsame Theiler der drei Coefficienten P, Q, R ist und Δ die Determinante der Form bedeutet. In unserem Falle ist dieselbe negativ. Dann giebt es aber im Allgemeinen nur zwei Auflösungen der obigen Gleichung:

$$t = \sigma, \quad u = 0; \quad t = -\sigma, \quad u = 0.$$

Die zu beiden Fällen gehörenden Transformationszahlen sind:

$$a_0 = \pm 1, \quad b_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = \pm 1,$$

gehören also zur linearen Transformation des ersten Falles und sind nicht weiter zu berücksichtigen.

Eine Ausnahme bilden die Fälle

$$-\Delta = \sigma^2 \text{ und } -4\Delta = +3\sigma^2.$$

Dieselben sollen später behandelt werden und mögen einstweilen unberücksichtigt bleiben.

Sei nun unter dieser Einschränkung I. $\Delta = (3n - 8\delta)(n - 2\delta)$ und zwar:

(1) $$\Delta \equiv 3 \bmod 4.$$

Wenden wir dann auf die repräsentirenden Formen Substitutionen des zweiten, vierten, fünften und sechsten Falles an, so kommt man nicht mehr zu Formen, die allen Bedingungen genügen, vielmehr geschieht dieses nur und stets durch Substitutionen des dritten Falles.

Hieraus folgt:

Zu jeder Classe einer Determinante der Form $\Delta \equiv 3 \bmod 4$ giebt es zwar unendlich viele Formen, die allen Bedingungen genügen, jedoch liefern dieselben nur zwei von einander verschiedene Werthe von $\varphi(\tau)^8$. Wir brauchen daher auch nur zwei Formen in Betracht zu ziehen, z. B. die repräsentirende und eine zweite, die aus ihr durch eine lineare Substitution des dritten Falles entstanden ist.

In ähnlicher Weise sind sämmtliche übrigen Determinanten zu behandeln.

Schliesst man $\Delta = -\sigma^2$ und $4\Delta = -3\sigma^2$ aus, so ergeben sich Resultate, die wir mit den früheren in folgenden Sätzen zusammenfassen können:

Sei I. $\Delta = (8\delta - 3n)(n - 2\delta)$. Wenn $\Delta \equiv 3 \bmod 4$ ist, so liefert eine jede Classe je zwei Formen der verlangten Art.

Wenn $\Delta \equiv 1 \bmod 4$ ist, so liefern nur die uneigentlich primitiven Classen Formen der verlangten Art und zwar, wenn $\Delta \equiv 1 \bmod 8$ ist, deren zwei, wenn $\Delta \equiv 5 \bmod 8$, deren sechs.

Sei II. $\Delta = -8\delta(n - 8\delta)$. Wenn δ ungerade ist, so sind alle diejenigen Classen auszuschliessen, in welchen die Coefficienten durch zwei theilbar sind, alle andern liefern zwei Formen.

Wenn δ gerade ist, so sind in sämmtlichen Classen Formen der verlangten Art enthalten und zwar mit zwei Ausnahmen zwei. Diese zwei Ausnahmen, in denen sich sechs Formen ergeben, werden von den Classen gebildet, in welchen die Coefficienten der vorkommenden Formen durch acht theilbar sind oder die nach Fortlassung eines allen Coefficienten gemeinsamen Theilers uneigentlich primitiv werden.

Dabei genügt es, in einer jeden Classe die repräsentirende Form aufzustellen. In denjenigen Classen nämlich, in denen zwei Formen der verlangten Art existiren, wird die zweite aus der repräsentirenden

durch eine lineare Substitution des dritten Falles gefunden, in denjenigen Classen ferner, in denen sechs Formen der verlangten Art existiren, werden die fünf andern durch eine lineare Substitution des $2, 3 \cdots 6^{\text{ten}}$ Falles aus der repräsentirenden abgeleitet.

Es bleibt übrig, die Determinanten $-\sigma^2$ und $-\frac{3}{4}\sigma^2$ zu betrachten.

Sei zunächst $\Delta = -\sigma^2$ und zwar

$$\Delta \equiv 1 \bmod 4.$$

Es giebt nur eine Classe der Determinante $-\sigma^2$, in welcher die Coefficienten sämmtlicher Formen den Theiler σ haben. Die einzige reducirte Form derselben ist:

$$\sigma\tau^2 + \sigma^2 = 0.$$

Dieselbe kann nicht zum Repräsentanten gewählt werden, da ihre Coefficienten nicht der Bedingung zwei genügen.

Wir wählen daher eine andere Form zu demselben und zwar:

$$\sigma\tau^2 - 2\sigma\tau + 2\sigma = 0.$$

Dieselbe wird durch vier Transformationen in sich selbst übergeführt. Die beiden ersten sind schon betrachtet und als zum ersten Fall gehörend befunden worden. Die beiden andern werden von den Zahlen gebildet:

$$a_0 = -1;\ b_0 = -2;\ a_1 = 1;\ b_1 = 1,$$
$$a_0 = 1;\ b_0 = 2;\ a_1 = -1;\ b_1 = -1.$$

Dieselben gehören zum dritten Falle, so dass in der zu der Form:

$$\sigma\tau^2 - 2\sigma\tau + 2\sigma = 0$$

gehörenden Classe nur diese einzige Form existirt, welche allen Bedingungen genügt, vorausgesetzt, dass σ eine ungerade Zahl ist.

Dasselbe Resultat findet statt, wenn

$$-\Delta \equiv \sigma^2 \equiv 32 \bmod 64$$

ist. Ist dagegen

$$-\Delta \equiv \sigma^2 \equiv 0 \bmod 64,$$

so giebt es in der einzigen Classe, deren Coefficienten durch σ theilbar sind, drei Formen, die allen Bedingungen genügen, nämlich u. a.

$$\sigma\tau^2 + \sigma = 0;\quad 2\sigma\tau^2 + 2\sigma\tau + \sigma = 0;\quad \sigma\tau^2 - 2\sigma\tau + 2\sigma = 0.$$

Sei jetzt

$$-4\Delta = +3\sigma^2.$$

Alsdann giebt es in der einzigen zu dieser Determinante gehörenden uneigentlich primitiven Classe, in welcher die Coefficienten sämmtlicher Formen durch σ theilbar sind, nur zwei Formen, welche allen Bedingungen genügen und zwar können die Formen gewählt werden:

$$2\sigma\tau^2 + 2\sigma\tau + 2\sigma = 0; \quad 2\sigma\tau^2 - 2\sigma\tau + 2\sigma = 0.$$

Hiermit ist die Untersuchung vollkommen abgeschlossen.

Es liefern die gefundenen Sätze, die denjenigen, welche Hermite*) für eine Primzahltransformation ohne Beweis aufgestellt hat, durchaus analog, ja fast gleich sind, eine einfache Methode, sämmtliche Gleichungen

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

aufzustellen, deren Lösungen die Argumente der von einander verschiedenen Wurzeln $u = \varphi(\tau)$ der Discriminante:

$$D = u^N (u^8 - 1)^{N_1} (a_0 + a_1 u^8 + \cdots + a_\nu u^{8\nu}) = 0$$

sind.

Seien alle diese Gleichungen aufgestellt, so schliesst sich hieran die weitere Aufgabe, zu bestimmen, eine wievielfache Wurzel der Discriminante eine jede zu einer beliebigen der aufgestellten Gleichungen

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

gehörende Function $\varphi(\tau)$ ist. Wir schicken den hierauf bezüglichen Satz voraus:

Jede Function $\varphi(\tau)$, welche zu einer der aufgestellten Gleichungen:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

gehört, deren Coefficienten keinen gemeinsamen Theiler mit n haben, ist eine zweifache Wurzel der Discriminante, jede Function $\varphi(\tau)$, welche zu einer der aufgestellten Gleichungen:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

gehört, deren Coefficienten mit n den grössten gemeinsamen Theiler $a_p a_q a_r \cdots$ haben, ist eine

$$2(a_p+1)(a_q+1)(a_r+1)\cdots\text{-fache Wurzel}$$

der Discriminante.

Zum Beweise schicken wir einige Sätze, die auch an sich interessant sind, voraus.

Wir beweisen zunächst den Satz:

Die Discriminante einer Modulargleichung, die zu einer Transformation des n^{ten} Grades gehört, ist, von einem Factor u^N abgesehen, ein vollständiges Quadrat einer ganzen Function von u^8.

Bezeichnen wir die Wurzeln der Modulargleichung mit $v_1 \cdots v_{S(n)}$, so ist der Ausdruck

$$\prod (v_\varkappa - v_\lambda) = \sqrt{D}$$

näher in Betracht zu ziehen.

*) Hermite, Sur la théorie des équations modulaires etc., Paris 1859, oder Comptes rendus 1859, tome 49.

Allgemein haben die Lösungen der Modulargleichungen die Form:

$$\left(\frac{2}{\delta}\right)\varphi\left(\frac{\delta\tau-16\xi}{\delta_1}\right)=f_0(u)+f_1(u)u^{\frac{\delta}{\delta_1}}+f_2(u)u^{\frac{2\delta}{\delta_1}}+\cdots,$$

oder:

$$\left(\frac{2}{\delta}\right)\varphi\left(\frac{\delta\tau-16\xi}{\delta_1}\right)=F_0(u)+F_1(u)u^{\frac{1}{\delta_1}}+F_2(u)u^{\frac{2}{\delta_1}}+\cdots F_{\delta_1-1}(u)u^{\frac{\delta_1-1}{\delta_1}}.$$

wobei sämmtliche Coefficienten der einzelnen gebrochenen u Potenzen der oberen, wie der unteren Reihe Potenzreihen sind, die nach ganzen Potenzen von u fortschreiten.

Hieraus folgt, dass jedenfalls sein muss:

$$\prod(v_x-v_s)=\sum_r\sum_x g_{xr}(u)u^{\frac{\alpha_{xr}}{\delta_r}},$$

wo δ_r alle Theiler von n, α_{xr} sämmtliche Zahlen von 0 bis δ_r-1 bedeuten kann und $g_{xr}(u)$ Potenzreihen sind, die nach ganzen Potenzen von u fortschreiten.

Die u sowohl wie die v Grössen sind eindeutig definirte Functionen von τ. Setzen wir an Stelle von τ eine andere Grösse τ', die aus jener durch eine lineare Substitution des ersten Falles entstanden ist, so wird aus u allgemein $ue^{\frac{2si\pi}{8}}$, während die Wurzeln der transformirten Modulargleichung die Gestalt annehmen $e^{\frac{2sni\pi}{8}}v$. Es folgt dieses, wenn man die in dem zweiten Theile des schon erwähnten Lehrbuchs von Herrn Königsberger p. 50 aufgestellten Gleichungen für den Fall näher untersucht, dass die Transformationszahlen zum ersten Fall gehören.

Wie wir sehen, geht bei dieser Substitution die linke Seite in sich selbst multiplicirt mit einer achten Einheitswurzel über, die rechte Seite also auch.

Dieses aber ist nicht anders möglich, als wenn die Coefficienten der gebrochenen Potenzen von u gleich Null werden, wenn ferner die übrig bleibende Potenzreihe die Form hat:

$$\prod(v_x-v_s)=u^r(a_0+a_1u^8+a_2u^{16}+\cdots).$$

Setzen wir ferner an Stelle von τ eine Grösse τ', die aus der ersteren durch eine lineare Substitution des dritten Falles entstanden ist, so wird aus u allgemein $e^{\frac{2si\pi}{8}}\frac{1}{u}$, während die Wurzeln der transformirten Modulargleichung die Gestalt annehmen: $e^{\frac{2sni\pi}{8}}\frac{1}{v}$.

Da nun das letzte Glied der Modulargleichung $\pm u^{S(n)}$ ist, d. h. $v_1\cdots v_{S(n)}=\pm u^{S(n)}$, so geht die linke Seite in sich selbst dividirt

durch eine endliche u Potenz über, die rechte also auch. Hieraus folgt, dass sein muss:

$$\prod (v_x - v_s) = u^r (a_0 + a_1 u^8 + \cdots a_\mu^{8\mu}) = \sqrt{D}.$$

Mithin können wir D unter Berücksichtigung der früher aufgestellten Form schreiben:

$$D = u^N (u^8 - 1)^{N_1} (\alpha_0 + \alpha_1 u^8 + \cdots \alpha_\nu u^{8\nu})^2 \text{ q. e. d.}$$

Eine jede Lösung von $D = 0$ ist also mindestens eine doppelte.

Wir beweisen ferner den Satz:

Bezeichnet man die Wurzeln der Discriminante, abgesehen von den Wurzeln 0 und $e^{\frac{2si\pi}{8}}_{s=1\ldots8}$ mit $u_0 \cdots u_r$, wobei eine $\varkappa$-fache als $\varkappa$-einfache anzusehen ist, ferner diejenigen der ihnen entsprechenden Wurzeln der Modulargleichung, welche einer zweiten gleich werden, mit $v_0 \cdots v_r$, *so ist die Reihe der* $u_0 \cdots u_r$ *identisch mit der Reihe der* $v_0 \cdots v_r$.

Die Modulargleichung ändert sich bekanntlich nicht, wenn v statt u, $\left(\frac{2}{n}\right) u$ statt v gesetzt wird. Nehmen daher für $u = u_x$ zwei Wurzeln derselben den Werth $v_x = \varphi(\tau_x)$ an, so folgt leicht, dass für $u = v_x$ zwei ihrer Wurzeln den Werth

$$\left(\frac{2}{n}\right) u_x = \left(\frac{2}{d}\right) \varphi\left(\frac{d\tau_x - 16x}{d_1}\right) = \left(\frac{2}{t}\right) \varphi\left(\frac{t\tau_x - 16x_1}{t_1}\right)$$

annehmen.

Nun ist die Discriminante das Resultat der Elimination von v aus der Modulargleichung:

$$\Theta(uv) = 0$$

und aus

$$\frac{\partial \Theta(uv)}{\partial v} = 0 = \vartheta(uv).$$

Dann schliessen wir, dass, falls diese beiden Gleichungen bestehen, auch sein muss:

$$\Theta\left(v, \left(\frac{2}{n}\right) u\right) = 0 \cdot \vartheta\left(v, \left(\frac{2}{n}\right) u\right) = 0,$$

und hieraus folgt das zu Beweisende, wenn wir noch erwägen, dass die Discriminante, von u^N abgesehen, eine ganze Function von u^8 ist*).

Ein jedes der zu einer beliebigen der aufgestellten Gleichungen gehörenden u_x wird demnach eine ebensovielfache Wurzel der Discriminante sein, als es in der Reihe der $v_0 \cdots v_r$ enthalten ist. Dieses ist leicht zu entscheiden. In der That, wir fanden, dass, wenn die Coeffi-

*) Andere Beweise der beiden letzten Sätze können analog denjenigen gegeben werden, die Hermite in seiner schon citirten Arbeit für eine Primzahltransformation aufgestellt hat.

cienten der Gleichung $P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$ mit n keinen gemeinsamen Theiler haben, für das ihnen entsprechende $\varphi(\tau)$ nur zwei Wurzeln der Modulargleichung einander gleich werden, wenn sie dagegen mit n den grössten gemeinsamen Theiler $\alpha = a_p\, a_q\, a_r \cdots$ haben, $(a_p+1)\,(a_q+1)\,(a_r+1)$ Wurzelpaare der Modulargleichung denselben Werth annehmen.

Daraus folgt dann aus dem vorigen unmittelbar, dass sämmtliche u, welche zu Gleichungen der ersteren Art gehören, zweimal, sämmtliche u, welche zu Gleichungen der letzteren Art gehören, $2\,(a_p+1)\,(a_q+1)\,(a_r+1)\cdots$ mal in der Reihe der $v_0 \cdots v_r$ enthalten sind. Q. e. d.

Damit ist auch die letzte Aufgabe erledigt und wir wollen, bevor wir zur Aufstellung der Gleichungen für einige einfache Transformationsgrade schreiten, schliesslich noch auf Grund der gewonnenen Resultate die Discriminante in gewisser Weise in Factoren zerlegen.

Greifen wir unter den aufgestellten Gleichungen:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

alle diejenigen heraus, deren Coefficienten mit n den grössten gemeinsamen Theiler $\alpha = a_p\, a_q\, a_r \cdots$ haben.

Mögen deren im Ganzen $8m_\alpha$ — ihre Zahl muss ein Multiplum von 8 sein — existiren, so bezeichnen wir die ihnen entsprechenden Werthe von u mit:

$$u_{1\alpha} u_{2\alpha} \cdots u_{8m_\alpha \alpha}.$$

Dann folgt leicht, dass der Ausdruck

$$D_\alpha = \prod_x (u - u_{k\alpha})$$

das Product ausgedehnt über $k = 1 \cdots 8m_\alpha$ eine ganze, ganzzahlige Function von u^8 ist, die wir bezeichnen wollen:

$$D_\alpha = b_{1\alpha} + b_{2\alpha} u^8 + \cdots b_{m_\alpha \alpha}^{8m_\alpha}.$$

Alsdann wird die Discriminante unter Beibehaltung der eingeführten Bezeichnungen:

$$D = u^N (u^8 - 1)^{N_1} (b_{11} + b_{21}\, u^8 + \cdots b_{m_{11}}\, u^{8m_1})^2 \prod_\alpha (D_\alpha)^{2(a_p+1)(a_q+1)\cdots},$$

wobei das Product auszudehnen ist über alle Theiler von n mit Ausnahme von 1 und n.

Auf diese Weise ist die Discriminante in Factoren zerlegt, die lauter *einfache* Wurzeln haben.

Wir hatten früher die Discriminante in die Form gebracht:

$$D = u^N (u^8 - 1)^{N_1} (\alpha_0 + \alpha_1 u^8 + \cdots \alpha_r u^{8r})^2,$$

wobei u. a.

$$8\nu = S(n)^2 - 6S(n) - 5nS'(n) - 2\Delta(n) - 8\Delta'(n)$$

einen eindeutig bestimmten Werth hat.

Durch Vergleichung folgt:

$$\nu = m_1 + \sum_{\alpha}(a_p+1)(a_q+1)\cdots m_\alpha,$$

wobei die Summe über alle Theiler von n, mit Ausnahme von 1 und n auszudehnen ist.

Nun giebt m_α gerade die Zahl der Gleichung $P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$ an, deren Coefficienten mit n den grössten gemeinsamen Theiler α haben und von einander verschiedene achte Potenzen der Wurzeln der Discriminante liefern. Aehnliches gilt für m_1. Wir haben daher in obigem ein einfaches Criterium, um an Beispielen die Richtigkeit der aufgestellten Sätze zu prüfen.

Hermite hat für die Primzahlen von 5 bis 29 jene Gleichungen wirklich aufgestellt. Wir wollen sie für die weitere Primzahl 31 und für die zusammengesetzten Zahlen 15, 21, 33, 35 aufstellen. Wie gezeigt, brauchen nur die repräsentirenden Formen aufgestellt werden. Wir schliessen uns in der Wahl derselben an Hermite an. Genügt nämlich eine reducirte Form (P, Q, R) nicht sämmtlichen Bedingungen in Betreff ihrer Coefficienten, so thut es entweder die Form

$$(R, -Q, P) \text{ oder } (P, -P+Q, P-2Q+R).$$

Setzen wir daher:

$$(R, -Q, P) = (P, Q, R)_1;\quad (P, -P+Q, P-2Q+R) = (P, Q, R)_2,$$

so können wir immer eine der drei Formen

$$(P, Q, R),\quad (P, Q, R)_1,\quad (P, Q, R)_2$$

zum Repräsentanten wählen, wie wir es thun wollen.

n		ν
15	$-\Delta = 9$ $(1, 0, 9)_2,\ (3, 0, 3)_2,\ (2, 1, 5)_1.$ $-\Delta = 11$ $(2, 1, 6).$ $-\Delta' = 56$ $(1, 0, 56),\ (7, 0, 8),\ (3, \pm 1, 19)_2,\ (4, 2, 15)_1,\ (5, \pm 2, 12),$ $(8, 4, 9)_1.$ $m_1 = 26.\quad 4m_3 = 4.\quad 6m_5 = 0.$	30

n		ν
21	$-\Delta = 5$ $(1, 0, 5)_2$, $(2, 1, 3)_1$. $-\Delta = 27$ $(2, 1, 14)$, $(6, 3, 6)$. $-\Delta = 17$ $(1, 0, 17)_2$, $(2, 1, 9)_1$, $(3, \pm 1, 6)$. $-\Delta' = 104$ $(1, 0, 104)$, $(8, 0, 13)_1$, $(3, \pm 1, 35)_2$, $(5, \pm 1, 21)_2$, $(7, \pm 1, 15)_2$, $(4, 2, 27)_1$, $(9, \pm 2, 12)$, $(8, 4, 15)_1$. $-\Delta' = 80$ $(1, 0, 80)$, $(2, 0, 40)$, $(4, 0, 20)_2$, $(5, 0, 16)$, $(8, 0, 10)_1$, $(3, \pm 1, 27)_2$, $(9, 1, 9)_2$, $(4, 2, 21)_1$, $(6, \pm 2, 14)_2$, $(7, \pm 2, 12)$, $(8, 4, 12)_1$. $m_1 = 70$. $4 m_3 = 8$. $8 m_7 = 0$.	78
31	$-\Delta = 21$ $(1, 0, 21)_2$, $(3, 0, 7)_2$, $(2, 1, 11)_2$, $(5, 2, 5)_2$. $-\Delta = 55$ $(2, 1, 28)_1$, $(4, \pm 1, 14)$, $(8, 3, 8)_2$. $-\Delta = 57$ $(1, 0, 57)_2$, $(3, 0, 19)_2$, $(2, 1, 29)_1$, $(6, 3, 11)_1$. $-\Delta = 27$ $(2, 1, 14)$, $(6, 3, 6)$. $-\Delta = 184$ $(1, 0, 184)$, $(8, 0, 23)_1$, $(5, \pm 1, 37)_2$, $(4, 2, 47)_1$, $(8, 4, 25)_1$, $(11, \pm 5, 19)_2$. $-\Delta = 240$ $(1, 0, 240)$, $(2, 0, 120)$, $(3, 0, 80)$, $(4, 0, 60)_2$, $(5, 0, 48)$, $(6, 0, 40)$, $(8, 0, 30)_1$, $(10, 0, 24)$, $(12, 0, 20)_2$, $(15, 0, 16)$, $(4, 2, 61)_1$, $(8, 4, 32)$, $(16, 4, 16)$, $(12, 6, 23)_1$, $(17, 7, 17)_2$, $((16, 8, 19)_1$. $-\Delta = 168$ $(1, 0, 168)$, $(8, 0, 21)_1$, $(3, 0, 56)$, $(7, 0, 24)$, $(13, 1, 13)_2$, $(4, 2, 43)_1$, $(8, 4, 23)_1$, $(12, 6, 17)_1$. $m_1 = 104$.	104

n		ν
33	$-\Delta = 35$ $(2, 1, 18)$, $(6, 1, 6)$. $-\Delta = 65$ $(1, 0, 65)_2$, $(5, 0, 13)_2$, $(2, 1, 33)_1$, $(3, \pm 1, 22)$, $(6, \pm 1, 11)_1$, $(9, 4, 9)_2$. $-\Delta = 63$ $(2, 1, 32)_1$, $(4, \pm 1, 16)_2$, $(8, 1, 8)_2$, $(6, 3, 12)_1$. $-\Delta = 29$ $(1, 0, 29)_2$, $(2, 1, 15)_1$, $(3, \pm 1, 10)$, $(5, \pm 1, 6)$. $-\Delta' = 200$ $(1, 0, 200)$, $(5, 0, 40)$, $(8, 0, 25)_1$, $(3, \pm 1, 67)_2$, $(4, 2, 51)_1$, $(12, \pm 2, 17)_1$, $(11, \pm 3, 19)_2$, $(8, 4, 27)_1$, $(9, \pm 4, 24)$, $(15, 5, 15)_2$. $-\Delta' = 272$ $(1, 0, 272)$, $(2, 0, 136)$, $(4, 0, 68)_2$, $(8, 0, 34)_1$, $(16, 0, 17)_1$, $(3, \pm 1, 91)_2$, $(7, \pm 1, 39)_2$, $(13, \pm 1, 21)_2$, $(4, 2, 69)_1$, $(6, \pm 2, 46)_2$, $(12, \pm 2, 23)_1$, $(8, 4, 36)_1$, $(9, \pm 4, 32)$, $(12, \pm 4, 24)$, $(16, \pm 4, 18)_1$, $(11, \pm 5, 57)_2$, $(14, \pm 6, 22)_2$, $(16, 8, 21)_1$. $-\Delta' = 216$ $(1, 0, 216)$, $(8, 0, 27)_1$, $(7, \pm 1, 31)_2$, $(4, 2, 55)_1$, $5, \pm 2, 44)$, $(11, \pm 2, 20)$, $(9, \pm 3, 25)_2$, $(8, 4, 29)_1$, $(3, 0, 72)$, $(9, 0, 24)$, $(15, 3, 15)_2$, $(12, 6, 21)_1$. $m_1 = 170$. $4 m_3 = 40$. $12 m_{11} = 0$.	210
35	$-\Delta = 49$ $(1, 0, 49)_2$, $(7, 0, 7)_2$, $(2, 1, 25)_1$, $(5, \pm 1, 10)$. $-\Delta = 75$ $(2, 1, 38)$, $(6, 3, 14)$, $(10, 5, 10)$. $-\Delta = 69$ $(1, 0, 69)_2$, $(3, 0, 23)_2$, $(2, 1, 35)_1$, $(5, \pm 1, 14)$, $(7, \pm 1, 10)$, $(6, 3, 13)_1$. $-\Delta = 31$ $(2, 1, 16)_1$, $(4, \pm 1, 8)_1$.	202

n		v
35	$-\Delta' = 216$ siehe vorher. $-\Delta' = 304$ $(1, 0, 304)$, $(2, 0, 152)$, $(4, 0, 76)_2$, $(8, 0, 38)_1$, $(16, 0, 19)_1$, $(5, \pm 1, 61)_2$, $(4, 2, 77)_1$, $(7, \pm 2, 44)$, $(11, \pm 2, 28)$, $(14, \pm 2, 22)_2$, $(8, 4, 40)$, $(10, \pm 4, 32)$, $(16, \pm 4, 20)_1$, $(17, \pm 6, 20)$, $(16, 8, 23)_1$. $-\Delta' = 264$ $(1, 0, 264)$, $(3, 0, 88)$, $(8, 0, 33)_1$, $(11, 0, 24)$, $(5, \pm 1, 53)_2$, $(4, 2, 67)_1$, $(7, \pm 3, 39)_2$, $(13, \pm 3, 21)_2$, $(8, 4, 35)_1$, $(17, 5, 17)_2$, $(12, 6, 25)_1$, $(15, \pm 6, 20)$. $-\Delta' = 96$ $(1, 0, 96)$, $(2, 0, 48)$, $(3, 0, 32)$, $(4, 0, 24)$, $(6, 0, 16)$, $(8, 0, 12)_1$, $(4, 2, 25)_1$, $(5, \pm 2, 20)$, $(10, 2, 10)_2$, $(7, \pm 3, 15)_2$, $(8, 4, 14)_1$, $(11, 5, 11)_2$. $m_1 = 182$. $6\, m_5 = 12$. $8\, m_7 = 8$.	202

Zur Theorie der algebraischen Flächen.

Von Rud. Sturm in Darmstadt.

1. Es sei eine algebraische Fläche F von der Ordnung n, dem Range r, der Classe m betrachtet; die Zahl der Wendetangenten in einer Ebene sei α, durch einen Punkt σ. Der Torsus, welcher F längs eines ebenen Schnittes C umschrieben ist, hat die Ordnung $n + \alpha$*), die Classe r; seine Polarcurve in Bezug auf den unendlich fernen imaginären Kreis C_∞^2 hat also die Classe $n + \alpha$ und die Ordnung r; bringen wir die Tangenten dieser unendlich fernen Curve mit den Tangentialebenen des Torsus zum Schnitt, so erhalten wir eine Curve von der Ordnung $n + r + \alpha$. Dieselbe wird von den unendlich fernen Punkten der Tangenten von F in den Punkten von C gebildet, die je zu der in demselben Punkte berührenden Erzeugenden des Torsus normal sind; $(n + r + \alpha)$-mal fällt diese Tangente in die Ebene von C, berührt also C und ist deshalb zu der Torsus-Erzeugenden conjugirt, folglich Krümmungslinien-Tangente. Es giebt deshalb in jeder Ebene $n + r + \alpha$ Krümmungslinien-Tangenten.

2. Oder: die Fläche der Normalen in den Punkten von C hat den Grad $n + r$; es sei $\varkappa$ die Ordnung der Cuspidalcurve von F, so dass C $\varkappa$ Rückkehrpunkte besitzt; in jedem derselben berühren zwei unendlich nahe Tangentialebenen und stehen also zwei unendlich nahe Normalen auf der Fläche senkrecht. Die $\varkappa$ Rückkehrpunkte liefern demnach Torsallinien der Normalenfläche, deren Spitzen auf C liegen. Da C und diese Fläche — deren Rang ϱ sei — gleiches Geschlecht haben, so hat man:

$$r - 2(n-1) + \varkappa = \varrho - 2(n+r-1);$$

also $\varrho = 3r + \varkappa = 3n + \alpha$, also gleich der Ordnung der Evolute des ebenen Schnitts.

*) Man vergl. in Bezug auf mehrere im Folgenden benutzte Sätze meine Aufsätze Math. Annalen Bd. VI, S. 241, und Bd. VII, S. 567.

Die Anzahl der Torsallinien der Normalenfläche ist

$$2(3r + \varkappa - \{r + n\}) = 2(2r - n + \varkappa);$$

also giebt es ausser den obigen $\varkappa$ noch $2(2r-n) + \varkappa = n + r + \alpha$, deren Spitzen nicht auf C liegen. Demnach werden die Normalen von $n + r + \alpha$ Punkten auf C von der Normale des Nachbarpunktes auf der Curve getroffen; d. h. in der Ebene von C giebt es $n+r+\alpha$ Tangenten von Krümmungslinien.

3. Die Normalen der Fläche F auf den durch einen Punkt O gehenden Berührungsebenen bilden eine Fläche vom Grade $m + r$. Die Curve der Berührungspunkte dieser Ebenen wird in den Berührungspunkten der ι durch O gehenden stationären Tangentialebenen je von der einzigen dort osculirenden Wendetangente berührt, weil überhaupt die Tangente der Curve zur Kante des Berührungskegels, in diesem Falle aber diese einzige Wendetangente zu allen andern Tangenten conjugirt ist. Da aber in zwei consecutiven Punkten dieser Geraden und auch der Berührungscurve die Tangentialebene der F dieselbe bleibt, so erhalten wir zwei parallele benachbarte Erzeugende der obigen Normalenfläche, demnach ι Torsallinien derselben.

Da wieder das Geschlecht der Normalenfläche, deren Rang ϱ' sei, und des Kegels aus O an F das nämliche ist, so hat man:

$$r - 2(m-1) + \iota = \varrho' - 2(m+r-1),$$

also

$$\varrho' = 3r + \iota = 3m + \sigma.$$

Die Gesammtzahl der Torsallinien der Normalenfläche ist

$$2(3r + \iota - (m+r)) = 2(2r - m + \iota);$$

ziehen wir von diesen die obigen ι ab, so bleiben

$$2(2r - m) + \iota = r + m + \sigma.$$

Diese beweisen, dass sich unter den Tangenten der Berührungscurve $r + m + \sigma$ solche befinden, welche eine Krümmungslinie berühren, folglich thut dies auch die conjugirte Tangente, das ist die Kante des Berührungskegels; es giebt also durch jeden Punkt $m+r+\sigma$ Krümmungslinien-Tangenten. Die beiden Zahlen $m + r + \sigma$ und $n + r + \alpha$ sind, wie auch zu erwarten war, dual. *Das System der Krümmungslinien-Tangenten einer algebraischen Fläche ist demnach von der Ordnung* $m + r + \sigma$ *und der Classe* $n + r + \alpha$; dieses System ist also ein algebraisches, während die Krümmungslinien selbst bei den Flächen von höherer als zweiter Ordnung wahrscheinlich im Allgemeinen transcendent sind.

---

4. Betrachten wir *zwei Flächen* F, F', welche die Ordnung n, bez. n' und den Rang r, bez. r' haben. Sei l eine beliebige Gerade.

Von einem Punkte X derselben legen wir den Tangentialkegel an F; seine Berührungscurve r^{ter} Ordnung trifft F' in rn' Punkten, deren Berührungsebenen die l in ebensovielen Punkten X' schneiden. Jedem X' entsprechen umgekehrt $r'n$ Punkte X. Jeder Coincidenzpunkt dieser Correspondenz liegt auf zwei Berührungsebenen von F, F', die denselben Contactpunkt haben, also auf einer Tangente der Schnittcurve der beiden Flächen; folglich *ist die Ordnung des Tangententorsus dieser Schnittcurve* $nr' + n'r$.

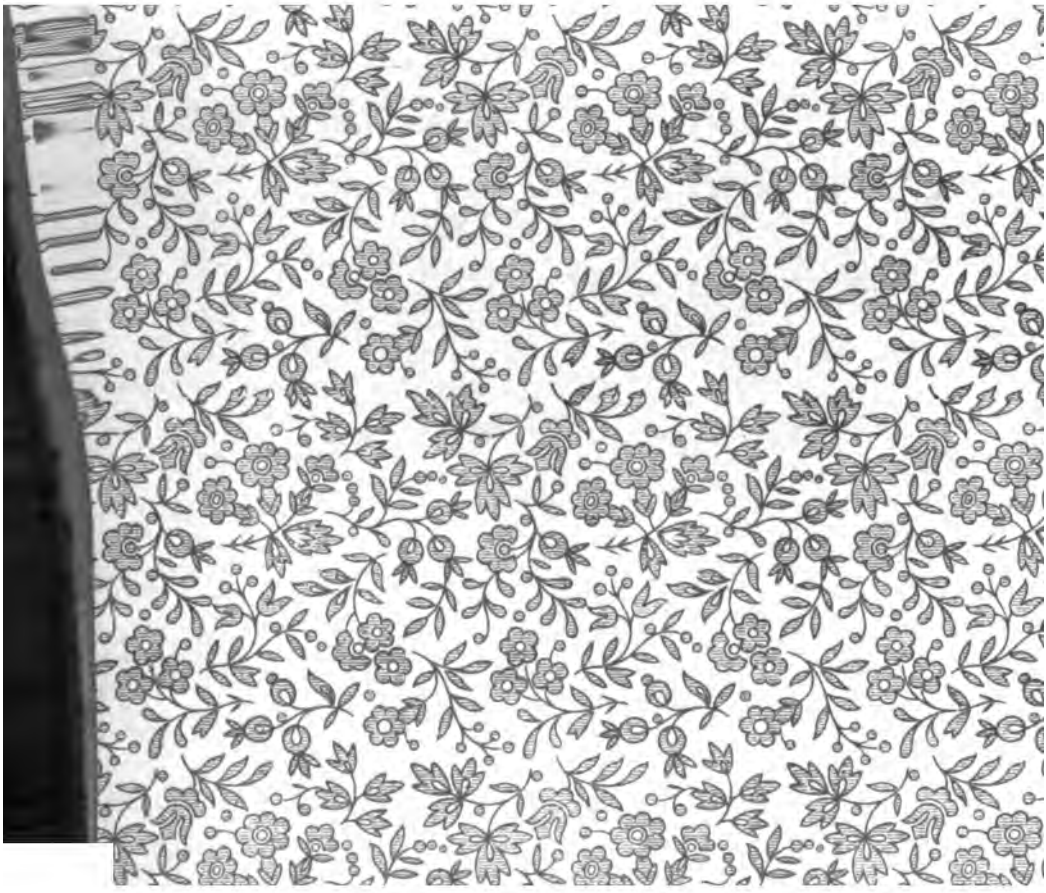
Haben die beiden Flächen einen Berührungspunkt P, so sei X_0 der Schnitt der gemeinsamen Berührungsebene mit l; die dem X_0 zugehörige Berührungscurve auf F (oder F') geht durch P und berührt dort die andere Fläche, hat also mit ihr noch $n'r - 2$ Punkte gemein: der Punkt X_0 repräsentirt deshalb zwei Coincidenzen; es ist ja auch bekannt, dass jeder Berührungspunkt die Ordnung des Tangententorsus der Schnittcurve um 2 vermindert.

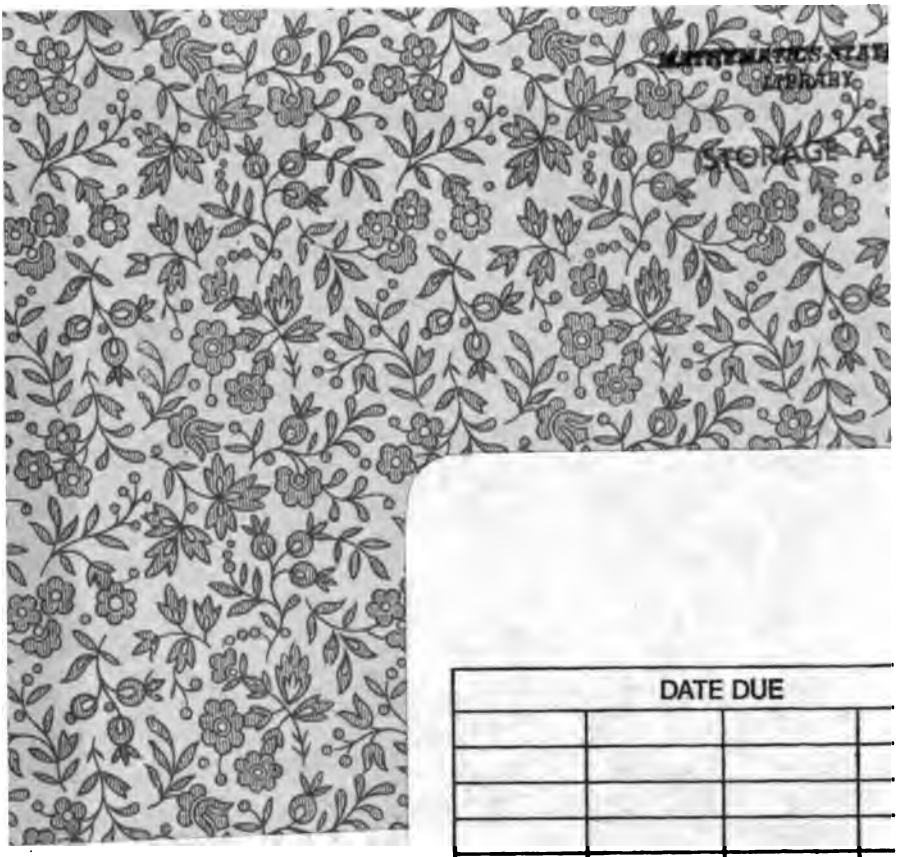
Ist die Berührung (in P) stationär und X_0 der Schnittpunkt der gemeinsamen Berührungsebene mit l, so hat die zu X_0 gehörige Berührungscurve der einen Fläche mit der Schnittcurve im Rückkehrpunkte P die Rückkehrtangente gemein, also mit der andern Fläche drei consecutive Punkte; X_0 stellt demnach 3 Coincidenzen dar, weil er nur noch $n'r - 3$ von ihm verschiedene entsprechende Punkte hat.

5. Sind m, m' die Classen der beiden Flächen, so ist die Ordnung des Torsus der gemeinsamen Tangentialebenen $mr' + m'r$.

6. Aus dem Resultate in Nr. 4. folgt mittelst der bekannten Formeln, dass *die Classe des Tangententorsus der* (ohne vielfache Punkte vorausgesetzten) *Schnittcurve* $3(nr' + n'r - nn')$ *ist*; ebenso aus dem in Nr. 5., dass die Ordnung der Rückkehrcurve des gemeinsamen umschriebenen Torsus $3(mr' + m'r - mm')$ ist.

Darmstadt, den 21. December 1875.

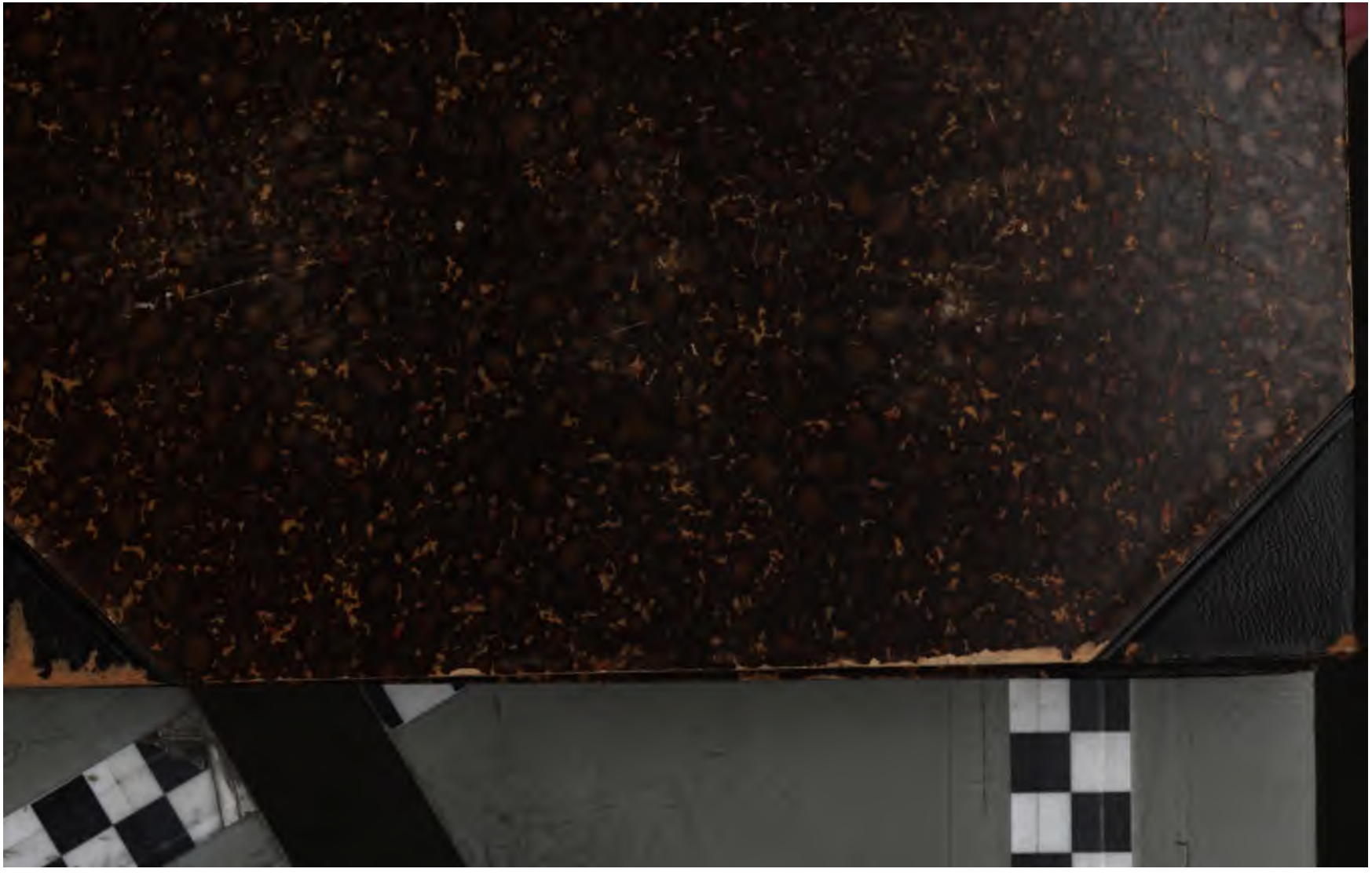



MATHEMATICS STATE
LIBRARY
STORAGE A

DATE DUE

DATE DUE

MAR 25 1992		

GAYLORD

STANFORD UNIVERSITY LIBRA
STANFORD, CALIFORNIA 9430